Berichte über die Verhandlung... der Königlich Sächsischen ...

Königlich Sächsische Gesellschaft der ...


HARVARD
ET
VE
RI
TAS
CHRISTO
ECCLESIAE



BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

FÜNFUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1903.

MIT 6 FIGUREN IM TEXT, 4 TAFELN NEBST 1 TABELLE.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

INHALT.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

FÜNFUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1903.

I.

MIT 2 TAFELN UND 3 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1903.

SITZUNG VOM 11. JANUAR 1903.

Der Sekretär gedenkt des großen Verlustes, den die Klasse seit ihrer letzten Sitzung in der Person des Herrn Johannes Wislicenus erlitten hat. Er berichtet über die Beteiligung der Klasse an der Leichenfeier und legt ein Dankschreiben der Familie für die dem Entschlafenen erwiesenen letzten Ehrungen vor.

In betreff der Härtelstiftung behält sich die Klasse für die nächste Sitzung Entschließung vor.

Die Anfrage der Royal Society betr. Aufnahme einer neu begründeten englischen Akademie zur Förderung philosophischer und philologischer Studien in die internationale Association der Akademien wird bejaht. Der Vorschlag, um Pfingsten eine Komiteesitzung abzuhalten, bedarf nach Ansicht der Klasse noch einer näheren Begründung.

Herr Held spricht: „Über den Bau der Neuroglia und die Zusammensetzung der Wand der Lymphgefäße".

Herr Hering legt eine größere Arbeit des Herrn Garten vor: „Beiträge zur Physiologie der marklosen Nerven nach Untersuchungen am Riechnerven des Hechtes".

Die Arbeit des Herrn Held wird in den Abhandlungen der Klasse erscheinen, die des Herrn Garten wurde zurückgezogen und soll separat veröffentlicht werden.

SITZUNG VOM 2. FEBRUAR 1903.

Es liegen die Anträge der Kön. preuß. Akad. der Wissenschaften in Berlin an das Reichskanzleramt vor betr. die Monumenta Germaniae paedagogica. Diese Anträge sind auf Grund der in Berlin von Delegierten der Akademien und Gesellschaften von Berlin, München, Göttingen und Leipzig gefaßten Beschlüsse ausgearbeitet worden, und nach Anhörung ihres Delegierten, des Herrn Prof. O. Hölder, stimmt ihnen die Klasse bei.

Von der verfügbaren Summe von Mk. 2000.— aus der Härtelstiftung werden Herrn Dr. Hayn Mk. 1500.—, Herrn Dr. Garten Mk. 500.— bewilligt

Herr Credner trägt vor eine eigene Arbeit über Seismogramme von Nahbeben und eine von Herrn Dr. Etzold über Seismogramme von Fernbeben.

Herr Scheibner übergibt der Klasse eine Arbeit von Herrn Krause: „Über Bernoullische Zahlen und Funktionen im Gebiet zweier veränderlichen Größen".

Die vom Wiechertschen astatischen Pendelseismometer der Erdbeben-Station Leipzig während des Jahres 1902 registrierten Nahbeben.

Hierzu Tafel I und 3 Textfiguren.

Von

H. Credner.

Am 1. Mai des Jahres 1902 vollzog sich im Vogtlande, in der Gegend von Greiz, ein kleines Erdbeben, dessen mikroseismische Wellen sich nach Norden zu bis über Leipzig hinaus fortpflanzten und hierbei von dem dortselbst aufgestellten Wiechertschen astatischen Pendelseismometer registriert wurden. Letzterer Vorgang war mit um so größerer Genugtuung zu begrüßen, als er den erhofften Beweis lieferte, daß der genannte Apparat in der Tat fähig ist, neben den gewaltigen, seinen Standort durchziehenden Wellen von Fernbeben auch solche schwache, rasch und kurzschüttelnde *Nah*beben aufzuzeichnen, wie sie unser Vogtland und Erzgebirge von Zeit zu Zeit hervorbringt. Hatte doch selbst der Erfinder des Leipziger Seismometers, Herr Prof. Dr. Wiechert in Göttingen, mit größtem Zweifel auf die Registrierungsfähigkeit dieser Nahbeben geblickt. In der Tat schienen sich die berußten Papierstreifen des Seismometers zu langsam zu bewegen, als daß sich auf dieselben die bei solchen kleinen Beben außerordentlich rasch auf einander folgenden Hin- und Herbewegungen der Schreibstifte gesondert, also in Form von Kurven hätten eintragen können.

Für die Erdbebenstation Leipzig war die erste Registrierung eines in so großer Nähe erzeugten schwachen Bebens von ganz besonderer Bedeutung, da auf der ersten Linie ihres ursprünglichen Programmes die instrumentelle Verfolgung gerade der erzgebirgischen, vogtländischen, ostthüringischen und nordböhmischen

seismischen Ereignisse gestanden hatte. Jedenfalls gab der Wunsch, diese Nahbeben, von denen nun im Laufe von 26 Jahren nicht weniger als 63 in den Sitzungsberichten und Abhandlungen dieser Gesellschaft beschrieben worden sind[1]), nun auch in ihren mikroseismischen Zügen zu fesseln, den ersten Impuls zur Aufstellung des Wiechertschen Seismometers und dadurch zur Errichtung der Erdbeben-Hauptstation zu Leipzig.

Bald jedoch nachdem dieselbe erfolgt war, verschob sich die Aufgabe unserer Station auf ein größeres und allgemeineres Ziel, indem sich zunächst die Seismizität der uns fern und fernst liegenden Teile der Erde in den Vorgängen an unserem Apparat wieder zu spiegeln begann und sich bald ganz in den Vordergrund drängte. Die Berichterstattung über alle von unserem außerordentlich feinfühligen Seismometer registrierten *Fern*beben habe ich dem Observator unserer Erdbebenstation Herrn Dr. Frz. Etzold übertragen[2]), und mir selbst nur die Bearbeitung der *Nah*beben als Fortsetzung einer lang gepflegten Disziplin vorbehalten.

Leider aber hat seit Aufstellung unseres Seismometers im März 1902 bis zum Ende dieses Jahres eine vollständige makroseismische Ruhe innerhalb Sachsens geherrscht, dessen Untergrund innerhalb jener Frist keinen einzigen Erdbebenstoß erzeugte. Aber auch von Erschütterungen nachbarlicher Herkunft blieb derselbe fast durchaus unberührt, indem sich nur das erste der beiden Beben, über die jetzt zu berichten ist, auch auf einem etwas größeren Streifen sächsischen Bodens makroseismisch ausdehnte.

1. (64.) Das Greizer Beben am 1. Mai 1902.

A. Das makroseismische Schüttergebiet.

Vergleiche hierzu das Übersichtskärtchen Tafel I und die Kartenskizze auf Seite 5.

Eine Erderschütterung, welche sich zunächst innerhalb der Stadt Greiz im Vogtlande auffällig bemerklich machte, erweckte

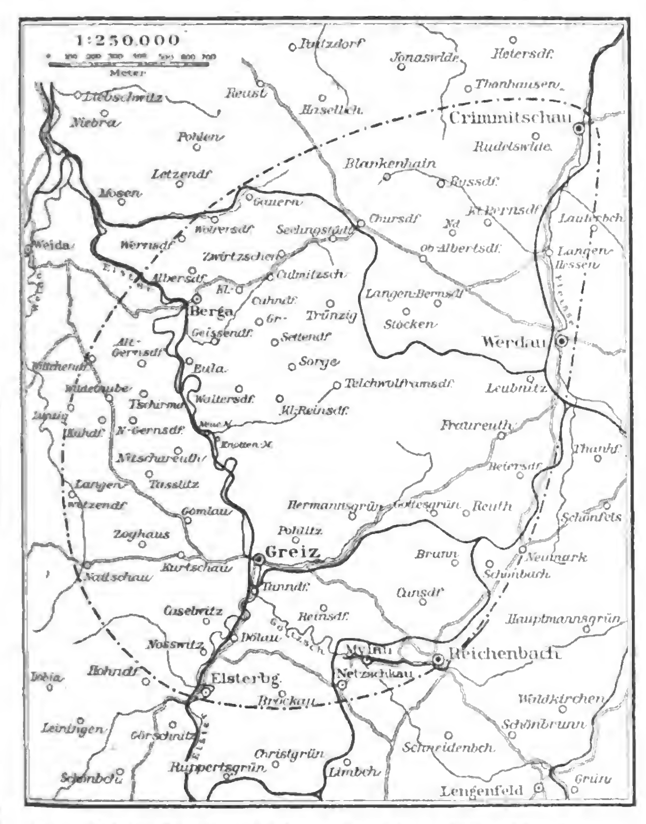
1) Darunter jedoch eine Anzahl Erdbeben-Schwärme von 36 bis 53 Tagen Länge.

2) Vergl. diese Berichte 1902. S. 283 u. f.

hierdurch das lebhafte Interesse des dortigen Referenten der sächsischen Erdbebenkommission, des Herrn Professor Dr. Ludwig, und dieser war es, der dieses Beben mit außerordentlicher Umsicht und Ausdauer über den bei weitem größten Teil des Schüttergebietes verfolgte. Es geschah dies mit Aufgebot aller diesen Zweck fördernden Mittel: durch Erdbeben-Aufrufe in den Zeitungen, durch persönliche Umfrage von Ort zu Ort, ja von Straße zu Straße, durch Inanspruchnahme der Vermittlung von Bekannten, wie des Nachrichtendienstes der Gensdarmerie u. s. f. Das auf solche Weise beschaffte reiche Material, welches, wie gesagt, den größten Teil des Schütterkreises deckte, stellte Herr Prof. Dr. Ludwig mir zur Verfügung. Eine höchst wertvolle Abrundung erfuhr jedoch dasselbe noch durch die zwar viel weniger zahl- und umfangreichen, aber, weil peripherische Lücken ausfüllend, sehr wichtigen Berichte der Herren Erdbeben-Referenten Prof. Weise in Plauen, Strödel in Reichenbach, Dr. R. Neubert in Werdau und besonders des Herrn Dr. M. Schröder in Gera. Die opferwillige Mitarbeiterschaft der genannten Herren Erdbeben-Referenten, in erster Linie des Herrn Prof. Dr. Ludwig, erkenne ich mit freudigem Danke in vollstem Maße an.

Der *Ausgangsort* des Greizer Bebens vom 1. Mai ist in jenem altpaläozoischen Streifen des Vogtlandes zu suchen, der sich in Erzgebirgsrichtung von Pausa-Schleiz aus über Zeulenroda, Greiz und Berga nach NO zieht und dann unter dem Rotliegenden des erzgebirgischen Beckens und der Geraer Gegend verschwindet. Dieser alte Gebirgsstreifen ist nach Th. Liebes und E. Zimmermanns kartographischer und textlicher Darstellung höchst intensiven tektonischen Störungen unterworfen gewesen. Am auffälligsten beeinflussen diese letzteren als sich z. T. kreuzende erzgebirgische und lausitzer Sättel und Mulden, sowie als streichende und Querverwerfungen eine Zone, die sich von Netzschkau aus in nordwestlicher Richtung bis über Greiz hinaus erstreckt, in unregelmäßig gegen einander verschobene Klötze zerschnitten ist und den größeren Teil des pleistoseismischen Schütterareales und mit diesem voraussichtlich auch das Epizentrum des Bebens in sich begreift. Dieses Abhängigkeitsverhältnis ist bei dem so klar vor uns liegenden Schütterkreis dieses kleinen Bebens ganz augenscheinlich, während man sich neuerdings mit Recht immer mehr der Behauptung tektonischen Ursprunges von Beben, namentlich solcher von großer erdoberflächlicher Ausdehnung enthält.

Von der tektonisch disponiert gewesenen Schütterstelle innerhalb dieser Zerrüttungszone aus hat sich das Beben in der



Figur 1. **Makroseismisches Schüttergebiet des Greizer Erdbebens vom 1. Mai 1902 früh $5^h\ 30^m\ 51^s$.** (Vergl. hierzu Tafel I).

Streichrichtung des Zeulenrodaer altpaläozoischen Gebirgsstreifens nach SW und namentlich nach NO ausgebreitet, um dann hier von den cambrisch-silurischen Schiefern auf das über dieselben

flach übergreifende Rotliegende des erzgebirgischen Beckens über zu treten und sich durch Fraureuth nach Werdau und Langenhessen und über Albertsdorf nach Crimmitschau fortzupflanzen. Jenseits des Tales der Pleiße war die Erbebung nicht mehr fühlbar. So läßt sich denn nach den vorliegenden Berichten über positive und negative Beobachtungen das makroseismische Schüttergebiet des 1. Mai umgrenzen als eine elliptische Fläche mit einer in südwest-nordöstlicher Richtung verlaufenden größeren Achse von 30 km Länge, während die kürzere, die Orte Wittchendorf im W und Neumark im O verknüpfende Achse der Schütterellipse 20 km mißt, so daß letztere ein Areal von etwa 470 km^2 umfaßt. Sämtliche aus der Umrahmung dieses Gebietes, also aus der Gegend zwischen Gera, Ronneburg, Weida, Triptis, Auma, Zeulenroda, Pausa, Plauen, Jocketa und Zwickau eingegangenen Nachrichten lauten negativ.

Die Berichte über die *Eintrittszeit* des Bebens stimmen ziemlich genau überein und konzentrieren sich auf „etwa" oder „gegen" $^1/_2$6 Uhr in der Frühe des 1. Mai. Geht man behufs möglichst exakter Fixierung dieser Zeit von der Zeitmarke aus, welche das Seismogramm der Erdbebenwelle bei ihrem Durchschreiten des Leipziger Seismometers erhalten hat, so ergibt sich folgendes: Eintritt der Erschütterung in Leipzig = $5^h\ 30^m\ 51^s$; ungefähre Entfernung Leipzigs vom Epizentrum = 70 km; durchschnittliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der hier in Betracht kommenden direkten Erdwellen, soweit die für Fernbeben gewonnene Zahl auf Nahbeben anwendbar ist = 10 km pro Sekunde; also Zeitverbrauch auf dem Weg = 7 Sek.; folglich: *Eintritt des Bebens im Greizer Epizentrum* = $5^h\ 30^m\ 44^s$.

Es liegt in der Natur der Sache, daß Grad und Art der Bodenbewegung, in welche das Areal des Schüttergebietes durch das Beben versetzt wurde, je nach der örtlichen Lage und Entfernung von dessen epizentraler Partie verschieden waren. Mit einiger Schärfe lassen sich freilich diese verschiedenartigen Schütterzonen nicht von einander abgrenzen, doch hebt sich von Beginn ab eine Anzahl Ortschaften als *pleistoseismisches Gebiet* des Schütterareales hervor, dessen Eigenart durch nachstehende Berichterstattungen fixiert wird.

Netzschkau (Ref. Prof. Weise in Plauen). Noch im Bette Liegende vernahmen ein sich rasch näherndes, donnerndes Rasseln, das etwa 6 Sekunden andauerte, dann für eine Sekunde fast ganz

erlosch, um sich darauf von neuem etwa 3 Sekunden lang zu erheben. Mit jedem der beiden Geräusche, war eine, besonders im ersten Falle ziemlich heftige, kurze Erzitterung des Hauses verbunden, sodaß die Fenster stark klapperten und Glasflaschen klirrend aneinander stießen.

In *Noßwitz* erbebte der feste Schloßbau unter heftigem Zittern und Donnerrollen so stark, daß man befürchtete, es seien Risse in ihm entstanden (Ref. Prof. Dr. Ludwig).

In *Greiz* wird das Beben allgemein bemerkt, weshalb es dem Referenten Herrn Prof. Dr. Ludwig gelingt, sehr zahlreiche Nachrichten einzuziehen, die sich auf 18 Straßen verteilen und in ihrer Gesamtheit folgendes Bild des seismischen Vorganges gewähren: dumpf dröhnendes Rollen macht sich, in der Umgegend von Greiz auch im Freien, bemerkbar, gleichzeitig mit demselben erschüttern Häuser, erzittern die Zimmer, alle Gegenstände in denselben wackeln, die Fenster klirren, geschlossene Türen rütteln, Bilder schaukeln oder schlagen klappernd an die Wand, Leute werden in den Betten unsanft hin- und hergeschaukelt, einzelne springen erschreckt heraus. Auf eine erste derartige längere und stärkere Detonation und Erschütterung folgt eine zweite, kürzere und schwächere, ja nach einem nochmaligen Klappern der Türen zu urteilen, bestand das Beben aus drei Erschütterungen von abnehmender Intensität.

Auch in *Berga* (Ref. Herr Dr. M. Schröder in Gera) wird das Erdbeben ziemlich allgemein wahrgenommen. Dasselbe weckt manche Schläfer aus dem Schlafe. Diese bemerken noch ein Knistern im Balkenwerk und Gemäuer der Häuser, hier und da das Abbröckeln von etwas Mörtel, vernehmen das Klappern von Porzellan und Glasgerätschaften und gleichzeitig mit allem dem einen rollenden Donner. Schon im Freien Beschäftigte fühlen, ja sehen ein schaukelndes Schwanken des Bodens, welches die Bäume in Bewegung setzt.

Ganz ähnlich lauten die Nachrichten aus den zwischen Greiz und Berga gelegenen Ortschaften *Pohlitz*, *Knottengrund*, Station *Neumühle*, *Nitschareuth* und *Waltersdorf*. Auch auf dem Wege von *Tschirma* nach Knottengrund befindliche Arbeiter fühlen, wie der Boden unter ihren Füßen geschüttelt wird.

Die zahlreichen Beobachtungspunkte des Erdbebens, die sich dem durch die oben genannten Orte angedeuteten pleistoseismischen Teile des Schütterareales im SW, namentlich aber im NO an-

scharen, geben sich meist sehr deutlich als Orte geringerer seismischer Intensität zu erkennen, während bei einigen anderen deren augenscheinliche Zugehörigkeit zum pleistoseismischen Terrain nur durch die Unvollständigkeit der eingegangenen Berichte verdunkelt wird. Das Charakteristische für die Orte erster Art, also geringerer *seismischer Erschütterung*, ist die bestimmte Meldung, daß die Erbebung und das mit ihr verbundene Geräusch nicht „ziemlich allgemein", sondern nur von *ganz wenigen* Bewohnern beobachtet wurde.

So schließen sich denn den oben aufgezählten pleistoseismischen Ortschaften im *Westen*, also *links* der Elster an: *Elsterberg, Naitschau, Zoghaus, Kurtschau, Gomlau, Taßlitz, Kühdorf, Lunzig, Wittchendorf, Wilde Taube* und *Alt-Gernsdorf.* Besonders instruktiv für diese Gruppe von Beobachtungsstellen ist die Meldung aus *Kurtschau*: „Einzelne Bewohner hören donnerartiges Geräusch von NW her näher und näher kommen; als es heran ist, erklirren die Fenster und Gläser; dann endet die Erschütterung mit kurzem Ruck."

In dem westlichsten durch die oben genannten Orte Naitschau, Lunzig und Wittchendorf gekennzeichneten Striche äußern sich die Erdbebenerscheinungen verhältnismäßig noch so stark, daß derselbe nicht die eigentliche periphere Schütterzone repräsentieren kann, sondern nach außen zu noch von einem Schütterstreifen schwächsten Grades gefolgt sein muß, der aber wegen Mangel an Berichten nicht nachweisbar war.

Das entsprechende Gebiet geringerer Schütterstärke *östlich*, also *rechts* der Elster erstreckt sich von *Reichenbach* (wo sich das Beben nur sehr schwach äußerte), über *Reudnitz, Teichwolframsdorf, Klein-Reinsdorf, Sorge, Geißendorf, Eula, Groß-Cuhndorf, Trünzig, Klein-Cuhndorf, Culmitzsch, Wolfersdorf, Zwirtzschen, Seelingstädt* und *Chursdorf.* Auf der Linie Neumark—Beiersdorf—Oberalbertsdorf treten die Erdbebenwellen aus dem altpaläozoischen Schiefergebirge in das ihm diskordant aufgelagerte erzgebirgische Rotliegende über. In *Fraureuth* werden Erschütterung und Geräusch noch mehrfach wahrgenommen. In *Werdau* gelingt es nach ergebnislosem Aufruf in der dortigen Zeitung erst der Umfrage des Herrn Dr. Neubert von mehreren zuverlässigen Personen die bestimmte Nachricht zu erlangen, daß sie das Erdbeben in Form von Fensterklirren und begleitendem unterirdischen Poltern beobachtet haben. Ebenso wird aus dem 3,5 km weiter nördlich

gelegenen *Langenhessen* berichtet, daß sich dortselbst in einigen Häusern ein starkes Erbeben und Fensterklirren gleichzeitig mit anhaltendem Donnerrollen abgespielt hat, während endlich in *Crimmitschau* von vielen ein prasselndes Geräusch, ein Zittern und Schwanken der Möbel und gleichzeitig ein eigentümliches Rauschen in der Luft wahrgenommen wurde, wie es sich im Hauptschüttergebiete vielfach hörbar machte. Donnerrollen und Erschütterung schienen von Süden heranzunahen.

Die Orte Reichenbach, Werdau und Crimmitschau bezeichnen die östliche Grenzlinie und Crimmitschau zugleich den nördlichsten Punkt, bis zu welchem sich das Greizer Beben vom 1. Mai 1902 makroseismisch wahrnehmbar gemacht hat. Jenseits dieser Linie gelang es trotz aller Nachforschungen nicht, Erdbeben-Wahrnehmungen zu konstatieren. So ließ namentlich Herr Bergschuldirektor Dittmarsch in Zwickau den Landstrich zwischen Pleißethal bei Werdau und Muldethal bei Zwickau von seinen Bergschülern nach einschlägigen Beobachtungen durchfragen, ohne daß eine einzige positive Auskunft erlangt worden wäre.

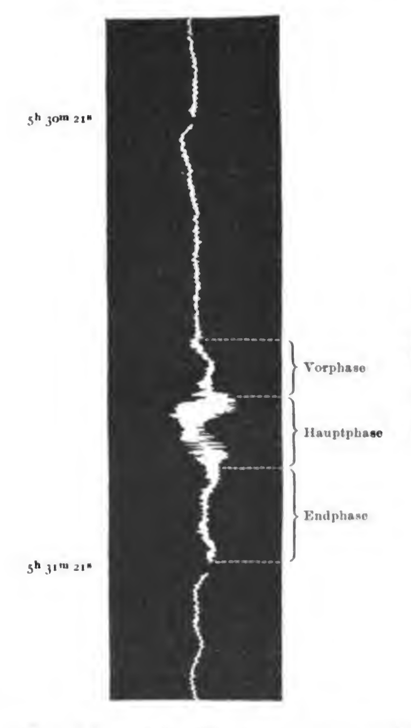
Dies Resultat erschien um so befremdlicher, als sich das Erdbeben 20 km östlich von Reichenbach an einer jenseits des Kirchberger Granitstockes im erzgebirgischen Phyllitgebiete gelegenen Stelle, nämlich in *Weißbach* südsüdöstlich von Zwickau (s. Tafel I) einen geographisch ganz unvermittelten, aber recht kräftigen Ausdruck bahnte.

Nach dem Berichte unseres dortigen Referenten, des Herrn Lehrer Trenkler wurde in *Weißbach* das Beben ganz allgemein sowohl in Gebäuden, wie im Freien, von Personen im Zustande der Ruhe wie der Tätigkeit in der Frühe gegen $^1/_2 6$ Uhr und zwar in Form von 3 oder 4 von SW nach NO verlaufenden, von Donnerrollen begleiteten, wellenförmigen Erschütterungen bemerkt, welche die Fenster klirren machten. Diese vollkommen isolierte, vom eigentlichen Schüttergebiete weit nach Osten vorgeschobene seismische Schütterstelle wird man geneigt sein, auf ein Relaisbeben zurückzuführen, ohne daß dadurch Klärung über den Vorgang verbreitet würde.

B. Das Leipziger Seismogramm des Greizer Bebens.

Von dem in Leipzig aufgestellten Wiechertschen Pendelseismometer werden die Horizontalkomponenten der Bodenbewegungen in 250 facher Vergrößerung registriert. Bei diesem

Maßstabe hatte das durch das Greizer Beben vom 1. Mai gelieferte Seismogramm eine Länge von nur etwa 7 mm, so daß sich an demselben Messungen mit hinreichender Genauigkeit nicht vornehmen ließen. Um solche zu ermöglichen, wurde von Dr. Etzold der Versuch gemacht, auf photographischem Wege eine stärkere



Figur 2. Das von dem Wiechertschen astatischen Pendelseismometer zu Leipzig registrierte Seismogramm des Greizer Erdbebens vom 1. Mai 1902 von $5^h\ 30^m\ 51^s$ bis $5^h\ 31^m\ 21^s$ in 1250facher Vergrößerung der wirklichen Bodenbewegungen.

Vergrößerung des direkt als photographisches Objekt benutzten Original-Seismogrammes zu erzielen, und zwar wurde hierzu von den beiden Komponenten, in welche die Horizontalkomponente des Bebens durch den Apparat zerlegt wird, die N-S Komponente gewählt, weil auf derselben der erste Einsatz deutlicher markiert ist, als bei der im übrigen wesentlich übereinstimmenden O-W Kom-

ponente. Der Versuch einer derartigen Vergrößerung fiel verhältnismäßig günstig aus. Aus ihm ist der in Figur 2 reproduzierte photographische Abzug hervorgegangen, welcher die bereits durch den Registrierapparat 250fach vergrößerte Bodenbewegung in fünffacher, also insgesamt in 1250facher Vergrößerung wiedergibt.

Die beiden Unterbrechungen der seismogrammatischen Linie waren die Markierungen der Minuten $5^h 32$ und $5^h 33$ durch die mit dem Seismometer verbundene Uhr, welche aber in mitteleuropäische Zeit umgerechnet worden sind (siehe unten).

Wie die Seismogramme von Fernbeben, so läßt sich auch dasjenige des Greizer Bebens in 3 Hauptabschnitte gliedern, nämlich in die Aufzeichnungen 1) der *Vorphase*, deren erster Einsatz von den vom Erdbebenentstehungsorte (dem unterirdischen Zentrum) sich allseitig und am schnellsten ausbreitenden Erdwellen herstammt, — 2) diejenigen der *Hauptphase*, welche als das Produkt der vom Epizentralgebiete peripherisch auslaufenden langsameren Oberflächenwellen betrachtet werden, die größten Amplituden erlangen, um dann 3) in einer *Endphase* von nachzüglerischen Schwingungen auszutönen.

Für den Eintritt und die Dauer dieser einzelnen Phasen ergeben sich nach den Minutenmarkierungen in dem Leipziger Seismogramm des Greizer Bebens vom 1. Mai 1902 die folgenden Zeitmaße:

	Unkorrigierte seismometrische Zeitregistrierung	Korrigiert nach der Fraunhoferschen Normaluhr der Leipziger Sternwarte. (Korrekt. = $-1^m 39^s$).
Erster Einsatz	$5^h 32^m 30^s$	$5^h 30^m 51^s$
Beginn der Hauptphase . .	$5^h 32^m 39^s$	$5^h 31^m$
Ende der Hauptphase . . .	$5^h 32^m 48^s$	$5^h 31^m 9^s$
Ende des Bebens	$5^h 33^m$	$5^h 31^m 21^s$

Demnach betrug in Leipzig die Dauer der Vorphase = 9^s, der Hauptphase = 9^s und der Endphase = 12^s, diejenige der durch die Erderschütterung bewirkten Aufzeichnung insgesamt etwa 30 Sekunden.

Die Schwingungsperioden. Trotz der gewaltigen Vergrößerung der Bodenbewegung durch das Seismogramm ist es nicht möglich,

innerhalb dessen Erstreckung vom ersten Einsatz bis in die zweite Hälfte der Hauptphase die einzelnen Schwingungen von einander zu trennen, da sich diese wegen zu rascher Aufeinanderfolge und zu langsamer Fortbewegung des Registrierpapieres großenteiles gedeckt haben. Erst gegen Ende der Hauptphase sind mindestens 2 Ausschläge so scharf von einander geschieden, daß man deren *Perioden* festzustellen vermag. Im Seismogramm Figur 2 Seite 10 beträgt der gegenseitige Abstand dieser beiden Ausschläge, also die Strecke, die der Papierstreifen während einer vollen Schwingung des Schreibstiftes zurückgelegt hat, 0,6 mm. Da auf den Weg einer Minute bei 1250facher Vergrößerung eine Streifenlänge von 73 mm kommt, also auf die Minute 121, auf die Sekunde 2 derartige Schwingungen fallen würden, so entspricht obiges Maß von 0,6 mm einer Schwingungsdauer von 0,5 Sekunden. Hiermit sind in Leipzig in der zweiten Hälfte der Hauptphase im Seismogramm des Greizer Bebens Bodenwellen konstatiert, welche bei einer Entfernung des primären Schüttergebietes vom Leipziger Seismometer von etwa 70 km eine Periode von 0,5 Sekunden besitzen.

Im weiteren Verlaufe des Seismogrammes sind Messungen der Perioden der Ausschläge nicht mehr möglich.

Die *Amplituden* der Ausschläge sind ebenso wie deren Perioden in der *Vorphase* außerordentlich klein, doch machen sich in ihnen 3 Anschwellungen bemerkbar, von denen die zweite sehr wohl von dem in Netzschkau und Greiz sehr deutlich verspürten zweiten Stoße herrühren kann. Eine vierte geht unmittelbar in die Ausschläge der Hauptphase über. Die etwas stärkeren Schwingungen, welche den ersten Einsatz kennzeichnen, besitzen im Seismogramm Figur 2 eine Größe von 2 mm, also eine wirkliche Amplitude von nur 0,0016 mm, die dritte Steigerung der Minimalausschläge eine solche von 3 mm, also in Wirklichkeit von 0,0024 mm. Im Anfangsabschnitt der *Hauptphase* erlangen die Ausschläge ihre größten Amplituden mit 10,5 mm = 0,0084 mm wirklicher Größe. Im sich anschließenden zweiten Abschnitte hingegen, wo auch die Perioden meßbar sind (siehe oben) werden die Amplituden schon kleiner und betragen noch 6,5 = 0,0052 mm. In der *Endphase* schließlich erreichen die stärksten der Ausschläge kaum noch 2 mm, also 0,0016 mm wirklicher Größe.

2. (65.) Das Böhmerwald-Beben am 26. November 1902.

Hierzu das Übersichtskärtchen auf Tafel I.

In den letzten Tagen des November des vorigen Jahres berichteten verschiedene Zeitungen über ein Erdbeben, das am 26. des genannten Monates zwischen 1 Uhr und 1 Uhr 30 Minuten mittags in mehreren Orten des Böhmerwaldes und seines böhmischen Vorlandes ziemlich kräftig verspürt worden sei, Nachrichten, die durch eine gleichzeitige freundliche Mitteilung des Herrn Stadtgeologen Knett in Karlsbad bestätigt wurden. In der Tat hatte das Wiechertsche Seismometer in Leipzig zu der genannten Zeit das Seismogramm eines kleinen Bebens geliefert, dessen Epizentralgebiet damals unter Zugrundelegung von Erfahrungen bei Fernbeben auf etwa 150 km Entfernung geschätzt wurde und das sich nach Einlauf obiger Nachrichten, wenn sich auch diese Zahl als etwas zu gering ergab, nach seinem Ursprunge feststellen ließ.

Da unterdessen durch die Zeitungen bekannt wurde, daß sich jenes Beben auch an einigen Punkten des westlich angrenzenden oberpfälzischen Berglandes, ebenso aber auch, wenngleich außerordentlich viel schwächer in *Asch* geäußert habe, so lag die Vermutung nahe, daß sich seine Wellen auch noch in dem dieser Stadt nächstliegenden sächsischen Vogtlände und in dessen nordböhmischer Nachbarschaft bemerklich gemacht hätten. Diese meine Erwartung wurde durch die erbetenen Berichte der dortigen Herren Referenten der sächsischen Erdbebenkommission getäuscht. Übereinstimmend meldeten die Herren Postverwalter Renz in Brambach, Leonhardt in Schönberg, Distriktsarzt Dr. Fuchs in Bleistadt, Baumeister Wiedermann in Franzensbad, Oberlehrer Wölfel in Roßbach, Bürgerschullehrer Kayser in Adorf, Stadtarzt Dr. Bäuml in Graslitz und Professor Weise in Plauen, daß in den Bereichen ihrer Berichterstattung keinerlei, auch nicht die geringsten seismischen Äußerungen zum Bewußtsein der Bewohnerschaft gelangt seien. Gleiche Resultate ergaben die Nachforschungen unseres Herrn Referenten Dr. Alb. Schmidt in Wunsiedel bezüglich des Fichtelgebirges.

Dahingegen ging mir inzwischen durch Referate von Seiten des Herrn Dr. med. Al. Grimm in Marienbad und des Herrn

Dr. W. Petermann in Weseritz namentlich aber durch Aufsammlung von Zeitungsberichten ein ziemlich reichliches Material über den böhmischen Teil des Schüttergebietes zu. Behufs Erlangung zuverlässiger und erschöpfender Mitteilungen über das oberpfälzische Areal des letzteren wendete ich mich auf freundlichen Rat des Herrn Prof. Dr. Weinschenk in München an den Vorstand des naturwissenschaftlichen Vereines zu Regensburg Herrn Dr. med. Brunhuber. Dieser erfaßte die sich ihm bietende heimatskundliche Aufgabe mit lebhaftem Interesse und mit entsprechender Energie und Umsicht, veranlaßte die K. bayer. Kreisregierung und die K. Oberforstbehörde in Regensburg zur Verteilung von Erdbeben-Fragebogen an sämtliche Bezirksämter und Forstbeamte des oberpfälzischen Waldes, ersuchte persönlich die Vertrauensmänner seines Vereines um einschlägige Nachrichten, sah seine Bemühungen durch den Eingang einer sehr großen Zahl positiver und negativer Berichte belohnt, sichtete und stellte dieselben tabellarisch zusammen und dann mir zur Verfügung. Dem Herrn Dr. Brunhuber als dem werktätigen Mitarbeiter an dem Verfolg des Böhmerwald-Bebens sei auch an dieser Stelle der aufrichtigste Dank für seine Mühewaltung ausgesprochen.

Auf der anderen Seite wurde, wie es bei früheren sächsisch-böhmischen Erdbeben bereits mit Erfolg geschehen, auch diesmal durch das dankenswerte Entgegenkommen des Referenten der Erdbebenkommission der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien, des Herrn Stadtgeologen Knett in Karlsbad auf dem Wege des Austausches unserer beiderseitigen Listen der vom Erdbeben des 26. November betroffenen Orte eine ergänzende Förderung unserer Bearbeitung des letzteren erzielt.

So reich auch das für die vorliegende Darstellung verfügbare Unterlagsmaterial anfangs erschien, so stellte sich doch bei dessen Bearbeitung seine Unzulänglichkeit behufs peripherischer Umgrenzung des gesamten Schüttergebietes und behufs gegenseitiger Abgrenzung der Zonen von verschiedener Schütterstärke und von verschiedenartiger Form der Bodenbewegung heraus. Die auf Seite 16 bis 18 nach diesen Kriterien ausgeführte Gliederung des Schüttergebietes entbehrt deshalb, wie fast alle anderen derartigen Versuche, der genügenden Schärfe, ist vielmehr eine verschwommenere als es wohl in der Natur der seismischen Erscheinungen selbst liegt.

Zeitpunkt des Bebens. Das hier zur Darstellung gelangende Böhmerwald-Beben vollzog sich am 26. November 1902 zwischen 15 und 30 Minuten nach 1 Uhr mittags. Über den genaueren Zeitpunkt seines Eintrittes liegen zwar keinerlei zuverlässige Angaben aus dessen pleistoseismischem Schüttergebiete vor, doch dürfte sich derselbe ziemlich treffend mit Hilfe einer bereits beim Greizer Beben auf S. 6 angewandten Berechnungsweise feststellen lassen. In Leipzig trat das Beben nach seismometrischer Zeitregistrierung $13^h 18^m 46^s$ mitteleuropäischer Zeit ein (siehe S. 19). Da die epizentrale Zone des Böhmerwald-Bebens und zwar von *Roßhaupt* aus gemessen, 190 km von Leipzig entfernt liegt und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der am Seismometer den ersten Einsatz hervorbringenden Erdwellen nach Fernbeben-Erfahrungen auf im Durchschnitte 10 km in der Sekunde anzunehmen ist, so haben dieselben von ihrem Ursprungsorte in der Roßhaupter epizentralen Zone (siehe Seite 17) bis zum Leipziger Seismometer 19 Sekunden gebraucht, so daß der primäre Erdbebenstoß $13^h 18^m 27^s$ erfolgt sein muß. Eine erfreuliche Übereinstimmung mit dieser auf der Basis astronomischer Zeit berechneten Eintrittszeit des Bebens zeigt die aus *Waldsassen* erfolgte Meldung, wonach diese Stadt von den Erdbebenwellen $13^h 19^m$ Bahnzeit durcheilt worden ist.

Das makroseismische Schüttergebiet des Böhmerwald-Bebens vom 26. November 1902 (vgl. hierzu das Übersichtskärtchen auf Tafel I) beschränkt sich auf die nordwestliche Hälfte des Böhmerwaldgebirges, also auf den eigentlichen Böhmerwald oder das oberpfälzische Waldgebirge zwischen Waldsassen und der vom Regen und seinem Nebenfluß, dem Cham, benutzten Lücke des Böhmerwald-Gebirgszuges und erstreckt sich von hier aus auf dessen sanfterer, östlicher Abdachung bis in die angrenzenden Landstriche Böhmens und auf seiner steileren bayerischen Böschung bis in das östliche Bergland der Oberpfalz. Die Gegend von Neudorf südlich von Karlsbad und die von Waldsassen, begreifen die nördlichste, diejenigen von Waldmünchen, Furth und Eschlkam die südlichste Ausbreitung des Bebens, während im Westen Tirschenreuth, Floß und Tännesberg, im Osten Mies, Weseritz und Neumarkt als die am weitesten in diesen beiden Himmelsrichtungen vorgeschobenen Orte genannt werden können, an welchen sich die Erschütterung den Bewohnern noch bemerklich machte.

Das Schüttergebiet des Böhmerwald-Bebens stellt demnach eine elliptische Fläche dar, deren größere Achse dem Gebirgszuge fast parallel verläuft und etwas über 90 km mißt, während die kürzere, ostwestlich zwischen Mies und Floß etwa 55 km Länge hat, so daß das makroseismische Schütterareal des Bebens gegen 4000 km² Flächeninhalt besitzen dürfte. Nach dem Stärkegrade der Erschütterung in manchen der obige Umgrenzung markierenden Orte zu schließen, dehnte sich jedoch das Gebiet der makroseismischen Erbebung peripherisch noch weiter aus, wo aber die seismischen Schwingungen derart an Intensität verloren, daß ihr Eintritt die Aufmerksamkeit der Bewohnerschaft nur noch ausnahmsweise zu erregen vermochte, wie dies in der etwa 25 km nach NNW vorgeschobenen Stadt *Asch* der Fall war, während aus den zwischenliegenden Orten, z. B. Eger und Franzensbad, trotz des erlassenen Zeitungsaufrufes und persönlicher Anfragen keine positiven Nachrichten zu erzielen waren.

Das Gebiet *kräftiger Erschütterung* nimmt ungefähr den zentralen Teil des gesamten Schüttergebietes ein und läßt sich durch eine Linie umschreiben, welche von Tachau im Norden aus in südwestlicher Richtung nach Waldthurn, von hier aus nach SO über Eslarn, Stadlern und Schwarzach und dann über Neustadt und Haid zurück nach Tachau verläuft, aber naturgemäß keine scharfe Grenze bezeichnet, sondern vielfache Undulationen erleidet. Diese gesamte Fläche gehört durchaus dem Gneiß- und Granitgebiete des eigentlichen Böhmerwaldes an. Auffälligere Dislokationen, mit welchen das Erdbeben in genetischem Zusammenhang stehen könnte, verzeichnet die Gümbelsche geologische Karte jenes Gebirgslandes nicht.

Innerhalb des soeben umschriebenen Areales intensiver Erschütterung hebt sich wiederum eine Zone ab, in der sich die letztere durch einen merklich höheren Stärkegrad vor der des angrenzenden Gebietes auszeichnet. In ihr vollzieht sich das Beben in Form *eines einzigen Stoßes*, der von dröhnendem Donner begleitet und allgemein wahrgenommen wird. Häuser erzittern von ihren Grundfesten bis zum Giebel, Fenster klirren, Küchengeschirr, Gläser, Öfen, Türen klappern, Bilder schwanken an den Wänden, Tische und Betten bewegen sich sichtlich, leichte Gegenstände, selbst Stühle und Bänke werden verschoben, unverschlossene Stuben- und Schranktüren öffnen sich, Ziegelbrocken fallen von Schornsteinen (Pfraumberg), der Mörtel von Zimmerwänden be-

kommt Sprünge (Pfraumberg), eine Mauer in Neuhäusel klaffende Risse. Die Bewohner werden von Schrecken erfaßt, manche glauben ein Teil des Hauses sei eingestürzt, aus vielen Behausungen laufen die Bewohner auf die Straße. Haustiere zeigen große Beängstigung. Hier und da wird der Stoß im Freien bemerkt, lokal zittert dann der Erdboden so stark, daß sich die Leute geschüttelt fühlen (bei Neukirchen und Leßlohe).

Die Gesamtheit dieser Erscheinungen dürfte dem Stärkegrad 5 der Rossischen Skala entsprechen. Dem Gebiete derselben gehören die Ortschaften *Pfraumberg*, *Wusleben*, *Roßhaupt*, *Neuhäusel*, *Neulosimthal*, *Neudorf* (auf der bayerisch-bömischen Grenze), *Neukirchen*, *Georgenberg*, *Leßlohe*, *Neuenhammer* und *Waidhaus* an. Dieselben verteilen sich auf eine Zone, welche den Böhmerwald etwas nördlich der Halbierungslinie seiner Längserstreckung in ostwestlicher Richtung durchquert und das pleistoseismische Areal des Schüttergebietes repräsentiert.

In etwas geringerem Grade äußern sich die gleichen Erdbebenerscheinungen und zwar ebenfalls noch in Form eines einzigen, ziemlich allgemein wahrgenommenen Stoßes, der Häuser erzittern, Fenster klirren, Fensterläden klappern, Bilder schwanken macht und die Bewohner heftig erschreckt, in den unmittelbar angrenzenden Landstrichen u. a. mit den Orten *Neustadt*, *Haid*, *Zetlich*, *Langendörflas*, *Tachau*, *Waldthurn*, *Burkhardtsrieth*.

In dem Berglande außerhalb dieser nur sehr undeutlich umschriebenen beiden sukkussorischen Gebiete nimmt das Beben statt eines einzigen von Zittern gefolgten Stoßes die Form von 2, 3, oder 4, mehrere Sekunden dauernden *wellenförmigen Bodenbewegungen* an und wirkt hier zunächst noch so kräftig, daß es sich in ziemlich vielen Häusern der Ortschaften, so z. B. von *Flossenburg*, *Pfrentsch*, *Eslarn*, *Eisendorf*, *Schönsee*, *Pullenried*, *Stadlern*, *Schwarzach*, an deren Erzittern, am Auf- und Abschwanken des Fußbodens, dem Klirren der Fenster, am Klappern von Geschirr und Türen, am Pendeln von Bildern bemerklich macht und die Bewohner in lebhaften Schrecken versetzt, der manche von ihnen aus ihrer Wohnung auf die Straße treibt. In Eslarn ist die erste wellenförmige Bewegung die längere, zwischen ihr und der kürzeren zweiten liegt eine Ruhepause von 1 bis 2 Sekunden.

Auch *im Freien* werden diese Erschütterungen nebst begleitendem Donnerrollen lokal recht empfindlich wahrgenommen und zwar in einem Stärkegrade, der ebenso wie in manchen

Ortschaften selbst, in größerer Höhenlage beträchtlicher ist, als an tiefer gelegenen Punkten. So spielten sich im Eslarner Forste in 580—600 m Meereshöhe so starke Bodenbewegungen ab, daß dort angestellte Holzhauer fürchteten, ihre am Feuer stehenden Kochgeschirre würden umstürzen, während die in geringeren Höhen beschäftigten Arbeiter nur schwache derartige Erscheinungen verspürten.

In den übrigen mehr peripherischen Arealen des Schüttergebietes schwächt sich die Intensität des Bebens mehr und mehr ab, sodaß dasselbe schließlich nur noch von ganz vereinzelten Bewohnern beobachtet wird. Im Norden des Schüttergebietes werden in *Weseritz* schaukelnde Bewegungen wahrgenommen, unter denen Fenster, Öfen und Stühle erzittern (Ref. Herr W. Petermann). In *Marienbad* bemerken einzelne Personen eine kurze, von S nach N gerichtete, mit schwachem Geräusch verbundene Erderschütterung und leichtes Klirren von Glasgeschirr, während Wanduhren und Bilder unberührt bleiben und die Heilquellen keinerlei Beeinflussung zeigen (Ref. Herr Dr. med. A. Grimm). In *Mähring* werden ebenfalls die Zimmer und ihr Inhalt nur in leichtes Zittern versetzt. In *Tirschenreuth* und in dem noch weiter nach N gelegenen *Waldsassen* wird eine schwach wellenförmige Bewegung verspürt, welche an letztgenanntem Orte eingeleitet wird durch ein erst schwaches, dann beim Näherkommen sich verstärkendes unterirdisches Donnerrollen. In der vom übrigen Schüttergebiete ganz isolierten, weit nach N vorgeschobenen Stadt *Asch* wird von Bewohnern der auf Fels gebauten Häuser ein länger andauerndes Rollen und Zittern bemerkt (Ref. Herr Direktor Alberti), während andere eine schwächere und dann eine stärkere Wellenbewegung des Bodens beobachtet haben wollen. Die Zeitungsnachricht, daß sich ähnliche sehr schwache seismische Erscheinungen auch in dem sächsischen Grenzorte *Oberreuth* fühlbar gemacht hätten, hat sich nach einer dortselbst vom Gemeindevorstand veranstalteten Umfrage nicht bestätigt.

Einer der südlichsten Orte, aus denen über das Beben vom 26. November berichtet wurde, ist *Waldmünchen*. Auch hier wurde die Bewegung nur sehr schwach und zwar als von N kommend empfunden; der Stubenboden vibrierte und aus Sprüngen der Wände eines Zimmers fielen einige kleine Stückchen Kalk herab. Rasselndes Gepolter begleitete die Erschütterung.

B. Das Leipziger Seismogramm des Böhmerwald-Bebens.

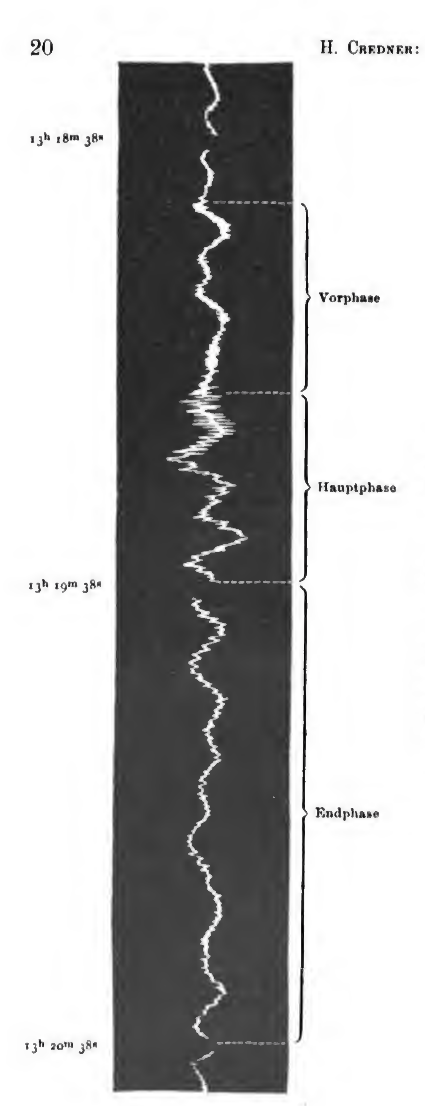
Auch das Seismogramm des Böhmerwald-Bebens läßt in seiner 1250fachen Vergrößerung der Bodenbewegungen (Figur 3) 3 Abschnitte: Vorphase, Hauptphase und Endphase unterscheiden, von denen auch diesmal die beiden ersten unmerklich in einander übergehen, während die Endphase in die chronischen Bodenerzitterungen verläuft. In der Vorphase sind die Perioden und Amplituden der Ausschläge minimal, in der Hauptphase gewinnen beide ziemlich unvermittelt beträchtlich an Größe, um dann bis zum Ende des Bebens ganz allmählich wieder abzunehmen.

Die Zeitpunkte des Beginnes und der Endschaft dieser 3 Phasen sind aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich:

	Unkorrigierte seismometrische Zeitregistrierung	Korrigiert in mitteleuropäische Zeit nach der Fraunhoferschen Normaluhr der Leipziger Sternwarte (Korrektur = + $1^m\ 38^s$).
Erster Einsatz	$13^h\ 17^m\ 8^s$	$13^h\ 18^m\ 46^s$
Beginn der Hauptphase . .	$13^h\ 17^m\ 34^s$	$13^h\ 19^m\ 12^s$
Ende der Hauptphase . . .	$13^h\ 18^m$	$13^h\ 19^m\ 38^s$
Ende des Bebens	$13^h\ 19^m$	$13^h\ 20^m\ 38^s$

Danach betrug in Leipzig die Dauer der Vorphase 26 Sekunden, der Hauptphase ebenfalls 26 Sekunden und der Endphase etwa 60 Sekunden, also diejenige des ganzen Bebens ungefähr $1^m\ 52^s$.

Die *Schwingungsperioden.* Die in dem Seismogramm Fig. 3 zum Ausdruck gelangenden Bewegungen des Untergrundes von Leipzig erfolgen während der ganzen, 26 Sekunden langen Vorphase so rasch, daß sie sich nicht scharf von einander trennen lassen, daß also ihre Perioden unmeßbar bleiben. Mit dem Beginn aber der Hauptphase verlängert sich die Periode der Einzelausschläge direkt auf 0,42 bis 0,58 Sekunden (vergl. S. 12), infolge dessen sich die Einzelbewegungen bei ihrer Aufzeichnung scharf gegen einander abheben. Im weiteren Verlaufe der Hauptphase wachsen die Perioden um noch etwas, nämlich auf 0,6 bis 0,8 Sekunden an. Bald machen sich jedoch die chronischen Tageserzitterungen störend bemerkbar, indem sie sich den all-



Figur 3. Das von dem Wiechertschen Pendelseismometer zu Leipzig registrierte Seismogramm des Böhmerwald-Bebens vom 26. November 1902 von $13^h\,18^m\,46^s$ bis $13^h\,20^m\,38^s$ in 1250facher Vergrößerung der wirklichen Bodenbewegungen.

Die 3 Unterbrechungen der seismogrammatischen Linie waren die Markierungen der Minuten $13^h\,17$, $13^h\,18$ und $13^h\,19$ durch die mit dem Seismometer verbundene Uhr, welche aber in mitteleuropäische Zeit umgerechnet worden sind (vergl. Seite 19).

mählich schwächer werdenden seismischen Wellen überordnen und hierdurch bewirken, daß in der Endphase der Abschluß der seismischen Aufzeichnung nicht scharf zu erkennen ist.

Die Amplituden. Die Vorphase des Seismogrammes vom Böhmerwald-Beben besteht in dem 1250fach vergrößerten Seismogramm Figur 3 aus Erzitterungen von im Höchstfalle 2,75 mm, was einer tatsächlichen Bewegung des Untergrundes von 0,002 mm entspricht. Die Amplituden dieser minimalen Ausschläge nehmen dreimal zu und ab, ohne daß sich jedoch die letzteren scharf von einander abheben. Mit dem vierten Anschwellen, dem Eintritt der Hauptphase, werden die Perioden länger, so daß sich die jetzt auch intensiveren Bewegungen der Schreibnadel in Einzelausschläge auflösen. Die Amplitude derselben ist im Anfangsabschnitte der Hauptphase am größten und beträgt im Seismogramm 7 mm, in Wirklichkeit 0,0056 mm. Im nächsten Teile der Hauptphase, wo sich die längsten Perioden einstellen, haben sich die Amplituden schon auf 5—6 mm, also auf 0,004 mm wahrer Größe verkürzt.

Vergleicht man das Seismogramm des Böhmerwald-Bebens mit demjenigen des Greizer Bebens (Fig. 2 S. 10), so tritt bereits bei diesen beiden Nahbeben die Erscheinung mit größter Deutlichkeit vor Augen, daß mit wachsender Entfernung vom epizentralen Schüttergebiete 1) der Beginn der Hauptphase immer mehr vom ersten Einsatz des Bebens abrückt, 2) gleichzeitig die Dauer der Schwingungsperioden der Hauptphase zunimmt. So betrug der Zeitabstand des Einsatzes der Vorphase bei dem in nur 70 km von Leipzig entstandenen Greizer Beben von dem der Hauptphase im Leipziger Seismogramm 9 Sekunden, derjenige aber bei dem Böhmerwald-Beben, dessen Weg sich auf 190 km belief, bereits 26 Sekunden. Während sich ferner die einzelnen Ausschläge der Hauptphase des Greizer Bebens anfänglich wegen Kürze ihrer Perioden decken und erst im zweiten Abschnitte dieser Phase einige wenige derselben 0,5 Sekunden Dauer erlangen, haben sich die Schwingungen der Hauptphase des Böhmerwald-Bebens gleich von Anfang an in dem Leipziger Seismogramm individualisiert und erreichen allmählich ein Maximum von 0,8 Sekunden. Hierdurch gestaltet sich die Aufzeichnung des Böhmerwald-Bebens offner und weitläufiger und hat sich, zugleich durch die Verlängerung der Vorphase, mehr in die Länge gezogen.

Druckfertig erklärt 15. II. 1903.]

Die von Wiecherts astatischem Pendelseismometer in der Zeit vom 15. Juli bis 31. Dezember 1902 in Leipzig gelieferten Seismogramme von Fernbeben.

Mit Tafel II.

Von

Franz Etzold.

Im folgenden sind diejenigen Seismogramme von Fernbeben (Teleseismogramme) tabellarisch zusammengestellt und kurz beschrieben worden, welche Wiecherts astatisches Pendelseismometer in *Leipzig* vom 15. Juli bis 31. Dezember 1902 geliefert hat. Wie im ersten die Seismogramme vom 28. März bis 15. Juli 1902 behandelnden Berichte[1]) wurden auch diesmal bloß diejenigen Aufzeichnungen berücksichtigt, deren seismische Natur unverkennbar ist, während alle Registrierungen, deren Charakter durch sonstige Störungen des Apparates stark verwischt worden ist, keine Aufnahme gefunden haben. Das Seismometer selbst hat in diesen $5\frac{1}{2}$ Monaten keinerlei Reparatur bedurft, doch ist diese Zeit insofern nicht ohne Störung seiner Leistungen vorübergegangen, als sich eine Auswechselung des Triebwerkes für die Papierstreifen notwendig machte und als der Regulator einige Male einer Reparatur bedurfte.

Charakteristik der in nachstehender Tabelle aufgeführten Seismogramme. (S. 24 u. 25.)

I.

28. Juli $0^h\,38^m\,8^s$ bis $0^h\,45^m$.

Von beiden Komponenten wurde eine in unregelmäßiger Weise anschwellende und allmählich sich wieder ausglättende

1) Vergl. diese Berichte 1902, 283—326.

Zickzacklinie aufgezeichnet. Ein scharfer erster Einsatz fehlt. Die Aufzeichnung erinnert sehr an die des südfranzösischen Bebens vom 6. Mai 1902.[1])

Zu entsprechender Zeit wurde in Oberitalien ein Erdbeben verspürt und in den italienischen Warten sowie von den dreifachen Horizontalpendeln zu Straßburg und Hamburg aufgezeichnet.[2]) Wie diese letzteren, so wurde also auch das Wiechertsche Seismometer zu Leipzig durch die von der Lombardei ausgehenden seismischen Wellen in Tätigkeit gesetzt.

2. und 3.

3. August $17^h 58^m$ und $18^h 7^m 30^s$ bis $19^h 15^m$.

Das Seismogramm unterscheidet sich dadurch scharf von allen bis dahin erhaltenen, daß von beiden Komponenten zwei sehr kräftige, durch ein Zeitintervall von $9\frac{1}{2}$ Minuten getrennte Erderschütterungen aufgezeichnet worden sind, denen aber keinerlei deutliche Hauptphase folgt, obwohl $1\frac{1}{4}$ Stunde lang leichte Kräuselungen und vereinzelte, flache Wellen die Erschütterung der Erde bezeugen.

Die erste Erbebung zeichnete sich innerhalb 70 Sekunden in Form von etwa 55 Ausschlägen von nahezu gleicher Stärke auf. Die zweite Erschütterung wurde von der Ostwestkomponente in Form leichter, sich allmählich abschwächender Ausschläge notiert, beginnt hingegen bei der Aufzeichnung der Nordsüdkomponente mit einem kräftigen Ausschlag, der die Nadel erst 4 mm nach Westen und dann ruckartig um 8 mm in entgegengesetzter Richtung bewegt. Diesem energischen Anstoß folgen fünf minder kräftige, bevor auch von der Nordsüdkomponente eine ebenso leichte Zickzacklinie aufgezeichnet wird wie von der Ostwestkomponente.

Da sich die Registrierungen beider Komponenten der ersten Erschütterung sehr ähneln, bei der zweiten aber in höchst auffälliger Weise sich unterscheiden, so ist anzunehmen, daß die Schütterzentren nicht zusammenfallen, sondern im Gegenteil sehr weit von einander entfernt sind, daß also mit andern Worten

---

1) Diese Berichte 1902, p. 307 u. Taf. I Fig. 3 u. 4.

2) Vgl. den Julibericht der Kais. Hauptstation für Erdbebenforschung zu Straßburg.

Tabellarische Übersicht über die von Wiecherts astatischem Pendelseismometer vom 15. Juli bis 31. Dezember 1902 in Leipzig gelieferten Seismogramme von Fernbeben.

Nr	Datum	Beginn in M. E. Z. der			Ende der Aufzeichnung	Geradliniges Maß der größten Amplituden in mm während der						Epizentrales Gebiet
		1. Vorphase	2. Vorphase	Hauptphase		1. Vorph.		2. Vorph.		Hauptph.		
						NS-Komponente	OW-Komponente	NS-Komponente	OW-Komponente	NS-Komponente	OW-Komponente	
1.	28. Juli	$0^h\ 38^m\ 8^s$	—	$0^h\ 41^m\ 18^s$	$0^h\ 45^m$ —^{s}	—	—	—	—	0,75	1,25	Ober-Italien
2.	3. Aug.	$17^h\ 58^m$ —^{s}	—	—	ca. $19^h\ 15^m$	3	2	—	—	0,50	0,25	
3.	3. Aug.	$18^h\ 7^m\ 30^s$	—	—		9	1	—	—	0,50	0,25	
4.	4. Aug.	—	—	$23^h\ 38^m\ 22^s$	ca. $23^h\ 44^m$	—	—	—	—	0,50	0,25	Ober-Italien (Massa, Carrara, Pisa etc.), Portugal (Leiria).
5.	22. Aug.	$4^h\ 8^m\ 1^s$	$4^h\ 9^m\ 58^s$	$4^h\ 23^m$ —^{s}	ca. $6^h\ 25^m$ —^{s}	5,5	5,5	55	75	165	191	Ost-Turkestan (Kaschgar)
6.	22. Aug.	$5^h\ 17^m\ 8^s$	—	ca. $5^h\ 32^m$ —^{s}		—	—	—	—	72	122	
7.	23. Aug.	—	—	$14^h\ 18^m\ 54^s$	$14^h\ 35^m$ —^{s}	—	—	—	—	3,5	2	
8.	24. Aug.	—	—	ca. $3^h\ 12^m$ —^{s}	ca. $3^h\ 40^m$ —^{s}	—	—	—	—	1	0,3	
9.	30. Aug.	$22^h\ 56^m\ 40^s$	$23^h\ 7^m\ 10^s$	$23^h\ 15^m\ 10^s$	31. August $0^h\ 20^m$ —^{s}	2,5	3	2	1,5	56	39	Turkestan (Taschkent)
10.	6. Sept.	—	—	$0^h\ 11^m\ 40^s$	$0^h\ 16^m\ 40^s$	—	—	—	—	1	1	Larissa (Griechenland)

11.	8. Sept.	—	—	$3^h\ 23^m\ 40^s$	$3^h\ 25^m\ 50^s$	—	—	—	—	0,25	0,25	Pyrenäen (Pau, St. Sebastian, Saragossa)
12.	22. Sept.	$3^h\ 1^m\ 53^s$	$3^h\ 11^m\ 31^s$	$3^h\ 30^m$ —^{s}	$5^h\ 30^m$ —^{s}	7,5	3	41	18	21	22	Philippinen?
13.	23. Sept.	$21^h\ 31^m\ 50^s$	$21^h\ 42^m\ 30^s$	22^h —^{m} 15^s	24. Sept. $0^h\ 11^m$ —^{s}	8	9	59	79	80	68	Guatemala, British Honduras
14.	2. Okt.	$18^h\ 57^m\ 12^s$	—	—	20^h	0,5	0,5	—	—	—	—	
15.	6. Okt.	$9^h\ 20^m\ 10^s$	—	$9^h\ 33^m\ 51^s$	ca. 10^h	—	15?	—	—	23	14	Russisch Zentral-Asien (Neu Margljan)
16.	25. Okt.	$22^h\ 48^m\ 38^s$	—	—	$22^h\ 54^m$ —^{s}	2	1,5	—	—	—	—	Bosnien
17.	4. Nov.	—	—	gegen 10^h	—	—	—	—	—	6	1,5	
18.	14. Nov.	—	—	$22^h\ 44^m\ 40^s$	$22^h\ 50^m$ —^{s}	—	—	—	—	1	0,5	
19.	20. Nov.	$21^h\ 46^m\ 45^s$	$21^h\ 57^m$ —^{s}	ca. $22^h\ 28^m$ —^{s}	$23^h\ 30^m$ —^{s}	6	5,5	2,5	—	3	1,5	
20.	21. Nov.	$8^h\ 15^m\ 30^s$	$8^h\ 26^m\ 20^s$	$8^h\ 44^m$ —^{s}	$9^h\ 59^m$ —^{s}	1,5	0,5	4	1,5	7	7	
21.	23. Nov.	—	—	$21^h\ 32^m$ —^{s}	$21^h\ 39^m$ —^{s}	—	—	—	—	1	0,3	
22.	13. Dez.	—	$0^h\ 32^m\ 40^s$	$0^h\ 48^m\ 20^s$	$1^h\ 35^m$ —^{s}	—	—	2,5	—	5,5	2	
23.	13. Dez.	$18^h\ 17^m\ 30^s$	$18^h\ 25^m\ 20^s$	$18^h\ 42^m\ 20^s$	$19^h\ 20^m$ —^{s}	0,5	1	6,5	1	7	2	
24.	16. Dez.	$6^h\ 14^m\ 12^s$	$6^h\ 20^m\ 17^s$	$6^h\ 29^m\ 2^s$	$7^h\ 35^m$ —^{s}	0,5	0,5	1,5	2	44	16	Russisch Turkestan (Andischan, Aschabad)
25.	16. Dez.	$7^h\ 1^m$ —^{s}	—	$7^h\ 16^m$ —^{s}		—	—	—	—	8	6	
26.	28. Dez.	ca. $2^h\ 54^m$ —^{s}	—	$3^h\ 8^m\ 20^s$	ca. $3^h\ 50^m$ —^{s}	—	—	—	—	53	20	Sibirien, Gouvernement Tomsk (Bijsk)
27.	30. Dez.	$6^h\ 8^m\ 32^s$	—	$6^h\ 23^m\ 38^s$	ca. $6^h\ 35^m$ —^{s}	—	—	—	—	6	2	

zwei ganz verschiedene Erdbeben kurz nach einander aufgezeichnet wurden.

Pendel ohne Dämpfung haben nach dem Bericht der Kais. Hauptstation für Erdbebenforschung in Straßburg beide Beben nicht auseinander zu halten vermocht.

4.

4. August $23^h 38^m 22^s$ bis $23^h 44^m$.

Eine Aufzeichnung wie Nr. 1, nur sind die Schwingungen hier noch schwächer. Das epizentrale Gebiet des zugehörigen Bebens ist im Süden, bez. Südwesten zu suchen. Es wurden nämlich zu gleicher Zeit (11 Uhr 35^m Nachts) in Carrara, Massa, Genua, Pisa Erdstöße verspürt, ebenso aber auch ein solcher von ansehnlicher Stärke in Leiria (Portugal) wahrgenommen.

5.

Beben von Kaschgar.

22. August. Erster Einsatz $4^h 8^m 1^s$.

(Tafel II).

Dieses Seismogramm ist das gewaltigste, welches bis jetzt in Leipzig erhalten worden ist. Es wurde im allgemeinen von der Ostwestkomponente etwas stärker aufgezeichnet und beginnt hier (siehe die Tafel) mit einer Reihe kurzperiodiger, rasch zunehmender und durch Interferenzen vielfach gestörter Ausschläge (E_1), welche nach 2 Minuten bereits in eine Gruppe von Schwingungen (V_1) übergehen, innerhalb deren im Verlauf einer Minute die Amplituden auf 75 mm anschwellen und ebenso rasch wieder abnehmen. Der Aufzeichnung einer größeren Anzahl von ziemlich scharfen, denen des ersten Einsatzes gleichenden Ausschlägen folgt weiterhin, 7 Minuten nach dem Beginn, eine schwächere Gruppe von Schwingungen (V_2) mit im Höchstfalle 45 mm Amplitude und diesen wiederum eine Anzahl von zackigen Ausschlägen mit abnehmender Intensität, welche 10 Minuten nach dem ersten Einsatz unvermittelt in langsame kräftige Schwingungen (V_3) übergehen, die durch interferierende Wellen stark gestört erscheinen. Die Periode dieser Schwingungen mag im Mittel 8 bis 10 Sekunden Länge besitzen. Der fünf Minuten andauernde unregelmäßige Wellenzug endet mit einer Gruppe

ungestörter Schwingungen (V_4), innerhalb deren die Amplituden rasch auf 130 mm ansteigen, um ebenso schnell wieder abzunehmen.

$4^h 23^m$ beginnt die eigentliche Hauptphase (H_1) mit fünf Schwingungen, deren Perioden bis auf 20 Sekunden und deren Amplituden bis zu 110 mm ansteigen, und setzt sich dann für nahezu 10 Minuten aus Schwingungen zusammen, die durch Interferenzen stark gestört sind, aber Amplituden aufweisen, welche bis zu dem enormen Betrag von 191 mm anwachsen. Während dieser außerordentlich kräftigen Aufzeichnung hat sich der Nullpunkt des Pendels so weit verlegt, daß der Schreibstift in der Ruhelage, von der vorhergehenden Stundenlinie statt um 4 mm um deren 11 abgerückt ist.

Die Hauptphase geht in die Endphase (EP) über, indem allmählich schwächer, kürzer und unregelmäßiger werdende Gruppen von Schwingungen durch ebenso allmählich an Länge zunehmende Pausen unterbrochen werden, innerhalb deren der Schreibstift nur leichte, ziemlich langperiodige, unregelmäßige Wellen aufgezeichnet hat; bis schließlich in den letzteren die seismische Erregung ausklingen zu wollen scheint. Noch erreichen jedoch diese unregelmäßigen Wellen Amplituden von mehreren (bis 4) Millimetern Breite, als sich ihnen

6.

$5^h 17^m 8^s$

die Ausschläge des ersten Einsatzes (E_2) einer zweiten starken Erschütterung überzuordnen beginnen. Der Anfangsteil des Seismogramms dieses ebenfalls gewaltigen Bebens hat naturgemäß durch die ausklingenden Wellen des eben zur Registrierung gelangten erheblich gelitten und leider fiel auch der Beginn der Hauptphasen beider in die gleiche Höhe der Papierstreifen, so daß es schwer wurde, die von dem zweiten Beben verursachten Schwingungen von denen des ersten abzutrennen und für sich zu verfolgen.

Das zweite Seismogramm gleicht im allgemeinen dem eine Stunde vorher aufgezeichneten außerordentlich, nur sind bei ihm die einzelnen Abschnitte wesentlich schwächer entwickelt. In den Vorphasen werden die Gruppen sehr kräftiger Schwingungen vermißt, sie scheinen aber doch durch einzelne, sich in annähernd den nämlichen Abständen wie bei jenem Seismogramm bemerkbar

machende, kräftigere Wellen wenigstens angedeutet zu sein. Zwischen den Vorphasen und der Hauptphase findet sich auch beim zweiten Seismogramm keine scharfe Trennung, und in der Hauptphase (H_2) selbst kehren die vom ersten Seismogramm erwähnten Interferenzen wieder, die Amplituden aber erreichen hier im Höchstfalle nur den Betrag von 122 mm.

Nach alledem muß angenommen werden, daß das an zweiter Stelle aufgezeichnete Beben von dem nämlichen Herd ausging, in dem der erste seismische Paroxysmus stattfand oder daß, falls die Herde getrennt waren, beide doch zum mindesten derselben Schüttergegend angehören.

Zu der der Aufzeichnung der beiden Seismogramme 5 und 6 entsprechenden Zeit, wurde das 5100 km entfernte Kaschgar und seine Umgebung (Ostturkestan) von außerordentlich heftigen Erdstößen heimgesucht, welche ganze Ortschaften vernichteten und Hunderten von Menschen das Leben kosteten. Nach dortiger Ortszeit haben diese verheerenden Stöße 8^h 15^m begonnen, so daß der kausale Zusammenhang zwischen ihnen und den Leipziger Seismogrammen keinem Zweifel unterliegen kann. Anfänglich war es, wie bereits erwähnt, unmöglich, diesen Zusammenhang an den Seismogrammen nachzuweisen, da deren Hauptphasen sich nicht von einander trennen und jede für sich überblicken ließen. In der Ruhelage nämlich befindet sich der Schreibstift des Seismometers nur 4 mm von der Linie entfernt, die er in der vorhergehenden Stunde gezeichnet hat. Da nun die bis 122 mm breiten Ausschläge im Anfang der Hauptphase des zweiten Bebens sich in der Mitte zwischen V_3 und V_4 des ersten Seismogramms befinden, so erhellt, daß die gewaltigen Schwingungsaufzeichnungen der Hauptphasen beider Seismogramme sich vielfach fast decken.

Klarheit über die Seismogramme wurde erst bei Anfertigung der beigegebenen Tafel II gewonnen. Dieselbe wurde hergestellt, indem direkt von dem berußten Papierstreifen zwei photographische Abzüge gemacht und auf dem einen unter ständiger Benutzung der Lupe nur die Linien des ersten Seismogrammes, auf dem andern nur die des zweiten Seismogrammes mit der Feder nachgezeichnet wurden. Hierdurch wurde es möglich, beide Seismogramme beliebig weit von einander abzurücken und zum Zwecke der Herstellung von Tafel II photolithographisch zu vervielfältigen.

In deutlichster Weise hat das Wiechertsche astatische Pendelseismometer aufgezeichnet, wie sich die leichten Ausschläge des ersten Einsatzes vom zweiten Beben (E_2) den langsamen Wellen der Endphase des ersten überordnen. Es verdient dies ausdrücklich hervorgehoben zu werden, da nach dem Bericht der Kaiserlichen Hauptstation für Erdbebenforschung zu Straßburg für den Monat August 1902 die dort fungierenden Seismometer ohne Dämpfung das Auseinanderhalten beider seismischen Ereignisse nicht gestatteten.

7.

23. August 14^h 18^m 54^s bis 14^h 35^m.

Es haben sich gleichmäßige, auf ein Fernbeben zu beziehende Wellenzüge aufgezeichnet. Ein erster Einsatz ist nicht erkennbar, weil gleichzeitig ein ferner Sturm sowie die gewöhnlichen Tageserzitterungen die Schreibnadeln beeinflußten.

8.

24. August ca. 3^h 12^m bis 3^h 40^m.

Einige Züge von leichten Sinuswellen.

9.

30. August 22^h 56^m 40^s bis 31. August 0^h 20^m.

Der erste Einsatz ist bei beiden Komponenten ziemlich gleich, aber nicht kräftig, ihm folgt nach 2 Minuten augenscheinlich eine zweite stärkere Erschütterung. Die Hauptphase der Nordsüdkomponente ist wesentlich kräftiger aufgezeichnet als die der Ostwestkomponente und beginnt dort mit einer Reihe bald stärkerer, bald schwächerer, allmählich zunehmender Schwingungen, denen einige ziemlich regelmäßige Wellenzüge folgen, innerhalb deren die Amplituden bis auf 55 mm anschwellen und langsam wieder abnehmen. Der Endabschnitt besteht aus unregelmäßigen, leichten Wellen.

Das Beben, welches dieses Seismogramm lieferte, dürfte zu dem Bebenschwarm gehören, der am 22. August in Ostturkestan seinen Anfang nahm, und etwa bis zum 3. September dauerte. Für den 30. August dürfte im speziellen ein aus Taschkent gemeldeter starker Stoß in Frage kommen.

10.

6. September 0^h 11^m bis 0^h 16^m.

Einige leichte unregelmäßige Wellenzüge, die vielleicht von dem heftigen Beben herrühren, welches gegen Mitternacht in Larissa (Griechenland) verspürt wurde.

11.

8. September 3^h 23^m 40^s bis 3^h 25^m 50^s.

Die einzelnen Schwingungen der nach Art der Seismogramme 1 und 3 aufgezeichneten Zickzacklinie besitzen so kleine Amplituden (im Höchstfalle 0,25 mm), daß man die Lupe zu Hilfe nehmen muß, um den seismischen Charakter der Aufzeichnung zu erkennen. Alsdann läßt sich deutlich wahrnehmen, daß auf der abgegrenzten Strecke die Perioden länger als die der ständigen Erzitterungen sind und die Amplituden unregelmäßiger als die der letzteren.

Der Herd des Bebens, dessen Wellen sich in der beschriebenen Weise eben noch in Leipzig aufgezeichnet haben, ist in den Pyrenäen zu suchen, wo in der Nacht zum 8. September um $2\,{}^1/_2$ Uhr sowohl in dem französischen Städtchen Pau wie in den spanischen Städten Saragossa und St. Sebastian stärkere Erderschütterungen verspürt wurden.

12.

22. September 3^h 1^m 53^s bis 5^h 30^m.

Der erste Einsatz beginnt mit leichten Erzitterungen, die allmählich anschwellen und sich nach 4 Minuten zu 8 kräftigen scharfen Ausschlägen steigern. Den 2. Einsatz leitet auf dem Streifen der Nordsüdkomponente ein Zug starker regelmäßiger Wellen ein, dem drei schwächere und weniger regelmäßige folgen. Die Hauptphase wird im Beginn durch unregelmäßige Wellen mit sehr langen Perioden, aber nicht besonders großen Amplituden charakterisiert. Im zweiten Teil der Hauptphase wachsen die Amplituden zwar etwas, erreichen aber bei weitem nicht das Maß derer in der zweiten Vorphase. Auf dem Streifen der Ostwestkomponente sind die Vorphasen viel weniger kräftig entwickelt, insbesondere macht sich in der zweiten Vorphase nur eine Wellengruppe bemerklich; dahingegen sind die langen Wellen

im Beginn der Hauptphase ziemlich regelmäßig und wachsen die Amplituden im Endabschnitt der Hauptphase über das Maß derer der Nordsüdkomponente hinaus. Nach dem Ende des ganzen Seismogramms hin erscheinen auffallend regelmäßige und schöne Züge von sinusartigen Wellen.

Das Erdbeben, welches dieses Seismogramm aufzeichnete, dürfte sein epizentrales Gebiet in Ostindien gehabt haben, wenigstens wurden in jenen Tagen, wenn auch ohne genauere Zeitangabe, Nachrichten über verheerende Erdstöße von den Philippinen nach Europa gesandt.

13.

23. September $21^h\ 31^m\ 50^s$ bis 24. September $0^h\ 11^m$.

Dieses Seismogramm gleicht bis ins Einzelnste demjenigen, welches von dem Guatemalabeben am 19. April 1902 hier in Leipzig erhalten wurde.[1]) Dieselben Unterschiede zwischen den Aufzeichnungen der beiden Komponenten, dieselben auffallend langen Wellen in der zweiten Vorphase, dieselben Interferenzen namentlich im Anfangsteil der Hauptphase sind hier zu konstatieren, wie sie von dem Seismogramm aus dem Monat April beschrieben wurden; der einzige Unterschied besteht darin, daß die Amplituden bei letzterem kleiner waren, als sie bei dem Seismogramm vom 23. September sind. Bei dieser großen Übereinstimmung der Seismogramme war zu erwarten, daß beide auf das nämliche epizentrale Gebiet zu beziehen waren und tatsächlich ist, wie am 19. April, so auch am 23. September Guatemala von einem schweren Erdbeben heimgesucht worden. Die Erfahrung Belars[2]) und Schlüters[3]), daß von denselben Ausgangspunkten herrührende Seismogramme sich gleichen, findet somit durch den vorliegenden Fall eine weitere Bestätigung.

14.

2. Oktober $18^h\ 57^m\ 12^s$ bis ca 20^h.

Auf der wegen eines starken örtlichen Windes sehr unruhigen Linie machen sich die leichten zackigen Ausschläge des ersten

1) Vergl. diese Berichte 1902, p. 302 u. Taf. II.

2) Ergänzungsband I zu Gerlands Beiträgen zur Geophysik 1902, p. 323.

3) Beiträge zur Geophysik. 5. Band, p. 446.

Einsatzes eines Bebens bemerklich. Im Laufe der nächsten Stunde treten einzelne Wellen mit ziemlich langer Periode auf, so daß das Ganze augenscheinlich als Seismogramm eines sehr fernen Bebens aufzufassen ist.

15.

6. Oktober $9^h\ 20^m\ 10^s$ bis ca. 10^h.

Das Seismogramm erweist sich dadurch beeinträchtigt, daß gerade während seiner Aufzeichnung der Observator zufällig im Seismometerraum auf- und abgegangen war. Bei einer derartigen Bewegung in der Nähe unseres Seismometers gibt der Zementfußboden derart nach, daß die Schreibnadeln um 3 bis 5 mm abgelenkt werden. Infolgedessen läßt sich nicht sagen, ob die starke Ablenkung der Nadel der Ostwestkomponente um 15 mm in der ersten Vorphase durch das Beben allein verursacht worden ist. Die Hauptphase besteht aus einem sehr langen Zug von Wellen, welche Perioden von annähernd gleicher Länge, aber bald wachsende, bald abnehmende Amplituden aufweisen. Die Notierung der Nordsüdkomponente erinnert bis auf ihre längere Dauer und ihre längeren Perioden sehr an diejenige, welche die nämliche Komponente bei dem macedonischen Beben vom 5. Juli 1902 [1]) lieferte.

Zu entsprechender Zeit wurde in Neu-Margljan (Provinz Ferghana in Russisch-Zentralasien) ein 2 Minuten dauerndes, starkes, wellenförmiges Erdbeben verspürt.

16.

25. Oktober $22^h\ 48^m\ 38^s$ bis $22^h\ 54^m$.

Auf der durch fernen Wind leicht gewellten Linie erscheinen schwache Erzitterungen, die sich bald ziemlich kräftigen, bis 2 mm Amplitude erreichenden Ausschlägen überordnen. Eine weitere Phasenentwickelung ist nicht zu erkennen.

Zu gleicher Zeit wurde in Bosnien eine kräftige Erderschütterung verspürt.

17.

4. November gegen 10^h.

Die Zeit dieser Erschütterung kann nicht näher bestimmt werden, da an dem betreffenden Tage der Regulator gereinigt

1) Diese Berichte 1902, Tafel I, Fig. 10.

wurde. Die Notierung besteht aus einem langen Zuge unregelmäßiger Wellen, deren Amplituden allmählich abnehmen, wonach die durch ein Fernbeben aufgezeichnete Hauptphase eines Seismogramms vorliegt.

18.

14. November $22^h\ 44^m\ 40^s$ bis $22^h\ 50^m$.

Eine leichte Zickzacklinie, ähnlich wie sie oben bei Nr. 1 und Nr. 3 zu beschreiben war.

19.

20. November $21^h\ 46^m\ 45^s$ bis $23^h\ 30^m$.

Der erste Einsatz besteht aus einer großen Zahl rasch auf einander folgender an Intensität allmählich abnehmender Ausschläge. Die zweite Vorphase ist nur sehr schwach entwickelt. Die Hauptphase beginnt mit einer Reihe von Wellen mit sehr langer Periode aber geringer Amplitude. Im zweiten Abschnitt der Hauptphase wachsen die Amplituden, während die Perioden abnehmen, aber immer noch lang bleiben. Der Endabschnitt besteht aus sinusartigen leichten Wellen. Die ganze Aufzeichnung erinnert sehr an diejenige vom 22. September (p. 30) und namentlich an die vom 28. März 1902.[1])

20.

21. November $8^h\ 15^m\ 30^s$ bis $9^h\ 50^m$.

Dieses Seismogramm repräsentiert den nämlichen Typus wie das vorhergehende, nur nehmen die einzelnen Phasen kürzere Zeiträume ein und sind dem entsprechend auch die Perioden der einzelnen Wellen kürzer.

21.

23. November $21^h\ 32^m$ bis $21^h\ 39^m$.

Ein Zug schwacher unregelmäßiger Wellen.

22.

13. Dezember $0^h\ 32^m\ 40^s$ bis $1^h\ 35^m$.

Züge von sinusartigen, langperiodigen Wellen, die augenscheinlich die zweite Vorphase und die Hauptphase eines Seismogramms darstellen, wie es oben unter Nr. 17 charakterisiert wurde.

1) Vergl. diese Berichte 1902, Tafel I, Fig. 1.

23.

13. Dezember $18^h\ 17^m\ 30^s$ bis $19^h\ 20^s$.

Über dieses Seismogramm gilt das oben von Nr. 18 Gesagte.

24.

16. Dezember $6^h\ 14^m\ 12^s$ bis ca. $7^h\ 35^m$.

Das Seismogramm beginnt mit einer sehr großen Anzahl winziger Ausschläge, deren Periode sich so allmählich verlängert, daß der zweite Einsatz nicht scharf hervortritt. In der 11. Minute nach dem Beginn fangen sowohl die Perioden wie namentlich die Amplituden an unregelmäßig zu wachsen, sodaß ein Übergang in die Hauptphase gebildet wird. Letztere besteht aus einer Anzahl von Wellengruppen, deren Amplituden jeweilig langsam zu- und dann wieder abnehmen. Die unregelmäßigen Wellen des Endabschnittes besitzen noch Amplituden von etwa 2 mm, als sich ihnen

25.

$7^h\ 1^m$

leichte Ausschläge überzuordnen beginnen, welche beweisen, daß eine neue Erschütterung stattgefunden hat. Da diesem Einsatz, wie im eben beschriebenen Falle nach etwa 15 Minuten eine Hauptphase folgt, die der eben geschilderten gleicht, nur schwächer entwickelt ist, so ist aus den Seismogrammen zu schließen, daß beide Stöße vom nämlichen Herd ausgegangen sind.

Die Seismogramme Nr. 24 u. 25 sind zweifellos auf das heftige Erdbeben zu beziehen, welches namentlich Andischan in Russisch-Turkestan verheerend heimsuchte. Ganz besonders beweisend für diesen kausalen Zusammenhang ist es, daß aus Neu-Margljan über zwei durch einen etwa halbstündigen Zwischenraum getrennte Erschütterungen berichtet wird, die sich sonach auch in Leipzig als deutlich von einander getrennte Seismogramme aufgeschrieben haben.

26.

28. Dezember ca. $2^h\ 54^m$ bis ca. $3^h\ 50^m$.

Die zu diesem Seismogramm gehörenden leichteren Wellen sind in erheblicher Weise durch diejenigen verwischt worden,

welche auf die Stürme zu beziehen sind, die Ende Dezember über der Nord- und Ostsee tobten. Infolgedessen ist der erste Einsatz zeitlich nicht genau festzulegen, in der Hauptphase aber gewinnen die seismischen Wellen entschieden die Oberhand und schreiben sich als mehrere kräftige, ziemlich regelmäßig anschwellende und wieder abnehmende Gruppen auf, die sehr an diejenigen erinnern, welche am 30. August zur Notierung kamen. Das Beben, welches 23 Sekunden lang Bijsk im Gouvernement Tomsk in wellenförmige Bewegung setzte, dürfte dieses Seismogramm aufgeschrieben haben.

27.

30. Dezember $6^h 8^m 32^s$ bis ca. $6^h 35^m$.

Auch dieses Seismogramm ist wie diejenigen vom 23. August (Nr. 7) und vom 28. Dezember (Nr. 26) durch Sturmwellen beeinträchtigt worden. Gut erkennbar ist auch hier, wie die zweite Vorphase allmählich in die Hauptphase hinüberleitet. Diese letztere weist in ihrem Anfangsteil die kräftigsten Wellen mit den längsten Perioden auf.

Rückblick auf die Fernbebenaufzeichnungen in Leipzig während des Jahres 1902.

Vom 28. März bis 31. Dezember 1902 sind in Leipzig durch Wiecherts astatisches Pendelseismometer 41 Teleseismogramme zur Aufzeichnung gelangt. Dieselben verteilen sich auf die einzelnen Monate wie folgt:

März	1
April	4
Mai	4
Juni	2
Juli	4
August	8
September	4
Oktober	3
November	5
Dezember	6.

Bei einem großen Teil dieser Seismogramme gelang es, mit Sicherheit oder wenigstens großer Wahrscheinlichkeit, die Gegend festzustellen, von der die seismogrammatisch aufgeschriebenen

Beben ausgegangen sind. Vergegenwärtigt man sich diese letzteren Teleseismogramme und sieht dabei von denen ab, die nicht deutlich in Phasen gegliedert sind, so läßt sich ein erheblicher Teil der verbleibenden auf drei Typen zurückführen, die sich in folgender Weise charakterisieren[1]):

1. Beide Vorphasen sind scharf von einander zu trennen und schwächen sich nach ihrem Ende hin deutlich ab. Die Hauptphase beginnt mit Wellen, die sowohl in Bezug auf Amplitude wie Periode die größten und längsten des ganzen Seismogrammes sind.

   Diese Gruppe bilden die Guatemala-Beben vom 19. April und 23. September.

2. Beide Vorphasen sind scharf von einander zu trennen und schwächen sich gleichfalls allmählich ab. Die Hauptphase beginnt mit Wellen von außerordentlich langer Periode, aber auffallend geringer Amplitude. Erst im zweiten Teil der Hauptphase stellen sich bei kürzer werdenden Perioden vereinzelte beträchtlichere Amplituden ein.

   Hierher gehört das Seismogramm des Molukkenbebens vom 28. März, ferner diejenigen vom 25. Mai, 6. Juli, 22. September (Philippinen?), 20. November und 13. Dezember.

3. Die beiden Vorphasen sind nicht scharf von einander getrennt. In der zweiten Vorphase nehmen die Perioden und Amplituden allmählich in unregelmäßiger Weise zu, sodaß ein langsamer Übergang zur Hauptphase stattfindet, welch letztere aus einigen bis vielen, oft ziemlich regelmäßigen Wellenzügen mit den größten Amplituden des ganzen Seismogrammes besteht.

   Zu diesen Seismogrammen gehören die vom 22. August (Kaschgar), 30. August (Taschkent), 6. Oktober (Neu-Margljan), 16. Dezember (Andischan), 28. Dezember (Bijsk), sowie auch dasjenige des macedonischen Bebens vom 5. Juli.

Der Schwerpunkt für die Unterscheidung der oben charakterisierten Seismogramm-Typen dürfte auf Grund der seitherigen Erfahrung in der Ausbildung der Hauptphase zu suchen sein, dahingegen dürften die kräftigen Wellen, wie sie sich in den Vor-

---

1) Vergleiche hierzu diese Berichte 1902, Taf. I Fig. 1 und Taf. II sowie das der vorstehenden Aufzählung beigegebene Seismogramm des Kaschgar-Bebens auf Tafel II.

phasen des ersten Seismogramms vom 22. August so auffällig bemerklich machen, für den Gesamtcharakter desselben ohne Bedeutung sein. Sie scheinen vielmehr von *jedem* besonders heftigen Erdbeben hervorgebracht werden zu können, da sie fast nicht weniger markant auch bei den Seismogrammen der Guatemala-Beben (Typus 1) auftreten, ja sich auch auf dem wahrscheinlich auf heftige Stöße in Südostasien zu beziehenden Seismogramm vom 22. September (Typus 2) vorfinden.

Gleichartige Aufzeichnung deutet hin auf den gleichen von den Erdbebenwellen zurückgelegten Weg, also auf gleichen Ursprungsort sowie auf gleiche unterwegs erlittene Beeinflussungen der Wellen. Schlüter[1]) spricht die nämliche Erfahrung aus, indem er sagt: „daß das Erdbeben, wie es sich an den verschiedenen Beobachtungsorten abwickelt, eine alleinige Funktion der Massenanordnungen des Weges ist, welche der fortgepflanzte Stoß zwischen Herd und Beobachtungsort zu passieren hat.“

Während nun das epizentrale Gebiet der den Seismogramm-Typus 1 u. 3 liefernden Beben bekannt ist, hat den Typus 2 bis jetzt mit absoluter Sicherheit bloß das Seismogramm des Molukkenbebens vom 28. März ergeben, doch steht bei seiner höchst eigenartigen Entwickelung zu erwarten, daß alle nach dem nämlichen Typus entwickelten Seismogramme auf Beben bezogen werden können, die in Ostindien und den vorgelagerten Inseln sich fühlbar gemacht haben.

Nach alledem dürfte man berechtigt sein, unsere Seismogramm-Typen nach den epizentralen Gebieten der zugehörigen Beben mit besonderen Namen zu belegen und kann sprechen von:

1. einem *transatlantischen* Typus, wenn die sich aufzeichnenden Wellen den atlantischen Ozean passiert haben und die Hauptphase mit den kräftigsten und längsten Wellen des ganzen Seismogramms beginnt;

2. einem *ostindischen* Typus, wenn sich die das Seismogramm erzeugenden Beben jenseits des Himalaya abgespielt haben und die ersten Wellen der Hauptphase zwar die längsten im Seismogramm auftretenden Perioden, dabei aber auffallend schwache Amplituden besitzen;

3. einem *kontinentalen* Typus, wenn die Wellen in dem östlich und südöstlich von uns liegenden Festlandskomplex erzeugt

1) Gerland, Beiträge zur Geophysik 5. Band S. 446.

worden sind und die von ihnen im Seismogramm aufgezeichnete Hauptphase, ohne sich scharf von den Vorphasen abzuheben, aus mehr oder weniger regelmäßigen Wellenzügen mit den größten Amplituden des ganzen Seismogrammes besteht.

Tafelerklärung.

Die Tafel ist die photolithographische Reproduktion zweier photographischer Abzüge des Original-Seismogramms, auf deren einem nur die Aufzeichnungen des ersten Stoßes von Kaschgar, auf dem andern nur diejenigen des 70 Minuten darauf folgenden Bebens mit der Feder nachgezeichnet wurden. Das Nähere über die Herstellung der Tafel, über die Notwendigkeit des Auseinanderrückens beider Seismogramme sowie die Beschreibung der letzteren befindet sich auf Seite 26 bis 29.

Dem 1. Einsatz (E_1) $4^h\ 8^m$ folgen die Vorphasen mit den kräftigen Wellengruppen V_1 bis V_4, diesen die Hauptphase H_1 und weiterhin die Endphase *EP*. Den ohne Unterbrechung reproduzierten, auf der untern Kurve der Tafel allmählich ausklingenden Wellen der letzteren ordnen sich $5^h\ 17^m\ 8^s$ die Ausschläge des ersten Einsatzes (E_2) eines zweiten Bebens, gefolgt von der Hauptphase H_2 über. Von der Endphase desselben ist nur der Anfangsteil zur Darstellung gelangt.

Erdbebenstation
des paläontologisch-geologischen Instituts Leipzig. Januar 1903.

Druckfertig erklärt 19. II. 1903.

Über Bernoullische Zahlen und Funktionen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen.

Von

Martin Krause.

In einer Arbeit des Verfassers, die sich in den vorjährigen Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften findet, ist eine Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen abgeleitet worden. In der Einleitung zu diesem Aufsatze sind einige Verallgemeinerungen kurz skizziert worden, die im Gebiete der Bernoullischen Zahlen und Funktionen in der letzten Zeit von verschiedenen Autoren gegeben worden sind. Im Anschluß hieran möge zunächst noch auf die folgenden Arbeiten hingewiesen werden, die es sich auch zum Ziele setzen, die genannte Theorie nach gewisser Richtung hin weiterzuführen. Es ist das erstens eine Arbeit von Jonquière[1]), in welcher Funktionen betrachtet werden, die u. a. sich in die Reihe entwickeln lassen:

$$\frac{-2}{(2\pi)^s}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos(2n\pi - \frac{\pi}{2}s)}{n^s}, \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad s > 1$$

und in engerm Zusammenhang mit der verallgemeinerten Riemannschen Reihe stehen.

Dann aber hat Herr Hurwitz[2]) für die Entwickelungskoeffi-

1) Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Funktion und ihren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Riemannschen Reihe. Stockholm. Acad. Bihang. 16 I. Siehe auch Fortschritte der Mathematik. Band 23. S. 432.

2) Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen. Math. Ann. Band 51.

zienten der lemniskatischen Funktion ähnliche Eigenschaften nachgewiesen, wie sie die BERNOULLIschen Zahlen besitzen und ein Schüler von ihm, Herr MATTER[1]) hat das Analoge für die Entwickelungskoeffizienten der Funktion $p(u; o, 4)$ geleistet.

Zu diesen Arbeiten ist nun in der neuesten Zeit eine Notiz von Herrn APPEL[2]) getreten, in welcher derselbe auf BERNOULLIsche Funktionen von zwei veränderlichen Größen aufmerksam macht und dieselben mit den elliptischen Integralen in Verbindung setzt. Im Anschluß an letztere Arbeit hat dann der *Verfasser dieses Aufsatzes*[3]) im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen eine Summenformel aufgestellt, welche als Analogon zu der MAC-LAURINschen Summenformel im Gebiete der Funktionen einer veränderlichen Größe angesehen werden kann.

Es ist der Zweck der folgenden Betrachtungen, die soeben genannten Notizen weiter auszuführen, vor allem die Summenformel ausführlicher zu begründen.

§ 1.

Definition von Bernoullischen Zahlen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen. Rekursionsformeln für die Berechnung derselben.

Unter BERNOULLIschen Zahlen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen wollen wir in der Folge Größen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ *verstehen, welche der Gleichung Genüge leisten:*

$$(1)\quad \frac{\alpha\beta v^2}{(e^{\alpha v}-1)(e^{\beta v}-1)} = e^{\gamma v} = 1 + \gamma_1 v + \gamma_2 \frac{v^2}{1\cdot 2} + \cdots \gamma_n \frac{v^n}{n!} + \cdots,$$

wobei α *und* β *zwei willkürliche Konstanten bedeuten.*

---

1) Die den BERNOULLIschen Zahlen analogen Zahlen im Körper der dritten Einheitswurzeln. Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich. Jahrgang 45. 1900.

2) Sur les fonctions de BERNOULLI à deux variables und Über die BERNOULLIschen Funktionen zweier veränderlichen Größen von KRAUSE. Archiv der Math. u. Physik. Dritte Reihe. IV. S. 293.

3) Sur une formule sommatoire dans la théorie des fonctions à deux variables. Comptes-Rendus 8 dez. 1902. Paris.

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

$$e^{\gamma v} = \left(1 + b_1 \alpha v + b_2 \frac{(\alpha v)^2}{1 \cdot 2} + \cdots b_n \frac{(\alpha v)^n}{n!} + \cdots\right)$$
$$\left(1 + b_1 \beta v + b_2 \frac{(\beta v)^2}{1 \cdot 2} + \cdots b_n \frac{(\beta v)^n}{n!} + \cdots\right)$$

oder auch:

(2) $$\gamma_n = b_n \alpha^n + n_1 b_1 b_{n-1} \alpha^{n-1} \beta + \cdots b_n \beta^n = (b\alpha + b'\beta)^{(n)}$$

wenn wir die Größen b durch die Gleichung definieren:

(3) $$\frac{v}{e^v - 1} = e^{bv} = 1 + b_1 v + b_2 \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

Aus der letzten Gleichung folgt bekanntlich, daß die Größen b mit ungeradem Index der Null gleich sind, mit Ausnahme der Größe b_1, welche den Wert $-\frac{1}{2}$ besitzt. Hieraus folgen sofort die Darstellungen:

(4a) $$\gamma_{2m} = b_{2m} \alpha^{2m} + (2m)_2 b_2 b_{2m-2} \alpha^{2m-2} \beta^2 + \cdots b_{2m} \beta^{2m},$$

vorausgesetzt, daß $m > 2$ ist, während für $m = 2$ sich ergibt:

(4b) $$\gamma_2 = b_2 \alpha^2 + 2 b_1^2 \alpha\beta + b_2 \beta^2.$$

Ferner wird:

(4c) $$\gamma_{2m+1} = (2m + 1) b_1 b_{2m} \alpha\beta (\alpha^{2m-1} + \beta^{2m-1}).$$

Aus diesen Gleichungen sind die Größen γ der Reihe nach zu berechnen, wenn die Bernoullischen Zahlen bekannt sind. In den einfachsten Fällen folgt:

$$\gamma_1 = -\frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{6} + \frac{\alpha\beta}{2}, \quad \gamma_3 = -\frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{4},$$
$$\gamma_4 = -\frac{\alpha^4 + \beta^4}{30} + \frac{\alpha^2\beta^2}{6}, \quad \gamma_5 = \frac{\alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3)}{12} \quad \text{etc.}$$

Wir können die Größen γ aber auch direkt, ohne die gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen zu kennen, mit Hilfe von Rekursionsformeln berechnen, und zwar wird sich hier eine ähnliche Mannigfaltigkeit ergeben, wie bei den letzteren. In der Tat, die Formel (1) ergibt ohne weiteres die Beziehung:

(5) $$(\gamma + \alpha + \beta)^{(n)} - (\gamma + \alpha)^{(n)} - (\gamma + \beta)^{(n)} + \gamma_n = 0,$$

außer wenn $n = 2$. In diesem Falle tritt auf der rechten Seite an Stelle der Null die Größe $2\alpha\beta$.

Diese Formel kann dann dazu dienen, die Größen γ der Reihe nach zu berechnen.

Denken wir uns ferner in Formel (1) an Stelle von v: $-v$ gesetzt, so wird:

$$e^{(\gamma+\alpha+\beta)v} = e^{-\gamma v}$$

oder also wir erhalten die Formel:

$$(6) \qquad (\gamma+\alpha+\beta)^{(n)} - (-\gamma)^{(n)} = 0,$$

die eine ähnliche Struktur besitzt, wie die Formel:

$$(b+1)^{(n)} - (-b)^{(n)} = 0$$

in der Theorie der gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen. Im Gegensatz zu Formel (5) bietet sie nur die Möglichkeit die Größen γ mit ungeradem Index zu berechnen, wenn die Größen mit niederem Index gegeben sind. Subtrahieren wir Formel (5) von Formel (6), so ergibt sich:

$$(7) \qquad (\gamma+\alpha)^{(n)} + (\gamma+\beta)^{(n)} - \gamma_n - (-\gamma)^{(n)} = 0,$$

außer wenn $n = 2$, wo auf der rechten Seite der Ausdruck $-2\alpha\beta$ zu stehen hat.

Aus diesen Formeln kann dann nach bekannten Prinzipien eine unendliche Anzahl weiterer abgeleitet werden. Es geschieht das mit Hilfe des

Lehrsatzes: Versteht man unter $f(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion von x, so finden die Relationen statt:

$$f(\gamma+\alpha+\beta) - f(\gamma+\alpha) - f(\gamma+\beta) + f(\gamma) = \alpha\beta f''(0),$$

$$(8) \qquad f(\gamma+\alpha+\beta) - f(-\gamma) = 0,$$

$$f(\gamma+\alpha) + f(\gamma+\beta) - f(\gamma) - f(-\gamma) = -\alpha\beta f''(0),$$

von denen die letzte eine unmittelbare Folge der beiden ersten ist.

Wir sind auf diesem Wege im stande neue Rekursionsformeln abzuleiten, darunter auch abgekürzte. Hierfür möge wenigstens ein Beispiel gegeben werden.

Wir setzen:

$$f(x) = (x-\alpha-\beta)^m x^n,$$

dann ergibt sich die Beziehung:

$$(9) \qquad \gamma_m(\gamma+\alpha+\beta)^{(n)} - (-1)^{m+n}(\gamma+\alpha+\beta)^{(m)}\gamma_n = 0,$$

und das ist eine abgekürzte Rekursionsformel.

Wir können aber weitere Formeln auf folgende Art ableiten: Wir hatten gesetzt:

$$\frac{\alpha\beta v^2}{(e^{\alpha v}-1)(e^{\beta v}-1)} = e^{\gamma v}.$$

An Stelle von v setzen wir links und rechts $2v$, so ergibt sich:

$$\frac{4\alpha\beta v^2}{(e^{2\alpha v}-1)(e^{2\beta v}-1)} = e^{2\gamma v},$$

oder also wir erhalten nach Zerlegung des Nenners in die Faktoren:

$$(e^{\alpha v}-1)(e^{\alpha v}+1)(e^{\beta v}-1)(e^{\beta v}+1)$$

den *Lehrsatz*: *Die* Bernoulli*schen Zahlen* γ *leisten der Rekursionsformel Genüge*:

(10) $(2\gamma+\alpha+\beta)^{(n)}+(2\gamma+\alpha)^{(n)}+(2\gamma+\beta)^{(n)}+2^n\gamma_n-4\gamma_n=0,$

aus welcher die Größen γ *der Reihe nach berechnet werden können.*

Auch hieraus folgt eine allgemeine Beziehung: Verstehen wir unter $f(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion von x, so wird allgemein sein:

(11) $f(2\gamma+\alpha+\beta)+f(2\gamma+\alpha)+f(2\gamma+\beta)+f(2\gamma)-4f(\gamma)=0.$

Wir können die letzten Resultate verallgemeinern. In der Tat, setzen wir in Formel (1) an Stelle von v: λv, wo λ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so wird:

$$\frac{\alpha\beta\lambda^2 v^2}{(e^{\alpha\lambda v}-1)(e^{\beta\lambda v}-1)} = e^{\gamma\lambda v}.$$

Der Nenner kann in die Form gebracht werden:

$$(e^{\alpha v}-1)\ (e^{\beta v}-1)\ (e^{(\lambda-1)\alpha v}+e^{(\lambda-2)\alpha v}+\ldots+1)$$
$$(e^{(\lambda-1)\beta v}+e^{(\lambda-2)\beta v}+\ldots+1),$$

so daß wir die Beziehung erhalten:

(12) $$\lambda^2\gamma_n = \sum_{r=0}^{r=\lambda-1}\sum_{s=0}^{s=\lambda-1}(\lambda\gamma+r\alpha+s\beta)^n.$$

Entwickeln wir die rechte Seite nach fallenden γ, so treten in den Koeffizienten Doppelsummen von der Form auf:

$$\sum\sum(r\alpha+s\beta)^n,$$

mit denen wir uns später zu beschäftigen haben werden.

§ 2.

Anderweite Darstellung der Bernoullischen Zahlen γ.

Wir fanden für die Größen γ_{2m} den Ausdruck:

(1) $$\gamma_{2m} = b_{2m}\,\alpha^{2m} + (2m)_1 b_1\, b_{2m-1}\, \alpha^{2m-1}\beta + (2m)_2\, b_2\, b_{2m-2}\, \alpha^{2m-2}\beta^2 + \cdots b_{2m}\,\beta^{2m}.$$

Es können hieraus andere Darstellungen derselben Größen hergeleitet werden, die unter Umständen von Wichtigkeit sein können.

(2) $$b_{2\mu} = (-1)^{\mu-1}\,\frac{2\mu!}{2^{2\mu-1}\,\pi^{2\mu}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^{2\mu}}.$$

Hieraus folgt, daß wir die Größen γ_{2m} *durch eine einfach unendliche Reihe darstellen können, in deren Koeffizienten die Größen b linear auftreten* und zwar durch die Reihen:

(3) $$\gamma_{2m} = b_{2m}(\alpha^{2m} + \beta^{2m}) - m\,b_{2m-1}(\alpha^{2m-1}\beta + \alpha\beta^{2m-1}) + \sum_{r=1}^{r=\infty} \gamma_{2m}^{(r)},$$

in welcher die Größen $\gamma_{2m}^{(r)}$ auf doppelte Art dargestellt werden können, nämlich durch die Ausdrücke (4):

$$\gamma_{2m}^{(r)} = \frac{2m\cdot 2m-1}{2\pi^2 r^2}\, b_{2m-2}\,\alpha^{2m-2}\beta^2$$
$$- \frac{2m\ldots 2m-3}{2^3\cdot\pi^4 r^4}\, b_{2m-4}\,\alpha^{2m-4}\beta^4 + \cdots (-1)^m \frac{2m\ldots 3}{2^{2m-3}\pi^{2m-2} r^{2m-2}}\, b_2\,\alpha^2\beta^{2m}$$

und:

$$(-1)^m\gamma_{2m}^{(r)} = \frac{2m\ldots 3}{2^{2m-3}\cdot\pi^{2m-2}\cdot r^{2m-2}}\, b_2\,\alpha^{2m-2}\beta^2$$
$$- \frac{2m\ldots 5}{2^{2m-5}\cdot\pi^{2m-4}\cdot r^{2m-4}}\, b_4\,\alpha^{2m-4}\beta^4 + \cdots (-1)^m \frac{2m\cdot 2m-1}{2\cdot\pi^2\cdot r^2}\, b_{2m-2}\,\alpha^2\beta^{2m-}$$

Daneben können die Größen γ_{2m} *aber auch in doppelt unendliche Reihen entwickelt werden.*

Wir gehen dazu von den Entwickelungen aus:

$$\frac{\alpha v}{e^{\alpha v}-1} = 1 - \frac{\alpha v}{2} + \frac{2\alpha^2 v^2}{\alpha^2 v^2 + 2^2\pi^2} + \frac{2\alpha^2 v^2}{\alpha^2 v^2 + 4^2\pi^2} + \cdots$$

$$\frac{\beta v}{e^{\beta v}-1} = 1 - \frac{\beta v}{2} + \frac{2\beta^2 v^2}{\beta^2 v^2 + 2^2\pi^2} + \frac{2\beta^2 v^2}{\beta^2 v^2 + 4^2\pi^2} + \cdots$$

Durch Multiplikation ergibt sich hieraus die Darstellung:

(5) $$\left(\frac{\alpha v}{e^{\alpha v}-1} - 1 + \frac{\alpha v}{2}\right)\left(\frac{\beta v}{e^{\beta v}-1} - 1 + \frac{\beta v}{2}\right)$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^2 v^4}{\pi^2}\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{(\alpha^2 s^2 - \beta^2 r^2)}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 v^2 + 2^2 r^2\pi^2} - \frac{\beta^2}{\beta^2 v^2 + 2^2 s^2 \pi^2}\right),$$

wobei die Voraussetzung hinzuzunehmen ist, daß $\frac{\alpha}{\beta}$ keine rationale Zahl ist.

Hieraus ergibt sich zunächst die unmittelbar ersichtliche Darstellung:

(6) $$\frac{\gamma_{2m+1}}{2m+1!} = (-1)^m \frac{\alpha\beta(\alpha^{2m-1}+\beta^{2m-1})}{2^{2m}\pi^{2m}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}},$$

dann aber wird:

(7) $$\gamma_{2m} = (-1)^m \frac{2m!(\alpha^{2m}+\beta^{2m})}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}} + \sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{s=1}^{s=\infty}\gamma_{2m}^{(r,s)},$$

wobei gesetzt ist:

(8) $$\gamma_{2m}^{(r,s)} = \frac{(-1)^m 2m!}{2^{2m-2}\pi^{2m}}\frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2 s^2 - \beta^2 r^2)}\left(\frac{\alpha^{2m-2}}{r^{2m-2}} - \frac{\beta^{2m-2}}{s^{2m-2}}\right).$$

Die Resultate modifizieren sich, wenn $\alpha:\beta$ eine rationale Zahl ist.

In der Tat, nehmen wir an, daß:

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 g^2, \quad \beta^2 = \beta_1^2 g^2$$

ist, wobei α_1 und β_1 ganze rationale Zahlen bedeuten, die keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so müssen aus der Doppelsumme in Gl. (5) alle diejenigen Glieder fortgelassen werden, für welche:

$$r = \alpha_1\varrho, \quad s = \beta_1\varrho$$

ist. An ihrer Stelle treten Glieder von der Form:

$$\frac{4v^4 g^4}{(v^2 g^2 + 2^2\varrho^2\pi^2)^2}$$

und demgemäß reduziert sich auch die Formel (7).

Die auf diesem Wege erhaltenen Doppelsummen treten dann an Stelle der einfachen Summen:

$$\sum \frac{1}{r^{2m}}$$

im Gebiete der Funktionen einer veränderlichen Größe.

§ 3.

Definition und Haupteigenschaften von Bernoullischen Funktionen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen.[1]

Ähnlich wie BERNOULLIsche Zahlen können auch BERNOULLIsche Funktionen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen definiert werden.

Wir gehen dazu von der Gleichung aus:

$$(1\text{a}) \qquad \frac{\alpha v}{e^{\alpha v}-1}\,\frac{\beta v}{e^{\beta v}-1} = e^{\gamma v}$$

oder auch:

$$(1\text{b}) \qquad \alpha\beta v^2 = e^{(\gamma+\alpha+\beta)v} - e^{(\gamma+\alpha)v} - e^{(\gamma+\beta)v} + e^{\gamma v}$$

und multiplizieren dieselbe mit:

$$e^{(p\alpha+q\beta)v},$$

wobei p der Reihe nach die Werte $0, 1, \ldots x-1$, q der Reihe nach die Werte $0, 1, \ldots y-1$ annehmen kann und addieren alle Gleichungen. Dann ergibt sich durch Vergleichung der Koeffizienten von v^n links und rechts die Beziehung:

$$(2) \quad \varphi_n(x, y, \alpha, \beta) = (\gamma+\alpha x+\beta y)^{(n)} - (\gamma+\alpha x)^{(n)} - (\gamma+\beta y)^{(n)} + \gamma_n,$$

wobei gesetzt ist:

$$(3) \quad \varphi_n(x, y, \alpha, \beta) = n(n-1)\alpha\beta \sum_{p=0}^{p=x-1} \sum_{q=0}^{q=y-1} (\alpha p + \beta q)^{n-2}.$$

Bei der Ableitung dieser Beziehung sind die Größen x und y als positive ganze Zahlen vorausgesetzt. Die rechte Seite in Gl. (2) definiert aber bei beliebigen Werten von x und y eine ganze Funktion von x und y. Wir wollen nun folgendermaßen definieren:

Unter einer BERNOULLIschen Funktion nter Ordnung im Gebiete zweier veränderlichen Größen soll die ganze Funktion von x und y verstanden werden:

$$(\gamma+\alpha x+\beta y)^{(n)} - (\gamma+\alpha x)^{(n)} - (\gamma+\beta y)^{(n)} + \gamma_n$$

x und y nennen wir ihre Argumente, α und β ihre Parameter.

---

1) In Bezug auf diesen Paragraphen möge auf die in der Einleitung citierten Notizen im Archiv der Math. u. Phys. verwiesen werden.

Es folgt dann der

Lehrsatz: *Versteht man unter x und y zwei ganze positive Zahlen, so stellt die* Bernoulli*sche Funktion $n$ter Ordnung die Doppelsumme dar:*

$$n(n-1)\alpha\beta \sum_{p=0}^{p=x-1} \sum_{q=0}^{q=y-1} (\alpha p + \beta q)^{n-2}.$$

Für die soeben angeführten Bernoullischen Funktionen können noch andere Darstellungen gegeben werden.

In der Tat, der Ausdruck:

$$\frac{\alpha\beta v^2 (e^{\alpha x v} - 1)(e^{\beta y v} - 1)}{(e^{\alpha v} - 1)(e^{\beta v} - 1)}$$

kann geschrieben werden:

$$e^{\gamma v}\left(e^{\alpha x v} - 1\right)\left(e^{\beta y v} - 1\right)$$

oder auch:

$$e^{(\gamma + \alpha x + \beta y) v} - e^{(\gamma + \alpha x) v} - e^{(\gamma + \beta y) v} + e^{\gamma v}.$$

Hieraus folgt, daß der Entwickelungskoeffizient von $\frac{v^n}{n!}$ gerade unsere $n$te Bernoullische Funktion ist, oder also wir erhalten den Lehrsatz:

Die vorhin definierte Bernoulli*sche Funktion $n$ter Ordnung ist gleich dem $n$ten Differentialquotienten der Funktion:*

$$\alpha\beta v^2 \left(e^{\alpha x v} - 1\right)\left(e^{\beta y v} - 1\right) : \left(e^{\alpha v} - 1\right)\left(e^{\beta v} - 1\right)$$

nach v im Punkte $x = 0$.

Wir können aber noch eine weitere Darstellung unserer Funktionen geben. In der Tat, der soeben betrachtete Quotient kann auch als das Produkt der beiden Faktoren:

$$\alpha v \left(e^{\alpha x v} - 1\right) : e^{\alpha v} - 1 \quad \text{und} \quad \beta v \left(e^{\beta y v} - 1\right) : e^{\beta v} - 1$$

aufgefaßt worden. Hieraus folgt unmittelbar, daß er auch das Produkt der beiden Summen ist:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n(x) \frac{\alpha^n v^n}{n!} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n(y) \frac{\beta^n v^n}{n!},$$

wobei unter $\varphi_n(z)$ die bekannte Bernoullische Funktion einer

veränderlichen Größe verstanden wird, die für einen positiven ganzzahligen Wert von z gleich:

$$n(1^{n-1} + 2^{n-1} + \cdots (z-1)^{n-1})$$

ist. Hieraus folgt dann der Lehrsatz:

Die definierte BERNOULLIsche Funktion nter Ordnung kann in die Form gebracht werden:

$$\varphi_n(x, y, \alpha, \beta) = n\alpha^{n-1}\beta\varphi_{n-1}(x)\varphi_1(y)$$
$$+ n_2\alpha^{n-2}\beta_2\varphi_{n-2}(x)\varphi_2(y) + \cdots \quad n\alpha\beta^{n-1}\varphi_1(x)\varphi_{n-1}(y).$$

In den einfachsten Fällen wird:

$$\varphi_2(x, y, \alpha, \beta) = 2\alpha\beta xy,$$
$$\varphi_3(x, y, \alpha, \beta) = 3\alpha\beta xy(\alpha x + \beta y - \alpha - \beta),$$
$$\varphi_4(x, y, \alpha, \beta) = 2\alpha\beta xy(2(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2) + 3\alpha\beta xy + 6\gamma_1(\alpha x + \beta y) + 6\gamma_2)$$

. . . .

Die soeben eingeführten Funktionen haben nun ähnliche Eigenschaften wie die BERNOULLIschen Funktionen einer veränderlichen Größe. Es möge das nicht ausführlich ausgeführt werden, vielmehr beschränken wir uns auf die folgenden Bemerkungen.

Bilden wir die Funktion:

$$\varphi_n(x+1, y, \alpha, \beta)$$

so kann dieselbe vermöge der bekannten Beziehung:

$$\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) + nx^{n-1}$$

geschrieben werden:

$$\varphi_n(x, y, \alpha, \beta) + n(n-1)\alpha^{n-1}\beta x^{n-2}\varphi_1(y)$$
$$+ n_2(n-2)\alpha^{n-2}\beta^2x^{n-3}\varphi_2(y) + \cdots \quad n_1\alpha\beta^{n-1}\varphi_{n-1}(y).$$

In ähnlicher Weise ist die Größe:

$$\varphi_n(x, y+1, \alpha, \beta)$$

zu behandeln. Hieraus ergibt sich der Lehrsatz:

Die Funktion $\varphi_n(x+1, y, \alpha, \beta)$ kann in die Form gebracht werden:

$$\varphi_n(x, y, \alpha, \beta) + \alpha n(\alpha x + \beta\varphi(y))^{(n-1)},$$

die Funktion $\varphi_n(x, y+1, \alpha, \beta)$ in die analoge:

$$\varphi_n(x, y, \alpha, \beta) + \beta n(\beta y + \alpha\varphi(x))^{(n-1)}.$$

Dabei sind die Ausdrücke:

$$(\alpha x + \beta\varphi(y))^{(n-1)} \quad \text{und} \quad (\beta y + \alpha\varphi(x))^{(n-1)}$$

nach dem binomischen Satze zu entwickeln und nach der Entwickelung an Stelle von:

$$\varphi(x)^{\mu} \quad \text{und} \quad \varphi(y)^{\mu}$$

zu setzen

$$\varphi_{\mu}(x) \quad \text{resp.} \quad \varphi_{\mu}(y).$$

Die beiden soeben betrachteten Ausdrücke sind einfacher zu berechnen, als die Bernoullischen Funktionen zweier veränderlichen Größen. Kennen wir die letzteren also in dem Intervall $x = 0, \cdot \ldots 1$, $y = 0, \ldots 1$, so können wir sie für weitere positive Werte von x und y auf verhältnismäßig einfache Weise berechnen.

Zu einfacheren Resultaten führt die Untersuchung des Ausdrucks:

$$\varphi_n(x+1, y+1, \alpha, \beta) - \varphi_n(x+1, y, \alpha, \beta)$$
$$- \varphi_n(x, y+1, \alpha, \beta) + \varphi_n(x, y, \alpha, \beta).$$

Derselbe kann auf mehrfachem Wege gebildet werden. Wir wollen die $n$te Bernoullische Funktion als $n$ten Differentialquotienten der Größe

$$\alpha\beta v^2 (e^{\alpha x v} - 1)(e^{\beta y v} - 1) : (e^{\alpha v} - 1)(e^{\beta v} - 1)$$

nach v im Punkte $v = 0$ zu Grunde legen. Dann wird der in Betracht gezogene Ausdruck gleich dem $n$ten Differentialquotienten der Größe:

$$\alpha\beta v^2 e^{(\alpha x + \beta y) v}$$

nach v im Punkte $v = 0$ oder also gleich:

$$2\alpha\beta n_2 (\alpha x + \beta y)^{(n-2)}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:

Die Bernoullische Funktion nter Ordnung leistet der Gleichung Genüge:

$$\varphi_n(x+1, y+1, \alpha, \beta) - \varphi_n(x+1, y, \alpha, \beta) - \varphi_n(x, y+1, \alpha, \beta)$$
$$+ \varphi_n(x, y, \alpha, \beta) = 2\alpha\beta n_2 (\alpha x + \beta y)^{n-2}.$$

Diese Gleichung vereinfacht wesentlich die numerische Berechnung der Bernoullischen Funktionen. In der Tat, denken wir uns

die Werte derselben in zwei Streifen gegeben, beide von der Breite 1, von denen der eine von der x-Achse und der Linie $y = 1$, der andere von der y-Achse und der Linie $x = 1$ und zwar von den positiven Teilen dieser Linien begrenzt ist, so folgt aus der abgeleiteten Gleichung eine einfache Berechnung für die weiteren positiven Werte von x und y.

Für gewisse Werte der Argumente kann der Wert der BERNOULLIschen Funktionen leicht angegeben werden. In der Tat, setzt man entweder $x = 0$ oder $y = 0$, so folgt aus den Definitionsgleichungen unmittelbar:

$$\tag{4} \begin{aligned} \varphi_n(0, y, \alpha, \beta) &= 0, \\ \varphi_n(x, 0, \alpha, \beta) &= 0. \end{aligned}$$

Ferner folgt mit leichter Mühe:

$$\tag{5} \varphi_n(1, 1, \alpha, \beta) = 0,$$

wenn $n > 2$, sowie

$$\tag{6} \begin{aligned} \varphi_n(1, y, \alpha, \beta) &= n\alpha\beta^{n-1}\varphi_{n-1}(y), \\ \varphi_n(x, 1, \alpha, \beta) &= n\alpha^{n-1}\beta\varphi_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Um einige weitere Beziehungen abzuleiten, denken wir uns den Ausdruck zu Grunde gelegt:

$$\varphi_n(x, y, \alpha, \beta) = n\alpha^{n-1}\beta\varphi_{n-1}(x)\varphi_1(y) \\ + n_2\alpha^{n-2}\beta^2\varphi_{n-2}(x)\varphi_2(y) + \cdots \quad n\alpha\beta^{n-1}\varphi_1(x)\varphi_{n-1}(y).$$

Nehmen wir die bekannte Gleichung hinzu:

$$\varphi_n(1-x) = (-1)^n\varphi_n(x), \quad n > 1,$$

so ergeben sich die Beziehungen:

$$\tag{7} \begin{aligned} \varphi_n(1-x, y, \alpha, \beta) &= \varphi_n(x, y, -\alpha, \beta) + n\alpha\beta^{n-1}\varphi_{n-1}(y), \\ \varphi_n(x, 1-y, \alpha, \beta) &= \varphi_n(x, y, \alpha, -\beta) + n\alpha^{n-1}\beta\varphi_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Gleichung:

$$\varphi_n(x, y, \alpha, \beta) = (-1)^n\varphi_n(x, y, -\alpha, -\beta),$$

so folgt dann für $n > 2$ die Beziehung:

$$\tag{8} \begin{aligned} &\varphi_n(1-x, 1-y, \alpha, \beta) \\ &= (-1)^n(\varphi_n(x, y, \alpha, \beta) - n\alpha^{n-1}\beta\varphi_{n-1}(x) - n\alpha\beta^{n-1}\varphi_{n-1}(y)). \end{aligned}$$

Ebenso einfach folgt der Lehrsatz:

Ist n eine ungerade Zahl größer als 1, *so ist die Größe:*

$$\varphi_n(1-x,\ 1-y,\ \alpha,\ \beta)-\varphi_n(1-x,\ y,\ \alpha,\ \beta)-\varphi_n(x,\ 1-y,\ \alpha,\ \beta) + \varphi_n(x,\ y,\ \alpha,\ \beta)$$

der Null gleich, ist dagegen n eine gerade Zahl > 2, *so folgt für dieselbe der Wert:*

$$-n\alpha^{n-1}\beta\varphi_{n-1}(x)-n\alpha\beta^{n-1}\varphi_{n-1}(y)+\varphi_n(x,\ y,\ \alpha,\ \beta)-\varphi_n(x,\ y,-\alpha,\ \beta)).$$

Von besonderer Bedeutung ist der erste Teil des Satzes. In der Tat, denken wir uns für einen ungeraden Wert von n die Bernoullischen Funktionen in zwei Streifen gegeben, beide von der Breite $\frac{1}{2}$, von denen der eine von der x-Achse und der Linie $y=\frac{1}{2}$, der andere von der y-Achse und der Linie $x=\frac{1}{2}$ und zwar von den positiven Teilen derselben begrenzt ist, so folgt aus der angegebenen Beziehung der Wert für weitere positive Werte von x und y.

Im Punkte $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ ist der Wert der Funktion folgendermaßen leicht zu bestimmen.

Wir können ihn als den $n$ten Differentialquotienten der Größe:

$$\alpha\beta v^2\left(e^{\frac{\alpha v}{2}}-1\right)\left(e^{\frac{\beta v}{2}}-1\right):(e^{\alpha v}-1)(e^{\beta v}-1)$$

nach v im Punkte $v=0$ ansehen. Letztere Größe kann aber geschrieben werden:

$$4\alpha\beta v^2\left(\frac{1}{4\left(e^{\frac{\alpha v}{2}}-1\right)\left(e^{\frac{\beta v}{2}}-1\right)}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(e^{\frac{\alpha v}{2}}-1\right)(e^{\beta v}-1)} -\frac{1}{2(e^{\alpha v}-1)\left(e^{\frac{\beta v}{2}}-1\right)}+\frac{1}{(e^{\alpha v}-1)(e^{\beta v}-1)}\right).$$

Erwägen wir, daß für α, β der Ausdruck:

$$\frac{\alpha\beta v^2}{(e^{\alpha v}-1)(e^{\beta v}-1)}=e^{\gamma v}$$

ist, so ergibt sich als Wert der Funktion $\varphi_n(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \alpha,\ \beta)$ der Ausdruck:

$$\frac{1}{2^{n-2}}(n_1 b_1 b_{n-1}\alpha^{n-1}\beta(2-1)(2^{n-1}-1)$$
$$+n_2 b_2 b_{n-2}\alpha^{n-2}\beta^2(2^2-1(2^{n-2}-1)+\cdots n_1 b_{n-1} b_1\alpha\beta^{n-1}(2-1)(2^{n-1}-1)).$$

Ist daher n eine ungerade Zahl und zwar gleich $2m+1$, so reduziert sich dieser Ausdruck auf:

$$-\frac{(2m+1)(2^{2m}-1)}{2^{2m}}(\alpha^{2m}\beta+\alpha\beta^{2m})\,b_{2m},$$

ist dagegen n eine gerade Zahl und zwar gleich $2m$, so erhalten wir für $\varphi_{2m}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha, \beta)$ den Wert: $(m>1)$

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\big((2m)_2 b_2 b_{2m-2}\alpha^{2m-2}\beta^2(2^2-1)(2^{2m-2}-1)$$

$$+\cdots(2m)_2 b_{2m-2} b_2 \alpha^2\beta^{2m-2}(2^2-1)(2^{2m-2}-1)\big).$$

Endlich möge noch mit wenigen Worten auf die Differentialquotienten der BERNOULLIschen Funktionen eingegangen werden. Wir wollen uns dazu die Funktion:

$$\varphi_n(x, y, \alpha, \beta)$$

geschrieben denken:

$$n\frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}}\left(\alpha\beta v\frac{e^{\alpha x v}-1}{e^{\alpha v}-1}\,\frac{e^{\beta y v}-1}{e^{\beta v}-1}\right)_{v=0}.$$

Differenziert man nach x, so wird der Differentialquotient der Klammer:

$$\alpha^2\beta v^2\frac{e^{\alpha x v}-1}{e^{\alpha v}-1}\,\frac{e^{\beta y v}-1}{e^{\beta v}-1}+\alpha^2\beta v^2\frac{1}{e^{\alpha v}-1}\cdot\frac{e^{\beta y v}-1}{e^{\beta v}-1},$$

oder also es ergibt sich die Relation:

$$\frac{\partial\varphi_n(x, y, \alpha, \beta)}{\partial x}=n\alpha\varphi_{n-1}(x, y, \alpha, \beta)$$

$$+n\frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}}\left(\alpha^2\beta v^2\frac{1}{e^{\alpha v}-1}\,\frac{e^{\beta y v}-1}{e^{\beta v}-1}\right)_{v=0}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\alpha v}{e^{\alpha v}-1}=\sum b_r\frac{(\alpha v)^r}{r!},$$

$$\frac{\beta v(e^{\beta y v}-1)}{e^{\beta v}-1}=\sum\varphi_r(y)\frac{(\beta v)^r}{r!},$$

so daß wir für:

$$\frac{\partial\varphi_n(x, y, \alpha, \beta)}{\partial x}$$

den Ausdruck erhalten:

$$n\alpha\varphi_{n-1}(x, y, \alpha, \beta)$$

$$+n\alpha\big(\alpha^{n-1}b_{n-1}\varphi_0(y)+(n-1)_1\alpha^{n-2}\beta b_{n-2}\varphi_1(y)+\cdots\beta^{n-1}b_0\varphi_{n-1}(y)\big)$$

In ähnlicher Weise ist der erste partielle Differentialquotient nach y zu entwickeln.

Die Resultate können in dem folgenden Lehrsatz zusammengefaßt werden:

Die beiden ersten Differentialquotienten der Funktion $\varphi_n(x, y, \alpha, \beta)$ lassen sich in der Form darstellen:

$$\frac{\partial \varphi_n(x, y, \alpha, \beta)}{\partial x} = n\alpha\varphi_{n-1}(x, y, \alpha, \beta) + n\alpha(\alpha b + \beta\varphi(y))^{(n-1)},$$

$$\frac{\partial \varphi_n(x, y, \alpha, \beta)}{\partial y} = n\beta\varphi_{n-1}(x, y, \alpha, \beta) + n\beta(\beta b + \alpha\varphi(x))^{(n-1)},$$

wobei die beiden Ausdrücke:

$$(\alpha b + \beta\varphi(y))^{(n-1)}$$

und

$$(\beta b + \alpha\varphi(x))^{(n-1)}$$

nach dem binomischen Satze zu entwickeln und nach der Entwickelung an Stelle von b^r, $\varphi(x)^r$, $\varphi(y)^r$ resp. zu setzen ist:

$$b_r, \ \varphi_r(x), \ \varphi_r(y).$$

Dabei ist zu bemerken, daß $\varphi_0(x) = \varphi_0(y) = 0$ ist.

§ 4.

Summierung ganzer rationaler Funktionen von x und y. Erste Methode.

Wir hatten gesetzt:

$$\frac{\alpha\beta v^2}{(e^{\alpha v} - 1)(e^{\beta v} - 1)} = e^{\gamma v}.$$

Setzen wir links und rechts an Stelle von v: $-v$, so können wir die Gleichung auch schreiben:

$$(1) \qquad \frac{\alpha\beta v^2}{(1 - e^{-\alpha v})(1 - e^{-\beta v})} = e^{\gamma' v},$$

wobei dann:

$$(2) \qquad \gamma'_n = (-1)^n \gamma_n = (-1)^n (\alpha b + \beta b')^{(n)}$$

ist. Wir schreiben Gleichung (1) in der Form:

$$\alpha\beta v^2 = e^{(\gamma' - \alpha - \beta)v} - e^{(\gamma' - \alpha)v} - e^{(\gamma' - \beta)v} + e^{\gamma' v}$$

und multiplizieren beide Seiten derselben der Reihe nach mit:

$$e^{(x + y + \alpha r + \beta s)v},$$

wobei an Stelle von r und s zu setzen ist resp.:

$$1,\ 2,\ldots p;\quad 1,\ 2,\ldots q,$$

und x und y zwei beliebige Größen bedeuten.

Addieren wir die auf diesem Wege entstandenen Gleichungen und vergleichen den Koeffizienten von v^{n+2} links und rechts, so erhalten wir für die Summe:

$$\alpha\beta(n+2)(n+1)\sum_{r=1}^{r=p}\sum_{s=1}^{s=q}(x+y+\alpha r+\beta s)^n$$

den Ausdruck:

$$(\gamma'+x+y+\alpha p+\beta q)^{(n+2)}-(\gamma'+x+y+\alpha p)^{(n+2)}$$
$$-(\gamma'+x+y+\beta q)^{(n+2)}+(\gamma'+x+y)^{(n+2)}.$$

Derselbe kann auch geschrieben werden:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n+2}(n+2)_\varrho\gamma'_\varrho((x+y+\alpha p+\beta q)^{n+2-\varrho}-(x+y+\alpha p)^{n+2-\varrho}$$
$$-(x+y+\beta q)^{n+2-\varrho}+(x+y)^{n+2-\varrho}).$$

Setzen wir:

$$\varphi(x,\ y)=(x+y+\alpha p+\beta q)^{n+2}-(x+y+\alpha p)^{n+2}$$
$$-(x+y+\beta q)^{n+2}+(x+y)^{n+2},$$

so ist die Klammer gleich:

$$\varepsilon\frac{\partial^\varrho\varphi(x,\ y)}{\partial x^\varrho}=\varepsilon\frac{\partial^\varrho\varphi(x,\ y)}{\partial x^{\varrho-1}\partial y}=\cdots\varepsilon\frac{\partial^\varrho\varphi(x,\ y)}{\partial y^\varrho},$$

wobei ε den Wert hat:

$$\varepsilon=\frac{1}{n+2,\ n+1\ldots n-\varrho+3}.$$

Erwägen wir noch den durch Gl. (2) gegebenen Wert von γ'_ϱ: so folgt, daß die nach ϱ genommene Summe auch geschrieben werden kann:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n+2}\frac{(-1)^\varrho}{\varrho!}\left(\alpha b\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta b'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{(\varrho)},$$

wobei das Symbol:

$$\left(\alpha b\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta b'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{(\varrho)}$$

in bekannter Weise aufzulösen ist.

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:

Versteht man unter $f(x, y)$ die spezielle ganze rationale Funktion:

$$(x+y)^{n+2},$$

so findet die Beziehung statt:

$$\alpha\beta\sum_{r=1}^{r=p}\sum_{s=1}^{s=q}\frac{\partial^2 f(x+\alpha r,\ y+\beta s)}{\partial x\partial y}=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n+2}\frac{(-1)^\varrho}{\varrho!}\left(\alpha b\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta b'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{(\varrho)},$$

wobei die Funktion $\varphi(x, y)$ durch die Gleichung definiert ist:

$$\psi(x, y)=f(x+\alpha p,\ y+\beta q)-f(x+\alpha p,\ y)-f(x,\ y+\beta q)+f(x, y).$$

In dieser Gleichung sind x, y, α, β willkürliche Größen. Denken wir an Stelle derselben uns resp. gesetzt:

$$a_0 x,\ a_1 y,\ a_0\alpha,\ a_1\beta,$$

wobei a_0 und a_1 zwei weitere willkürliche Größen bedeuten, so wird die Gleichung richtig bleiben — dann aber folgt sofort, daß sie auch bestehen bleiben muß, wenn wir unter $f(x, y)$ die Funktion:

$$(a_0 x+a_1 y)^{n+2}$$

und unter $\varphi(x, y)$ die hiermit zummenhängende Funktion:

$$\varphi(x, y)=f(x+\alpha p,\ y+\beta q)-f(x+\alpha p,\ y)-f(x,\ y+\beta q)+f(x, y)$$

verstehen, während α und β ihre Werte beibehalten.

Hieraus folgt aber mit Hilfe weniger Schlüsse der *Lehrsatz:*

Versteht man unter $f(x, y)$ eine beliebige ganze rationale Funktion von x und y von der Ordnungszahl $n+2$, unter α und β beliebige Größen, so findet die Beziehuny statt:

$$\alpha\beta\sum_{r=1}^{r=p}\sum_{s=1}^{s=q}\frac{\partial^2 f(x+\alpha r,\ y+\beta s)}{\partial x\partial y}=\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n+2}\frac{(-1)^\varrho}{\varrho!}\left(\alpha b\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta b'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{(\varrho)},$$

wobei die Funktion $\varphi(x, y)$ durch die Gleichung definiert ist:

$$\varphi(x,y)=f(x+\alpha p,\ y+\beta q)-f(x+\alpha p, q)-f(x,\ y+\beta q)+f(x,y).$$

§ 5.[1]

Summierung ganzer rationaler Funktionen von x und y. Zweite Methode.

Das Schlußresultat des vorigen Paragraphen kann noch auf eine andere Methode abgeleitet werden, die vor der vorigen den Vorzug hat, daß sie auf allgemeine Funktionen übertragen werden kann.

1) Siehe in Bezug auf die beiden letzten Paragraphen die citierte Note des Verfassers in der Comptes Rendus.

Wir verstehen dazu unter $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x und y von der Ordnungszahl m und bilden den Ausdruck:

$$(1)\quad F(x,y) = f(x-\alpha,\, y-\beta) - f(x-\alpha,\, y) - f(x,\, y-\beta) + f(x,y).$$

Derselbe kann nach dem TAYLORschen Lehrsatz entwickelt werden und zwar wird:

$$(2)\qquad F(x,y) = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\left(\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(\mu)} - \alpha^\mu \frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu} - \beta^\mu \frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right).$$

In ähnlicher Weise können die ersten, zweiten etc. Differentialquotienten von $F(x, y)$ nach Potenzen von α und β entwickelt werden, wobei sich das Gleichungssystem (3) ergibt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(\mu)} - \alpha^\mu \frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial x^{\mu+1}} - \beta^\mu \frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial y^\mu \partial x}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(\mu)} - \alpha^\mu \frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial x^\mu \partial y} - \beta^\mu \frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial y^{\mu+1}}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_{1}^{m-2} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(\mu)} - \alpha^\mu \frac{\partial^{\mu+2} f}{\partial x^{\mu+2}} - \beta^\mu \frac{\partial^{\mu+2} f}{\partial y^\mu \partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \sum_{1}^{m-2} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(\mu)} - \alpha^\mu \frac{\partial^{\mu+2} f}{\partial x^{\mu+1} \partial y} - \beta^\mu \frac{\partial^{\mu+2} f}{\partial y^{\mu+1} \partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sum_{1}^{m-2} \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(\mu)} - \alpha^\mu \frac{\partial^{\mu+2} f}{\partial x^\mu \partial y^2} - \beta^\mu \frac{\partial^{\mu+2} f}{\partial y^{\mu+2}}\right),$$

. . . .

Die Gleichung (2) und die Gleichungen des Systemes (3) multiplizieren wir der Reihe nach mit:

$$1,\quad -c_{10}\alpha,\quad -c_{01}\beta,\quad \frac{1}{1\cdot 2}c_{20}\alpha^2,\quad \frac{2}{1\cdot 2}c_{11}\alpha\beta,\quad \frac{1}{1\cdot 2}c_{02}\beta^2,$$

$$-\frac{1}{3!}c_{30}\alpha^3,\quad -\frac{3_1}{3!}c_{21}\alpha^2\beta,\quad -\frac{3_2}{3!}c_{12}\alpha\beta^2,\quad -\frac{1}{3!}c_{03}\beta^3\quad \text{etc.},$$

wobei die Größen c einstweilen willkürlich gelassen werden und addieren sie sämtlich. Die rechte Seite wollen wir uns nach

steigenden Differentialquotienten von $f(x, y)$ in der gewöhnlichen Weise geordnet denken, dann nimmt das erste Glied die Form an:

$$\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Wir wollen nun versuchen, die Größen c so zu bestimmen, daß die Koeffizienten aller übrigen Differntialquotienten verschwinden. Nehmen wir zunächst die Reihe der Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}, \cdots \quad \frac{\partial^\mu f}{\partial x^{\mu-1} \partial y}, \cdots$$

so werden die Koeffizienten Null, wenn die Gleichungen bestehen:

$$1 + 2c_{10} = 0,$$

$$1 + 3_1 c_{10} + 3_2 c_{20} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$1 + (\mu - 1)_1 c_{10} + (\mu - 1)_2 c_{20} + \cdots (\mu - 1)_{\mu-2} c_{\mu-20} = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Größen c_{10}, c_{20}, c_{30}. ... resp. gleich b_1, b_2, b_3 ... sein müssen. Dasselbe Resultat ergibt sich für die Größen c_{01}, c_{02}, c_{03}, ... Wir nehmen nunmehr die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}, \cdots \quad \frac{\partial^\mu f}{\partial x^{\mu-2} \partial y^2}, \cdots,$$

so werden die Koeffizienten Null, wenn die Gleichungen bestehen:

$$c_{01} + 2c_{11} = 0,$$

$$c_{01} + 3_1 c_{11} + 3_2 c_{21} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{01} + (\mu - 2)_1 c_{11} + (\mu - 2)_2 c_{21} + \cdots (\mu - 2)_{\mu-3} c_{\mu-31} = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus folgt, daß die Größen:

$$c_{11} : c_{01}, \quad c_{21} : c_{01}, \ldots \ c_{\mu-31} : c_{01}$$

resp. gleich sind:

$$b_1, \quad b_2, \ldots \ b_{\mu-3},$$

oder also es folgt:

$$c_{11} = b_1 b_1, \quad c_{21} = b_2 b_1, \ldots \ c_{\mu-31} = b_{\mu-3} b_1.$$

In ähnlicher Weise kann weiter gegangen werden Es ergibt sich das Resultat, daß die Größen $c_{\mu\nu}$ durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt sind und den Wert besitzen:

$$c_{\mu\nu} = b_\mu b_\nu = c_{\nu\mu}. \tag{4}$$

Die linke Seite nimmt die Form an:

$$\sum_0^m \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\left(\alpha b \frac{\partial F}{\partial x} + \beta b' \frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(\mu)},$$

so daß wir den Lehrsatz erhalten:

Versteht man unter $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x und y von der Ordnung m und setzt:

$$F(x, y) = f(x-\alpha, y-\beta) - f(x-\alpha, y) - f(x, y-\beta) + f(x, y),$$

wobei α und β vollkommen willkürliche Größen bedeuten, so findet die Beziehung statt:

$$\alpha\beta \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \sum_0^m \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\left(\alpha b \frac{\partial F}{\partial x} + \beta b' \frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(\mu)}.$$

In dieser Formel setzen wir an Stelle von x und y die Größen $x + r\alpha$, $y + s\beta$ und lassen r und s der Reihe nach resp. die Werte annehmen:

$$1, 2, \ldots p; \quad 1, 2, \ldots q$$

und addieren sämtliche Formeln. Dann erhalten wir auf der linken Seite die Summe:

$$\alpha\beta \sum_{r=1}^{r=p} \sum_{s=1}^{s=q} \frac{\partial^2 f(x + \alpha r, y + \beta s)}{\partial x \partial y}.$$

Die rechte Seite nimmt die Form an:

$$\sum_0^m \frac{(-1)^\mu}{\mu!}\left(\alpha b \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta b' \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^{(\mu)},$$

wenn die Funktion $\varphi(x, y)$ durch die Gleichung definiert wird:

$$\varphi(x, y) = f(x + \alpha p, y + \beta q) - f(x + \alpha p, y) - f(x, y + \beta q) + f(x, y).$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:

Versteht man unter $f(x, y)$ eine beliebige ganze rationale

Funktion von x und y von der Ordnung m und unter α und β beliebige Größen, so findet die Beziehung statt:

$$\alpha\beta\sum_{r=1}^{r=p}\sum_{s=1}^{s=q}\frac{\partial^2 f(x+\alpha r,\, y+\beta s)}{\partial x\,\partial y}=\sum_{0}^{m}\frac{(-1)^\mu}{\mu!}\left(\alpha\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta b'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{(\mu)},$$

wobei die Funktion $\varphi(x, y)$ durch die Gleichung definiert ist:

$$\varphi(x,y)=f(x+\alpha p, y+\beta q)-f(x+\alpha p, y)-f(x, y+\beta q)+f(x,y).$$

Es ist das derselbe Satz wie am Ende des vorigen Parapraphen, nur daß die Bezeichnungen zum Teil geändert worden sind.

§ 6.

Aufstellung einer allgemeinen Summenformel im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen.

Die zuletzt angewandte Methode gibt die Möglichkeit, eine allgemeine Summenformel im Gebiete der Funktionen zweier veränderlichen Größen aufzustellen. Wir nehmen dazu an, daß $f(x, y)$ eine beliebige Funktion von x und y sei, die sich nach dem Taylorschen Satze entwickeln läßt und setzen wiederum:

(1) $F(x, y)=f(x-\alpha, y-\beta)-f(x-\alpha, y)-f(x, y-\beta)+f(x, y),$

dann tritt an Stelle der Formel (2) des vorigen Paragraphen die Formel:

(2) $$F(x, y) = S_{m0} + R_{m0},$$

wobei S_{m0} der Wert der rechten Seite in der Formel (2) des vorigen Paragraphen ist, und für R_{m0} der Ausdruck gewählt werden kann:

$$\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_0^1(1-t)^m$$

$$\left[\left(\alpha\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x}+\beta\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}\right)^{(m+1)}-\alpha^{m+1}\frac{\partial^{m+1}f(\xi,y)}{\partial x^{m+1}}-\beta^{m+1}\frac{\partial^{m+1}f(x,\eta)}{\partial y^{m+1}}\right]dt,$$

wobei gesetzt ist:

$$\xi = x-\alpha t,\quad \eta = y-\beta t.$$

In ähnlicher Weise ist in den Gleichungen des Systemes (3) des vorigen Parapraphen auf der rechten Seite je ein Rest hinzu-

zufügen. Bezeichnen wir denselben resp. durch $R_{m-1,0}$, $R_{m-1,1}$, $R_{m-2,0}$, $R_{m-2,1}$, $R_{m-2,2}$, ... so erhalten wir für dieselben die Ausdrücke:

$$R_{m-1,0} = \frac{(-1)^m}{m-1!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x} + \beta\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}\right)^{(m)} - \alpha^m\frac{\partial^{m+1} f(\xi,y)}{\partial x^{m+1}} - \beta^m\frac{\partial^{m+1} f(x,\eta)}{\partial y^m \partial x}\right] dt,$$

$$R_{m-1,1} = \frac{(-1)^m}{m-1!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x} + \beta\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}\right)^{(m)} - \alpha^m\frac{\partial^{m+1} f(\xi,y)}{\partial x^m \partial y} - \beta^m\frac{\partial^{m+1} f(x,\eta)}{\partial y^{m+1}}\right] dt$$

. . . .

Die Ausdrücke für:

$$R_{m,0},\quad R_{m-1,0},\quad R_{m-1,1},\quad R_{m-2,0},\quad R_{m-2,1},\quad R_{m-2,2}\ \ldots$$

sind nun der Reihe nach zu multiplizieren mit:

$$1,\quad -\alpha b_1,\quad -\beta b_1,\quad \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}b_2,\quad \frac{2\alpha\beta}{1\cdot 2}b_1 b_1,\quad \frac{\beta^2}{1\cdot 2}b_2,\ \ldots$$

und zu addieren.

Bei der Addition sind dreierlei Arten von Gliedern zu unterscheiden, erstens solche, bei denen Faktoren von der Form:

$$\frac{\partial^\mu}{\partial x^\nu \partial y^{\mu-\nu}}\left(\alpha\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x} + \beta\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}\right)^{(m-\mu+1)}$$

vorkommen, zweitens solche, bei welchen sich Faktoren von der Form:

$$\frac{\partial^{m+1} f(\xi,y)}{\partial x^{m-\mu+\nu+1}\partial y^{\mu-\nu}}$$

und endlich solche, bei denen sich Faktoren von der Form:

$$\frac{\partial^{m+1} f(x,\eta)}{\partial x^{\mu-\nu}\partial y^{m-\mu+\nu+1}}\ .$$

vorfinden.

Wir wollen uns zuerst mit den Gliedern der ersten Art beschäftigen. Der hierauf bezügliche, innerhalb des Integrals stehende Teil kann in die Doppelsumme zusammengefaßt werden:

$$\sum\sum m_\mu \mu_\nu b_\nu b_{\mu-\nu}\alpha^\nu\beta^{\mu-\nu}(1-t)^{m-\mu}D_{\mu\nu},$$

wobei gesetzt ist:

$$D_{\mu\nu} = \frac{\partial^\mu}{\partial x^\nu \partial y^{\mu-\nu}} \left(\alpha \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x} + \beta \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}\right)^{(m-\mu+1)}$$

und die Summation nach μ von 0 bis m, nach ν von 0 bis μ zu nehmen ist. Nun kann die Größe $D_{\mu\nu}$ aber symbolisch geschrieben werden:

$$D_{\mu\nu} = \left(\alpha \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x} + \beta \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}\right)^{(m-\mu+1)} \frac{\partial^\mu f(\xi,\eta)}{\partial x^\nu \partial y^{\mu-\nu}}$$

oder auch:

$$\alpha \frac{\partial D'_{\mu\nu}}{\partial x} + \beta \frac{\partial D'_{\mu\nu}}{\partial y},$$

wobei $D'_{\mu\nu}$ den Wert besitzt:

$$D'_{\mu\nu} = \left(\alpha \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x} + \beta \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}\right)^{(m-\mu)} \frac{\partial^\mu f(\xi,\eta)}{\partial x^\nu \partial y^{\mu-\nu}}.$$

Setzen wir diesen Wert in unsere Doppelsumme ein, so nimmt sie die Form an:

$$\alpha \frac{\partial S}{\partial x} + \beta \frac{\partial S}{\partial y},$$

wenn wir unter S die Summe verstehen:

$$\sum\sum m_\mu \mu_\nu b_\nu b_{\mu-\nu} \alpha^\nu \beta^{\mu-\nu} (1-t)^{m-\mu} D'_{\mu\nu},$$

die auch symbolisch geschrieben werden kann:

$$\left(\alpha \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x}(1-t+b) + \beta \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}(1-t+b')\right)^{(m)}.$$

Wir nehmen jetzt die vorhin angedeutete zweite Kategorie von Gliedern. Der hierauf bezügliche Teil, welcher innerhalb des Integralzeichens steht, kann geschrieben werden:

$$\alpha \sum\sum m_\mu \mu_\nu b_\nu b_{\mu-\nu} \alpha^{m-\mu+\nu} \beta^{\mu-\nu} (1-t)^{m-\mu} \frac{\partial^{\mu+1} f(\xi,y)}{\partial x^{m-\mu+\nu+1} \partial y^{\mu-\nu}}.$$

Wendet man ähnliche Betrachtungen wie vorhin an, so folgt als Wert dieses Teiles:

$$\alpha \frac{\partial S_1}{\partial x},$$

wenn unter S_1 die Größe verstanden wird:

$$S_1 = \left(\alpha \frac{\partial f(\xi,y)}{\partial x}(1-t+b) + \beta b' \frac{\partial f(\xi,y)}{\partial y}\right)^{(m)}.$$

Analog wird sich beim dritten Teil ergeben:

$$\beta \frac{\partial S_2}{\partial y},$$

wenn gesetzt wird:

$$S_2 = \left(\alpha b \frac{\partial f(x,\eta)}{\partial x} + \beta \frac{df(x,\eta)}{\partial y} (1 - t + b')\right)^{(m)}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:

Versteht man unter $f(x, y)$ eine beliebige Funktion von x und y, die nach dem Taylorschen Lehrsatz entwickelt werden kann, unter α und β beliebige Größen, so findet die Beziehung statt:

$$\alpha\beta \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \frac{(-1)^\mu}{\mu!} \left(\alpha b \frac{\partial F}{\partial x} + \beta b' \frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(\mu)} + R_m,$$

wobei gesetzt ist:

$$F(x,y) = f(x-\alpha,\ y-\beta) - f(x-\alpha,\ y) - f(x,\ y-\beta) + f(x,y)$$

und R_m den Wert besitzt:

$$R_m = \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^1 \left(\alpha \frac{\partial S}{\partial x} + \beta \frac{\partial S}{\partial y} - \alpha \frac{\partial S_1}{\partial x} - \beta \frac{\partial S_2}{\partial y}\right) dt.$$

In der allgemeinen Summenformel würde dann ein ähnliches Restglied auftreten, welches aus dem soeben hingeschriebenen durch Summation entsteht.

Die Form, die dieses Restglied besitzt, kann als eine einfache nicht bezeichnet werden. Es dürfte sich empfehlen, bei Anwendungen aus derselben weitere Formen abzuleiten, ähnlich wie es bei der gewöhnlichen Mac-Laurinschen Summenformel geschieht, indessen würde es den Rahmen dieser Betrachtungen überschreiten, hierauf näher einzugehen.

Druckfertig erklärt 12. III. 1903.]

Die

MAKROSEISMISCHEN SCHÜTTERGEBIETE

des Greizer Bebens vom 1. Mai 1902 und

des Böhmerwald-Bebens vom 26. November 1902

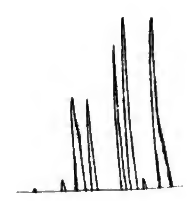
und deren

Lage zur Seismometer-Station Leipzig.

Maßstab 1:1.000.000

Kilometer





INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

FÜNFUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1903.

II.

MIT 1 TAFEL UND 1 TEXTFIGUR.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1903.

SITZUNG VOM 2. MÄRZ 1903.

Es hat vorgetragen:

Herr M. Siegfried: „Zur Kenntnis der Hydrolyse des Eiweißes".

Herr A. Mayer teilt eine Notiz von Herrn G. Scheffers mit: „Bemerkungen zu einem Satze von Sophus Lie über algebraische Funktionen".

Herr Engel einen Aufsatz von G. Kowalewski: „Über projektive Transformationsgruppen".

Geschäftlich haben vorgelegen:

1. Die Anzeige der Münchner Akademie betreffend den am 28—29. Mai in München abzuhaltenden Kartelltag.

2. Die Einladung der Royal Society zu der für den 4. Juni in London anberaumten Sitzung des Komitees der internationalen Association der Akademien. In beiden Fällen behält sich die Klasse vor, erst nach Kenntnis der Tagesordnungen Beschluß zu fassen.

3. wird eine Aufforderung der Berliner Akademie mitgeteilt zur Beihilfe an den Vorarbeiten zur interakademischen Leibniz-Ausgabe.

4. Einige die Härtelstiftung betr. Fragen werden den Sekretären der beiden Klassen zur Erledigung überwiesen.

5. Die ungarische Akademie der Wissenschaften übersandte die Ausschreibung eines Bolyai-Preises.

Zur Kenntnis der Hydrolyse des Eiweißes.

Von

M. Siegfried.

Das Studium der Peptone ist, wie ich bereits wiederholt[1]) hervorgehoben habe, in erster Linie geeignet, zu Einblicken in die Konstitution des Eiweißmoleküles zu führen. Denn die Peptone entstehen durch die allmählich hydrolysierende Wirkung

1) M. Siegfried, Arch. f. Anat. u. Physiologie, physiol. Abtlg: 1894. S. 417 u. Ber. d. deutschen chem. Gesellsch. 33 S. 2852.

der Verdauungsenzyme aus dem Eiweiß, sind selbst noch eiweißähnlich, dabei aber viel kleinere Moleküle als das Eiweiß. Gelingt es erst die Konstitution eines Peptons festzustellen, so ist der Weg von den Peptonen über die Albumosen zum Eiweiß gegeben.

Seitdem es mit Hilfe der von mir beschriebenen Eisenmethode möglich war[1]), reine, wohl charakterisierte Peptone darzustellen, ist die Aufgabe, die Spaltungsprodukte derselben zu untersuchen, von meinen Schülern und mir bearbeitet worden. In allen Fällen haben sich als Spaltungsprodukte Basen, Arginin, und Lysin, sowie Amidosäuren, unter diesen in erster Linie Glutaminsäure ergeben.

Mein Bestreben ging dahin, den Abbau der Peptone schrittweise vorzunehmen, um so wieder einfachere Komplexe als die Peptone, aber größere als die Basen und Amidosäuren, zu erhalten. Denn nur so läßt sich eine Kenntnis der Atomgruppen gewinnen, aus denen die letzten Spaltungsprodukte, die Amidosäuren und Basen, entstehen.

Der weiteren, successiven Spaltung wurde das durch tryptische Verdauung aus Leim dargestellte Pepton von der einfachsten Formel $C_{19}H_{30}N_6O_9$, die zugleich die Äquivalentformel der ausgesprochenen Säure ist, unterworfen. Wie bereits mitgeteilt[2]), wurden als Spaltungsprodukte bei *vollständiger* Zersetzung mit Schwefelsäure aus diesem Pepton Arginin, Lysin, Glykokoll und Glutaminsäure erhalten.

Um ein Bild der *allmählichen* Einwirkung verdünnter Salzsäure auf dieses Pepton zu gewinnen, wurde während der Spaltung in kurzen Intervallen das Sinken des Drehungsvermögens der salzsauren Lösung untersucht. Das Pepton dreht sehr stark nach links, $[\alpha]_D^{20} = -101^0$, die Summe der Spaltungsprodukte in der salzsauren Lösung nach rechts. Gerade wegen seines hohen Drehungsvermögens wurde dieses Pepton gewählt.

Versuch I. Eine Lösung des Peptons in 12,5% Salzsäure, welche 10% Zinnchlorür enthielt, drehte im 20^{cm} Rohr um $6,1^0$ nach links. Die Lösung wurde vor dem Rückflußkühler rasch zum Sieden erhitzt, jedesmal eine bestimmte Zeit im Sieden er-

1) M. Siegfried, Ber. d. deutschen chem. Gesellschaft 33 S. 2851. Derselbe Zeitschr. f. physiol. Chemie 35 S. 164.

2) M. Siegfried, Zeitsch. f. physiol. Chemie 35 S. 187.

halten, und rasch abgekühlt; hierauf wurde im 20cm Rohr das Drehungsvermögen bestimmt.

So wurde erhalten: nach 0 Minuten Sieden $\alpha = -\ 6{,}1^0$
„ 20 „ „ $\alpha = -\ 2{,}25^0$
„ 85 „ „ $\alpha = -\ 0{,}68^0$
„ 205 „ „ $\alpha = -\ 0{,}34^0$
„ 325 „ „ $\alpha = -\ 0{,}06^0$
„ 925 „ „ $\alpha = +\ 0{,}51^0$

Da Versuch I gezeigt hatte, daß durch Sieden mit 12,5% Salzsäure und Zinnchlorür die Zersetzung so rasch erfolgt, daß konstante Zwischenphasen nicht zu beobachten waren, wurde in einem

II. Versuch mit 12,5% Salzsäure, die 20% Zinnchlorür enthielt, zuerst bei Zimmertemperatur, dann bei 38° zersetzt. Es wurden beobachtet:

Nach 0 Stunden $\alpha = -\ 11{,}76^0$
„ 14 „ bei Zimmertemperatur $\alpha = -\ 11{,}70^0$
„ 38 „ „ „ $\alpha = -\ 11{,}45^0$
„ 62 „ „ „ $\alpha = -\ 11{,}16^0$
„ 86 „ „ „ $\alpha = -\ 10{,}89^0$
„ 134 „ „ „ $\alpha = -\ 10{,}46^0$

Die durch Sinken des Drehungsvermögens kontrollierte Spaltung des Peptons erfolgte also bei Zimmertemperatur außerordentlich langsam. Deshalb wurde dieselbe Lösung weiter auf 38° erwärmt.

Nach 22 Stunden bei 38° $\alpha = -\ 8{,}40^0$
„ 70 „ „ „ $\alpha = -\ 6{,}14^0$
„ 118 „ „ „ $\alpha = -\ 5{,}00^0$
„ 166 „ „ „ $\alpha = -\ 4{,}82^0$
„ 214 „ „ „ $\alpha = -\ 5{,}00^0$

Dieser Versuch zeigt, daß durch Spaltung mit 12,5% Salzsäure bei 38° die Zersetzung, soweit sie durch das Drehungsvermögen der Lösung kontrollierbar ist, nach 118 Stunden Halt macht und auch nach 214 Stunden nicht merklich weiter geht.

Hieraus war zu schließen, daß Zwischenprodukte entstanden waren, welche der weiteren Spaltung durch 12,5% Salzsäure bei 38° hartnäckig widerstehen.

Zu den weiteren Versuchen, welche die Isolierung zunächst eines dieser Zwischenprodukte bezweckten, wurde das Pepton 7 Tage lang mit der 10fachen Menge 12,5% Salzsäure im

Brutschrank gehalten, das Reaktionsprodukt mit Phosphorwolframsäure ausgefällt.

Der Phosphorwolframsäureniederschlag wurde mit 5% H_2SO_4 Cl-frei gewaschen, in heißem Wasser unter Zusatz von Ammoniak gelöst und mit Barythydrat zersetzt. Das Filtrat vom Barytniederschlage wurde nach Entfernung des überschüssigen Barytes durch Kohlensäure eingedampft und hinterließ einen Sirup, der nach dem Trocknen bei 70° und über Schwefelsäure im Vacuum stark alkalisch reagierte und die Biuretreaktion gab. Derselbe wurde in wenig Wasser gelöst, die Lösung mit Salzsäure angesäuert. Hierbei entwich Kohlensäure. Die erhaltene Substanz bestand vorwiegend aus einer starken Base, welche Kohlensäure bindet. Zu der schwachsalzsauren Lösung wurde Platinchlorid gegeben und durch Alkohol und Äther ein Platinsalz gefällt. Bei dieser Darstellung verschmierte zunächst das außerordentlich leicht lösliche Platinsalz und wurde durch Lösen in wenig Wasser und Fällen mit Alkohol und Äther in hellbraunen Flocken erhalten. Auf keine Weise, auch selbst bei über Monate ausgedehnten Versuchen, konnte es ganz oder teilweise kristallisiert erhalten werden.

Die Analysen der bei verschiedenen Darstellungen erhaltenen, wiederholt umgefällt und fraktioniert gefällten Platinsalze gaben zwar ähnliche, aber keine so konstanten Werte, daß aus ihnen die Zusammensetzung der Base hätte abgeleitet werden können.

Um ausgiebigeres Material zu gewinnen, wurde versucht, die Base direkt aus Gelatine darzustellen. In den zu dem Zwecke ausgeführten Versuchen wurde Gelatine mit der 10fachen Menge 12,5% gr. Salzsäure 12 Tage auf 38° erwärmt, das mit dem gleichen Volumen Wassers verdünnte, von einer sehr geringen flockigen Ausscheidung abfiltrierte, Reaktionsgemisch wurde unter kräftigem Umrühren mit 50%iger Phosphorwolframsäure ausgefällt. Die weitere Verarbeitung geschah wie in den mit Pepton angestellten Versuchen. Trotz des jetzt reichlicher vorhandenen Materiales konnten keine Platinsalze von ganz konstanter Zusammensetzung erhalten werden. Auffallend scharf war jedoch die Konstanz des Verhältnisses C : N = 2. Später nach Feststellung der Zusammensetzung der Base fanden die Analysen der Platinsalze ihre Erklärung. Die Werte entfernten sich nur wenig von den für das Platinsalz der Formel berechneten, und zeigten, daß die Base mit nicht genau äquivalenten Mengen Platinchlorids verbunden war.

Hingegen führte die Darstellung des Sulfates zum Ziel. Die aus dem Phosphorwolframsäureniederschlage erhaltene, mit Alkohol gefällte Base, die stets Kohlensäure enthielt und stark alkalisch reagierte, wurde in Schwefelsäure verschiedener Konzentration gelöst und gefällt. Es ergab sich für die aus verschiedenen Darstellungen erhaltenen Präparate konstante Zusammensetzung, die auch nach wiederholtem Umfällen aus Schwefelsäure konstant blieb.

I. Darstellung. Die durch Zersetzung der Gelatine erhaltene Rohbase wurde in das Platinsalz übergeführt. Aus 400 gr. Gelatine wurden 155 gr. Platinsalz gewonnen. Dasselbe wurde mit Schwefelwasserstoff zersetzt, das Filtrat vom Schwefelplatin eingeengt und mit Phosphorwolframsäure ausgefällt. Aus dem Niederschlage, der mit 5%iger Schwefelsäure chlorfrei gewaschen war, wurde die Base dargestellt. Das Gewicht der aus sehr verdünnt ammoniakalischer Lösung in Alkohol gefällten Base, über Schwefelsäure getrocknet, betrug 12 gr. Die Verluste bei der wiederholten Ausfällung mit Phosphorwolframsäure, Fällung des Platinsalzes und der Base sind sehr bedeutende wegen der relativen Löslichkeit der betreffenden Niederschläge in den betreffenden Flüssigkeiten, ermöglichen aber gerade deshalb die sichere Reindarstellung. 5 gr. dieser Base wurden in 15^{cc} Wasser + 5 gr. konz. Schwefelsäure gelöst, in Alkohol verrührt, abgesaugt und mit Alkohol und Äther gewaschen. Ausbeute an Sulfat: 3,5 gr.

Analysen der bei 70^0 bis zum konstanten Gewichte getrockneten Substanz.

I. 0,2025 gr S. g. 0,2351 gr. CO_2 u. 0,1128 g. H.
$C = 31{,}66\%$ $H = 6{,}23\%$

II. 0,2002 gr. S. g. $28{,}2^{ccm}$ tr. N bei 757^{mm} Bar. u. 24^0 T.
$= 16{,}13\%$ N

Das Sulfat wurde aus 10%iger Schwefelsäure in Alkohol umgefällt, abgesaugt, über Schwefelsäure und zur Analyse bei 70^0 bis zur Gewichtskonstanz getrocknet.

III. 0,1960 gr. S. g. 0,2308 gr. CO_2 u. 0,1125 gr. H_2O
$C = 32{,}10\%$ $H = 6{,}27\%$

IV. 0,2085 gr. S. g. $29{,}7^{ccm}$ tr. N. b. 755^{mm} Bar. u. 27^0
$N = 16{,}10\%$

V. 0,2141 gr. S. g. 0,1552 gr. $BaSO_4 = 9{,}95\%$ S

II. *Darstellung.* 30 gr. aus dem Phosphorwolframsäure-niederschlage einer anderen Zersetzung erhaltenen Rohbase wurden in 50 ccm Wasser gelöst, dazu die Mischung von 15 ccm Wasser und 15 gr. konz. Schwefelsäure gegeben und in Alkohol gefällt. Die Substanz wurde z. Analyse bei 100° getrocknet:

VI. 0,1845 gr. S. g. 0,2181 gr. CO_2 u. 0,0948 gr. H_2O
C = 32,26 % H = 5,75 %

VII. 0,2028 gr. S. g. 28,4 ccm tr. N. b. 20° u. 752 mm = 16,14 N

VIII. 0,2050 gr. S. g. 0,1456 gr. $BaSO_4$ = 9,75 % S

12,5 gr. des Sulfates wurden in einer Mischung von 25 ccm Wasser und 20 gr. konzentrierter Schwefelsäure (!) gelöst und in Alkohol verührt. Das ausgeschiedene Sulfat wurde in ca. 40 ccm Wasser, dem einige Tropfen konzentrierter Schwefelsäure zugesetzt waren, gelöst und in 2 Liter Alkohol verrührt. Ausbeute 6,5 gr.

Dieses Sulfat war also zweimal umgefällt, d. h. dreimal aus Schwefelsäure verschiedener Konzentration gefällt. Es besaß die gleiche Zusammensetzung, wie das einmal gefällte.

Analysen der bei 70° b. z. c. G. getr. S.

IX. 0,1997 gr. S. g. 0,2353 gr. CO_2 u. 0,1101 gr. H_2O
C = 32,13 % H = 6,16 %

X. 0,2032 gr. S. g. 0,2401 gr. CO_2 C = 32,23 %

XI. 0,2016 „ „ „ 27,8 ccm tr. N. b. 20° u. 764 mm = 16,15 %

XII. 0,1991 „ „ „ 0,1431 gr. $BaSO_4$ S = 9,87 %

Von diesem Sulfate wurden 4,5 gr. in möglichst wenig Wasser und einigen Tropfen konzentrierter Schwefelsäure gelöst

Analysen-

	Präparat I		Präparat II			Präparat III		
%	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
C	31,66	—	32,10	—	—	32,26	—	—
H	6,23	—	6,27	—	—	5,75	—	—
N	—	16,13	—	16,10	—	—	16,14	—
S	—	—	—	—	9,95	—	—	9,75

Es berechnet sich für das *Sulfat* die Formel:

$$(C_{21}H_{39}N_9O_8)_2\ (H_2SO_4)_5$$

und in Alkohol verrührt. Ausbeute 2,8 gr. Dieses Präparat war also viermal gefällt. Es besaß die gleiche Zusammensetzung wie die früheren. Es enthielt ca. 1 % Asche.

Analysen:

XIII. 0,2022 gr. S. g. 0,2362 gr. CO_2 u. 0,1119 gr. H_2O
C = 31,86 % H = 6,19 %

XIV. 0,1990 gr. S. g. 0,2362 gr. CO_2 u. 0,1106 gr. H_2O
C = 31,78 % H = 6,21 %

XV. 0,2022 gr. S. g. 27,4^{ccm} tr. N. b. 759^{mm} 16°
N. = 15,99 %

XVI. 0,2009 gr. S. g. 0,1478 gr. $BaSO_4$ S = 10,10 %

Der Umstand, daß das viermal gefällte Sulfat dieselbe Zusammensetzung wie das dreimal gefällte und das einmal gefällte hatte, und daß diese Zusammensetzung bei verschiedenen Darstellungen die gleiche war, berechtigt zu dem Schlusse, daß das Sulfat ein *einheitlicher* Körper ist. Denn es ist ausgeschlossen, daß ein Gemenge heterogener Verbindungen bei den mannigfachen Operationen, dem Umfällen aus verschiedenen Konzentrationen, aus verschiedenem Gehalte an Schwefelsäure, Operationen, bei denen stets ein sehr beträchtlicher Teil der Substanz in den Flüssigkeiten, aus denen der betreffende Niederschlag sich abscheidet, zurückbleibt, sodaß jede Umfällung einer fraktionierten Fällung gleichkommt, stets in gleichem Verhältnis gemischt erhalten würde.

Die meisten hier mitgeteilten C-, H-, und N-Bestimmungen wurden von Herrn E. Singewald ausgeführt. Obgleich die für Wasserstoff erhaltenen Werte fast durchweg bei großer Konstanz

Resultate.

Präparat IV				Präparat V				Berechnet
IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	%
32,13	32,23	—	—	31,86	31,78	—	—	31,86
6,16	—	—	—	6,19	6,21	—	—	5,61
—	—	16,15	—	—	—	15,99	—	15,98
—	—	—	9,87	—	—	—	10,10	10,13

und für die Base:

$$C_{21}H_{39}N_9O_8.$$

untereinander gegenüber den berechneten um ca. 0,5 % höher sind, nehme ich für die Anzahl der in der Base enthaltenen Wasserstoffatome keinen größeren Wert an, sondern setze das plus von Wasserstoff auf Rechnung von unvermeidlichen Analysenfehlern der schwefelreichen Substanz. Es ist zu berücksichtigen, daß die scharf getrocknete Substanz schon beim Einführen des Schiffchens in das Verbrennungsrohr in dem wasserdampfreichen Verbrennungszimmer Wasser anzieht.

Es ist möglich, daß die Formel der Base um 1 Mol. Wasser größer als aus der Formel des Sulfates hervorgeht, also $C_{21}H_{41}N_9O_9$ ist, und daß bei der Bildung des Sulfates durch Einwirkung der Säure nach Analogie der Bildung des Kreatinins aus dem Kreatin durch Säurewirkung Wasser abgespalten wird. Versuche zur Beantwortung dieser Frage sind begonnen (vgl. p. 74).

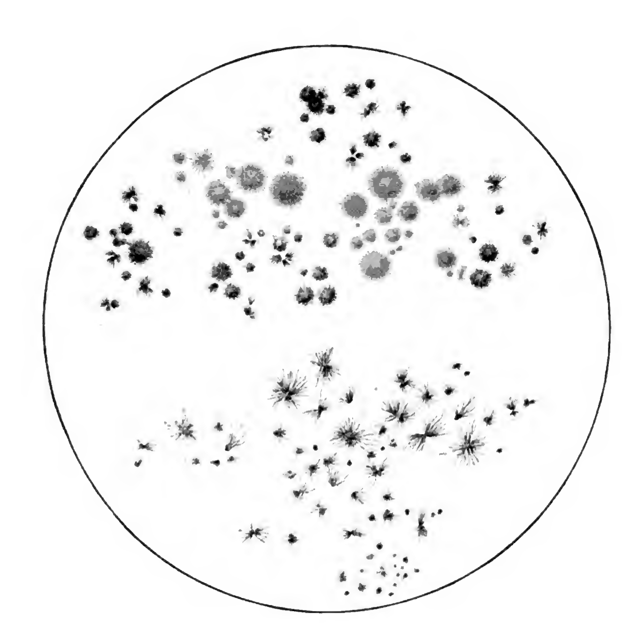
Für die das Sulfat bildende Base schlage ich den Namen *Kyrin* vor (τὸ κῦρος, der Kern einer Sache im bildlichen Sinne), und zwar für die aus Glutin entstehende Base den Namen *Glutokyrin*. Sollten die bereits begonnenen Untersuchungen ergeben, daß dieselbe Basis auch bei entsprechender Spaltung anderer Proteinsubstanzen, eigentlicher Eiweißkörper entsteht, so würde ihr der Name *Protokyrin* zu geben sein.

Wird aus dem Sulfate der Base die Schwefelsäure durch Barythydrat *genau* ausgefällt, so reagiert die Lösung der Base intensiv alkalisch und nimmt schon beim Eindampfen Kohlensäure aus der Luft auf. Das Sulfat reagiert sauer, sogar auf Congopapier. Glutokyrin gibt deutliche Biuretreaktion.

Das Chlorhydrat ist in Wasser und Alkohol sehr leicht löslich, das Sulfat in Wasser leicht, in absolutem Alkohol fast unlöslich.

Das Phosphorwolframat ist in kaltem Wasser schwer löslich, viel leichter in heißem und scheidet sich beim Erkalten der heißen wäßrigen Lösung in schönen, mikroskopischen Kristallen aus. Zunächst entstehen hierbei oft Körnchen, die dann zu Drusen auswachsen, kugelförmige Aggregate feiner Nadeln. Oft schnell, oft erst nach längerem Stehen bilden sich dann feine zu Sternen und Büscheln gruppierte Nadeln. Die Abbildung zeigt im oberen Teile vorwiegend die Drusen, im unteren die mehr aufgelösten Nadeln.

Zur Darstellung des kristallisierten Phosphorwolframates fällt man entweder die Lösung der Base oder die mit Natronlauge



alkalisch gemachte Lösung des Sulfates mit Phosphorwolframsäure, filtriert, wäscht mit kaltem Wasser aus und löst dann den Niederschlag auf dem Wasserbade in Wasser von 70° auf, wobei er sich völlig glatt zu einer wasserklaren Flüssigkeit löst, aus der beim Erkalten das Salz ganz gleichmäßig kristallisiert.

Analysen des gleichmäßig kristallisiertem Phosphorwolframates, bei 70° getrocknet.

I. Das Salz war aus der mit Natronlauge alkalisch gemachten Lösung des Sulfates gefällt.

1) 1,0610 gr. S. g. 29,0 ccm tr. N. b. 18° u. 745 mm Bar. = 3,14 % N

2) 1,0730 gr. S. g. 0,2454 gr. CO_2 u. 0,1161 gr. H_2O
C = 6,24 % H = 1,21 %

II. Das Salz war aus der wäßrigen Lösung der Base gefällt.

3) 1,0863 gr. S. g. 29,2 ccm tr. N. b. 19° u. 756 mm Bar. = 3,13 % N.

4) 1,0930 gr. S. g. 0,2528 gr. CO_2 u. 0,1175 gr. H_2O
C = 6,31 % H = 1,20 %

Die Substanzen verbrannten erst nach dem Vermischen mit Kupferoxyd vollständig.

Das Verhältnis C : N ist im ersten Salze: 1,987, im zweiten Salze: 2,016, während sich aus der Formel des Glutokyrins C : N = 1,994 berechnet.

Da auch durch Einwirkung von Säuren auf Eiweiß entstehende, den durch Enzyme gebildeten Peptonen nah verwandte Stoffe zu den Peptonen gerechnet werden, ist auch das Glutokyrin als Pepton zu bezeichnen.

Das Phosphorwolframat des Glutokyrins ist also das erste deutlich kristallisierte Salz eines Peptons.

Nach dem Erscheinen der Untersuchung E. Fischers und P. Bergells[1]) über die β-Naphtalinsulfoderivate der Amidosäuren wurde das β-Naphtalinsulfoderivat des Glutokyrins dargestellt. Nachdem durch einen Vorversuch die Menge des erforderlichen β-Naphtalinsulfochlorids ermittelt war, wurden im ganzen 5 Darstellungen, 4 mit Sulfat aus Gelatine, 1 mit Sulfat aus Pepton angestellt. Alle diese Versuche lieferten übereinstimmend dasselbe Derivat.

---

1) Ber. d. deutschen Chem. Ges. 35. S. 3779.

Das verwendete β-Naphtalinsulfochlorid war durch Schütteln seiner ätherischen Lösung mit 2%iger Natronlauge gereinigt und aus Äther kristallisiert. Fp. 76,6°.

Versuch I. 1,62 gr. Sulfat aus Gelatine in 20^{ccm} Normalnatronlauge gelöst wurde mit der ätherischen Lösung von 10 gr. Naphtalinsulfochlorid mit einer sehr kräftigen Maschine zunächst 1 Stunde geschüttelt, dann weitere 10^{ccm} Normalnatronlauge dazugegeben und 1,5 Stunden geschüttelt und stets nach 1,5 Stunden je weitere 10^{ccm} Lauge hinzugegeben, bis im Ganzen 105^{ccm} Natronlauge verwendet waren. Die alkalische, von der ätherischen getrennte Lösung wurde nach Verdünnen mit dem 10fachen Volumen Wasser in 10%ige Essigsäure verrührt, die ausgeschiedenen weißen Flocken nach Absitzenlassen dekantiert, abgesaugt, sehr anhaltend mit Wasser gewaschen und über H_2SO_4 getrocknet. Ausbeute 2,2 gr.

Analysen der über H_2SO_4 b. z. c. Gew. getrockneten Substanz:

I. 0,2522 gr. S. g. 0,2008 gr. $BaSO_4$ = 10,93% S

II. 0,1996 „ „ erf. n. Kj. $11,15^{ccm}$ $\frac{n}{10}$ S = 7,82%

III. 0,1264 „ „ b. 70% getr. g. n. Dumas $9,3^{ccm}$ tr. N. b. 17° u. 768^{mm} = 8,75% N

IV. 0,1651 gr. S. 0,3423 gr. CO_2 u. 0,0733 gr. H_2O
C = 56,51% 4,95%

Versuch II. 3,24 gr. Glutokyrinsulfat, 20 gr. β-Naphtalinsulfochlorid in Äther, zunächst 40^{ccm} Normalnatronlauge, nach je 1,5 stündigem Schütteln weitere 20^{ccm}, im ganzen 200^{ccm}.

Abgehobene Lösung auf 1 Liter verdünnt, in 700^{ccm} 10%ige Essigsäure verrührt. Ausbeute 3,8 gr.

Analysen der über H_2SO_4 getrockneten Substanz:

V. 0,1676 gr. S. g. 0,1303 gr. $BaSO_4$ = 10,68% S

VI. 0,1498 „ „ erf. $10,7^{ccm}$ $\frac{n}{10}$ S = 7,84% N

VII. 0,1990 „ „ g. 0,4100 gr. CO_2 u. 0,0885 gr. H_2O
C = 56,19% 4,98%

Versuch III. Dieser Versuch setzt sich aus 2 Versuchen zusammen. In jedem derselben wurden 2,43 gr. Sulfat aus

Gelatine mit 15 gr. β-Naphtalinsulfochlorid und im ganzen 150 ccm Normalnatronlauge in Intervallen von 1,5 Stunden wie in Vers. I und II geschüttelt. Die erhaltenen Produkte wurden vereint abgesaugt und aus der alkalischen Lösung durch Essigsäure umgefällt. Ausbeute 5 gr.

Analysen der bei 70° getrockneten Substanz:

VIII. 0,1742 gr. S. g. 0,1333 gr. $BaSO_4$ = 10,51 % S

IX. 0,3133 „ „ „ 22 ccm tr. N. b. 747 mm u. 20° = 7,97 %

X. 0,2091 „ „ „ 0,4321 gr. CO_2 u. 0,0916 gr. H_2O
C = 56,36 % H = 4,90 %

Versuch IV. Von Sulfat, aus Trypsin-Glutin-Pepton dargestellt, wurden 1,62 gr. mit 10 gr. Naphtalinsulfochlorid und im ganzen 100 ccm Normalnatronlauge wie in den andern Versuchen geschüttelt.

Analysen der bei 70° getrockneten Substanz:

XI. 0,1955 gr. S. g. 0,1526 gr. $BaSO_4$ = 10,72 % S

XII. 0,1704 gr. S. g. 0,3523 gr. CO_2 u. 0,0749 gr. H_2O
C = 56,38 % H = 4,92 %

XIII. 0,2034 gr. S. g. 15,1 ccm tr. N. b. 17° u. 760 mm Bar = 8,68 % N

Versuch V. 4 gr. Sulfat aus Gelatine wurden mit den entsprechenden Mengen β-Naphtalinsulfochlorids und Natronlauge geschüttelt; abweichend von den früheren Versuchen wurde nicht Normalnatronlauge, sondern die entsprechenden Mengen von 30%iger Natronlauge verwendet. Das Resultat war dasselbe.

Analysen der bei 70° getrockneten Substanz

XIV. 0,2076 gr. S. g. 0,4270 gr. CO_2 u. 0,0917 gr. H_2O
C = 56,10 % H = 4,95 %

XV. 0,1980 gr. S. g. 0,4111 gr. CO_2 u. 0,0852 gr. H_2O
C = 56,63 % H = 4,81 %

XVI. 0,1894 gr. S. g. 0,1468 gr. $BaSO_4$ = 10,64 % S

XVII. 0,2111 gr. S. g. 14,5 ccm tr. N. b. 18,5° u. 756 mm Bar. N = 7,98 %

XVIII. 0,2076 gr. S. g. 14,7 ccm tr. N. b. 15° u. 756 mm N = 8,34 %

Analysen-

	Präparat I				Präparat II			Präparat III		
%	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
C	—	—	—	56,51	—	—	56,19	—	—	56,36
H	—	—	—	4,95	—	—	4,98	—	—	4,90
N	—	7,82	8,75	—	—	7,84	—	—	7,97	—
S	10,93	—	—	—	10,68	—	—	10,51	—	—

Die Analysenwerte entsprechen der Formel: $C_{21}H_{34}N_9O_8 \cdot (C_{10}H_7SO_2)_5 + H_2O$

Es läßt sich wegen des hohen auf die einfache Formel bezogenen Molekulargewichtes der Naphtalinsulfoverbindung nicht mit Sicherheit entscheiden, ob die Verbindung 1 Mol. H_2O nach Art des Kristallwassers enthält. Die Gewichtsdifferenz mit und ohne Wasser beträgt nur 1,2%. Allerdings verlor die Substanz nach Trocknen über Schwefelsäure bis zum konstanten Gewichte bei 125—130° gerade 1,3%.

0,1825 gr. S. verl. 0,0024 gr. bei 125°—130° = 1,3%

aber die Substanz war gesintert, geschmolzen und schwach gefärbt.

Ich lasse also vorläufig noch die Frage offen, ob die β-Naphtalinverbindung Wasser nach Art des Kristallwassers enthält. Es ist auch nicht ausgeschlossen, daß die Formel des Glutokyrins um 1 Mol. Wasser zu vergrößern ist, und daß bei der Bildung des Sulfats 1 Mol. Wasser abgespalten wird etwa nach Analogie der Entstehung des Kreatinins unter Wasserabspaltung aus Kreatin durch Einwirkung von Säuren (v. p. 70).

Die β-Naphtalinsulfoverbindung des Glutokyrins ist fast unlöslich in Wasser, löslich in Äthylalkohol und Methylalkohol, leichter in verdünntem als absolutem, löslich in Chloroform, unlöslich in Benzol, Ligroin, Schwefelkohlenstoff. Sie schmilzt bei 137—138°, nachdem sie vorher stark gesintert ist.

Spaltungen des Glutokyrins.

Der ausgeprägt basische Charakter der Glutokyrins ließ vermuten, daß in ihm die basischen Komplexe mehr hervortreten als in den durch Enzyme entstehenden Peptonen, die ausgesprochene Säuren sind. Die Ergebnisse der Spaltungsversuche zeigten die Richtigkeit dieser Vermutung.

Resultate.

Präparat IV			Präparat V					Berechnet
XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	%
—	56,38	—	56,10	56,63	—	—	—	56,27
—	4,92	—	4,95	4,81	—	—	—	4,72
—	—	8,68	—	—	—	7,98	8,34	8,35
10,72	—	—	—	—	10,64	—	—	10,59

A. Versuche,

I. 3 gr. Sulfat wurden mit der Mischung von 18 gr. Wasser und 9 gr. konzentrierter Schwefelsäure 12 Stunden am Rückflußkühler gekocht. Aus dem auf ca 100^{ccm} mit Wasser aufgefüllten Reaktionsprodukte wurde durch Phosphorwolframsäure ein kristallinischer Niederschlag erhalten. Derselbe wurde wie früher[1]) angegeben weiter verarbeitet.

Die aus der Silber-Baryt-Fällung erhaltene Base war frei von Histidin. Sie wurde in das saure Silberdoppelsalz übergeführt, das trotz Umkristallisierens unter Zusatz einiger Tropfen Salpetersäure einen etwas höheren Silberwert, als Argininsilber besaß:

0,2040 gr. S. g. 0,0558 gr. Ag. = 27,42%

Ber. f. $C_6H_{14}N_4O_2 \cdot NO_3H. AgNO_3$, Ag = 26,55%

Fp. 174—175° (uncorr.) corr. 178—179°

Aus der Lysinfraktion wurde 1 gr. reines Lysinplatinchlorid, das mit 1 Mol. Alkohol kristallisierende Salz der optisch aktiven Modification erhalten:

0,2683 gr. S. g. 0,0872 gr. Pt = 32,50%

Ber. f. $C_6H_{14}N_2O_2 \cdot PtCl_6H_2 + C_2H_5OH$, Pt = 32,37%

II. 8,5 gr. Sulfat wurden mit der Mischung von 47^{ccm} Wasser und 24 gr. konz. Schwefelsäure 12 Stunden gekocht.

Die aus dem Phosphorwolframsäure-Niederschlag erhaltenen Basen waren wieder frei von Histidin und bestanden aus Lysin und Arginin. Erstere wurde wieder als das charakteristische Platinsalz abgeschieden, letzteres als saures Silberdoppelsatz, das nach Umkristallisieren völlig rein war.

1) M. Siegfried. Zeitschr. f. physiol. Chemie 35 S. 164.

I. 0,2386 gr. S. g. 0,0632 gr. Ag.

II. 0,2184 gr. S. g. $39,5^{ccm}$ tr. N. bei 752^{mm} u. $24,5^0$.

Gefunden:	Ber. f. $C_6H_{14}N_4O_2 \cdot NO_3H \cdot AgNO_3$
Ag 26,49%	26,55%
N 20,57%	20,68%

Fp. 178—179° corr. 182,6—183,6°

Das Silbersalz war rechtsdrehend

$$c = 7{,}3235 \quad \alpha = 0{,}59^0 \quad l = 2$$

$$[\alpha]_D^{20^0} = +4$$

Nach Gulewitsch[1]) ist $[\alpha]_D^{20} = 5{,}6$.

Von dem umgefällten Sulfat des Glutokyrins war das Platinsalz dargestellt worden. Zu diesem Zwecke war die wäßrige Lösung von 37 gr. des Sulfates durch einen kleinen Überschuß von Barythydrat von der Schwefelsäure befreit, das überschüssige Barythydrat durch Ammonkarbonat entfernt, das Filtrat vom Baryumkarbonat vollständig eingedampft. Aus der wäßrigen Lösung der Base wurde durch 37 gr. Platinchloridchlorwasserstoffsäure das Platinsalz in einer Ausbeute von 38 gr. gewonnen. Von diesem Salze gilt das auf S. 66 Mitgeteilte. Die Analysen ergaben zwar genau das Verhältnis C : N = 2, die erhaltenen Werte entfernten sich jedoch aus den oben erörterten Gründen von den für das Platinsalz berechneten.

Analyse der Platinsalze:

I. 0,1967 gr. S. g. 0,1628 gr. CO_2 u. 0,0666 gr. H_2O
C = 22,57% H = 3,79%

II. 0,1991 gr. S. g. 9,1639 gr. CO_2 u. 0,0664 gr. H_2O
C = 22,45% H = 3,73%

III. 0,2101 gr. S. g. $20,6^{cm}$ tr. N. b. 22^0 u. 753^{mm} = 11,24%

Für das Platinsalz $(C_{21}H_{39}N_9O_8)_2(PtCl_6H_2)_3$ berechnet sich:

C = 21,73% H = 3,65% N = 10,89%.

III. Von diesem Platinsalze wurde ca 1 gr. mit Schwefelwasserstoff zersetzt, das Filtrat vom Schwefelplatin wurde völlig

1) Zeitsch. f. physiol. Chem. 27. 278.

eingedampft, 18 Stunden mit 100^{ccm} 30%iger Salzsäure am Rückflußkühler gekocht und auf 250^{ccm} aufgefüllt.

$$50^{ccm} \text{ erf. n. Kj. } 14{,}7^{ccm} \frac{n}{10} S = 0{,}10290 \text{ gr. N.}$$

Der Rest wurde mit Natronlauge fast neutralisiert und mit Magnesia usta destilliert. Das Destillat erforderte nach dem Kochen zur Vertreibung der Kohlensäure[1]) $1{,}2^{ccm} \frac{n}{10}$ S. = ca 2% der Ges.-N.

0,5 gr. Sulfat wurden 12 Stunden mit der Mischung von 1 Gew. Schwefelsäure und 2 T. Wasser gekocht. Nach Abstumpfen der Säure mit Natronlauge und Destillation mit Magnesia usta wurde kein Ammoniak erhalten.

Dies steht im Einklang mit der Erfahrung, daß aus Eiweißkörpern durch Kochen mit Salzsäure mehr Ammoniak als beim Kochen mit Schwefelsäure entsteht. Glutokyrin enthält also keinen durch Schwefelsäure abspaltbaren sog. Ammoniak- oder Amidstickstoff.

IV. Von demselben Platinsalze wurden ca 27 gr. in das Chlorhydrat übergeführt und mit 200^{ccm} rauchender Salzsäure 11,5 Stunden am Rückflußkühler gekocht. Die Lösung wurde eingedampft und in 5%iger Schwefelsäure auf 500^{ccm} gelöst. Hiervon erforderten nach Kjeldahl:

1)	5^{ccm}	$16{,}6^{ccm} \frac{n}{10}$ S.	$16{,}66^{ccm} \frac{n}{10}$ S. im Mittel
2)	5 „	16,8 „ „ „	
3)	5 „	16,6 „ „ „	

= 0,02332 gr. N für die ganze Lösung berechnet

= 2,332 gr. N.

Der Rest = 485^{ccm}[2]) wurde mit Phosphorwolframsäure gefällt. Bei diesen Fällungen geschah der Zusatz der Phosphorwolframsäurelösung vorsichtig nur so lange, als noch nach wenigen Sekunden ein Niederschlag entstand. Der Niederschlag wurde abgesaugt und mit 5% Phosphorwolframsäure-Schwefelsäure gewaschen.

---

1) Zeitschr. f. physiol. Chemie 37 S. 297.

2) Die geringe Menge der an den Pipetten, welche zum Ausblasen kalibriert waren, haftenden Flüssigkeit wurde bei dieser und den folgenden Berechnungen vernachlässigt.

A) *Das Filtrat vom Phosphorwolframsäureniederschlage* wurde auf 2 Liter aufgefüllt, hiervon erforderten nach Kjeldahl:

1) 20^{ccm} $5{,}4^{ccm}$ $\frac{n}{10}$ S.
2) 20 „ 5,5 „ „ „ } $5{,}45^{cm}$ $\frac{n}{10}$ S. im Mittel = 0,00763 gr. N.

Es enthielt also das Filtrat vom Phosphorwolframsäureniederschlage 0,763 gr. N, d. i. auf die ganze Zersetzungsflüssigkeit berechnet:

0,778 gr. N = 33,4% v. Ges. N.

Unter Berechnung der von Gulewitsch angegebenen Löslichkeit des Argininphosphorwolframates beträgt der Amidosäure-N 32,5% der Ges.-N.

Von dem übrigen Filtrate wurde der größte Teil von Phosphorwolframsäure durch Barythydrat befreit, das Baryum durch Schwefelsäure genau ausgefällt, das Filtrat vom Baryumsulfat eingedampft, in verd. Alkohol gelöst und durch alkoholisches Ammoniak Amidosäuren ausgeschieden. Die noch etwas chlorhaltige Substanz wurde aus Wasser unter Zusatz von Alkohol umkristallisiert und in das Kupfersalz durch Kochen mit anhydrischem Kupferoxydhydrat übergeführt. Sowohl dieses Kupfersalz als auch noch 2 aus den Mutterlaugen dargestellte Kupfersalze wurden analysiert. Die Analysen ergaben, daß keine einheitlichen Verbindungen vorlagen. Sie lieferten als Verhältnis C : N 2,6; 2,3; 2,0. Da schon im Alanin dieses Verhältnis 2,57 ist, so ist wahrscheinlich, daß wenn nicht Alanin, ein Gemenge von Glykokoll und einer oder mehr höherer Amidosäuren vorlag. Die Untersuchung des Restes der Amidosäurenlösung ergab die Gegenwart von Glutaminsäure.

Der Rest dieser Lösung wurde nach Entfernung der Phosphorwolframsäure mit Barythydrat etc. bei salpetersaurer Reaktion durch Silbernitrat entchlort, mit Ammoniak neutralisiert und nach der von mir früher beschriebenen Methode[1]) mit Silbernitrat und ammoniakalischer Silbernitratlösung glutaminsaures Silber abgeschieden. Dasselbe wurde abgesaugt, sorgfältigst mit Wasser gewaschen und über Schwefelsäure getrocknet.

Die Analysenwerte entsprachen den für glutaminsaures Silber berechneten:

1) M. Siegfried. Zeitschr. f. physiol. Chemie 35 S. 185.

I. 0,1735 gr. S. g. 0,1043 gr. Ag

II. 0,2013 gr. S. erf. $5{,}7^{ccm} \frac{n}{10}$ S.

Gefunden:	Ber. f. $C_5H_7NO_4Ag_2$:
Ag 60,12%	59,81%
N 3,96%	3,89%

Von den erhaltenen 0,7 gr. wurde der Rest mit Salzsäure zersetzt; das Filtrat vom Chlorsilber setzte nach Eindampfen zuerst auf dem Wasserbade, dann im Vacuumexsiccator die charakteristischen, in Salzsäure schwer löslichen Kristalle des Glutaminsäurechlorhydrates ab. Auch die Mutterlauge derselben kristallisierte beim Verdunsten vollständig.

Die Analyse der Kristalle gab bei Benutzung des Neubauerschen Platintiegels einen wegen der geringen Menge der angewandten Substanz unerwartet genauen Cl-Wert.

0,0224 gr. S. g. 0,0176 gr. AgCl

Gefunden:	Ber. f. $C_5H_9NO_4 \cdot HCl$
19,43%	19,31%

B) *Der Phosphorwolframsäureniederschlag* wurde in heißem Wasser unter Zusatz von Ammoniak gelöst, mit Barythydrat gefällt, das Baryum durch Kohlensäure entfernt. Die Niederschläge wurden sorgfältigst ausgewaschen und wiederholt ausgekocht; das mit den Waschwässern vereinigte Filtrat vollständig eingedampft, in Wasser zu 250^{ccm} gelöst.

$$5^{ccm} \text{ verbr. } 21{,}3^{ccm} \frac{n}{10} \text{ S} = 0{,}02989 \text{ gr. N.} \times \frac{50 \cdot 500}{485}$$

$$= 1{,}537 \text{ gr. Gesamt-Basen-N.}$$

Da der Gesamt-N der Zersetzungsflüssigkeit (s. p. 77) 2,332 gr. betrug, war hiervon

65,9% Basen-N

welche Zahl mit der aus S. 78 bestimmten Amidosäuren-N sich berechnenden nahe übereinstimmt.[1])

Der Rest der Basenlösung wurde benutzt: 1) zum Nachweis des Fehlens von Histidin, 2) zur Isolierung des Argininsilbernitrates und 3) des Lysinplatindoppelsalzes.

Nach der Vorschrift von Kossel und Kutscher ließ sich keine Fällung mit ammoniakalischer Silberlösung erreichen,

1) Die geringen Mengen NH_3 sind bei der Berechnung nicht berücksichtigt.

woraus das Fehlen von Histidin auch bei dieser Zersetzung hervorgeht.

Arginin und Lysin wurden wie oben angegeben getrennt als Basen isoliert und in Silber- und Platinsalz übergeführt.

a) *Lysinplatinchlorid;*

Auch hier wurde das Salz in den leicht zu erhaltenden, schönen Prismen gewonnen. Dasselbe enthielt auch hier Kristallalkohol, woraus hervorgeht, daß die optisch aktive Modifikation vorlag.

I. 0,2276 gr. S. über H_2SO_4 bis zum const. bzw. getrocknet g. 0,0737 gr. Pt

II. 0,2119 gr. S. g. 0,1250 gr. CO_2 u. 0,0732 g. H_2O

III. 0,2055 „ „ „ $9,1^{cm}$ tr. N. bei 18⁰ u. 760^{mm} Bar.

	Gefunden: % I	II	III	Ber. f. $(C_4H_{14}N_2O_2)_2\ PtCl_6H_2$: %
C	—	16,09	—	15,95
H	—	3,86	—	3,69
N	—	—	5,19	4,67
Pf	32,38	—	—	32,37

b) *Argininsilbernitrat:*

Fp. $178,8^0$ corr. 183^0

I. 0,1980 gr. S. g. 0,0532 gr. Ag

II. 0,2071 „ „ $36,1^{cc}$ tr. N. bei 19^0 u. 761^{mm} Bar.

III. 0,2163 „ „ 90,1425 gr. CO_2 u. 0,0692 gr. H_2O

	Gefunden: I	II	III	Ber. f. $C_6H_{14}N_4O_2 \cdot NO_2OH \cdot AgNO_3$
Ag	26,71	—	— %	26,55%
N	—	20,41	— „	20,68 „
C	—	—	17,97 „	17,68 „
H	—	—	3,58 „	3,71 „

V. ca 3 gr. Glutokyrinsulfat wurden mit der Mischung von 140^{ccm} Wasser und 70 gr. Schwefelsäure 22 Stunden gekocht. Die klare Lösung wurde auf 250^{ccm} aufgefüllt. Hiervon

1) 10^{ccm} verbr. $12,9^{ccm}$ $\frac{n}{10}$ S

2) 10 „ „ 12,9 „ „ „

= 0,01806 gr. N, auf die ganze Lösung ber. 0,4515 gr. N.

A. *Das Filtrat* vom Phosphorwolframsäureniederschlag wurde auf 1 Liter aufgefüllt; hiervon:

1) 100^ccm verbr. 10,4^ccm $\frac{n}{10}$ S } Mittel 10,25^ccm $\frac{n}{10}$ S
2) 100 „ „ 10,1 „ „ „ }

= 0,01435 gr. N, auf das ganze Filtrat ber. 0,1435 gr. N, auf die ganze Zersetzungsflüssigkeit ber. 0,156 gr. N =

34,5% Amidosäuren-N

= unter Berücksichtigung der Korrektion für Arginin: 32,5%

Durch einen besonderen Versuch wurde der Nachweis erbracht, daß dieser Stickstoff lediglich Amidosäuren und nicht Ammoniak angehörte.

3) 100^ccm der Lösung wurde mit Magnesia usta destilliert, Das zum Vertreiben der Kohlensäure gekochte Destillat und vorgelegte Schwefelsäure erforderte genau so viel $\frac{n}{10}$ A. wie vorgelegte $\frac{n}{10}$ S.

B. Die aus dem *Niederschlage* nicht quantitativ gewonnene Basenlösung wurde auf 100^ccm aufgefüllt. Hiervon:

1) 5^ccm erf. 9,1^ccm $\frac{n}{10}$ S. } 15^cm also im Mittel 27,5^cm
2) 10 „ „ 18,4 „ „ „ }

Hieraus berechnet sich für den Gesamt-N-Gehalt der Basenlösung 0,2568 gr. N.

Es wurde ferner der Arginin-N in 3 Versuchen bestimmt. Bei den ersten beiden wurde der Ag-Ba Niederschlag auf Neubauerschen Platintiegeln abgesaugt, nach dem Auswaschen mit Barytwasser mit Alkohol und Äther gewaschen.

Das trockene Pulver läßt sich gut in den Verbrennungskolben überführen. Um etwa noch anhaftende Spuren zu entfernen, wurde der Tiegel mit verdünnter Salzsäure und darauf mit Wasser durchsaugt, diese Flüssigkeit in den Kjeldahl-Kolben zum Niederschlage gegeben. Diese Methode erspart das Verkohlen der Filter.

In dem dritten Versuche wurde der Niederschlag auf N-freiem Papierfilter abfiltriert

1) 20^ccm Basenlösung. Der Ag-Ba Nd. erf. 24,1 ^ccm $\frac{n}{10}$ S.
2) 20 „ „ „ „ „ „ „ 25,35 „ „ „
3) 20 „ „ „ „ „ „ „ 25,3 „ „ „

Somit erforderten im Mittel 20^{ccm} $24{,}92^{ccm}$ $^n/_{10}$ S. = 0,0349 gr. N = für die ganze Basenlösung berechnet: 0,1745 gr. N, also von dem Basen N:

67,9% Arginin N.

Hieraus berechnet sich Lysin N = 32,1%.

Außer dem Sulfat wurde die β-Naphtalinsulfoverbindung des Glutokyrins zersetzt. Von vornherein war es nicht ausgeschlossen, da bei der großen Molekularformel dieser Verbindung sich aus den gefundenen Analysenwerten mehrere Formeln berechnen lassen, daß bei der Synthese durch die Gegenwart der Natronlauge eine Veränderung des Glutokyrins stattgefunden hatte.

Diese Versuche hatten mit der großen Widerstandsfähigkeit der Naphtalinsulfoverbindung zu kämpfen. Selbst durch tagelanges Sieden mit Salzsäure und Zinnchlorür wurde sie nicht vollständig gespalten, nur durch sehr anhaltendes Erhitzen auf 150—160°. Hierbei können aber schon sekundäre Zersetzungen, wie die der Glutaminsäure zur Pyrrolidoncarbonsäure eintreten.

VI. ca 2 gr. des β-Naphtalinsulfoglutokyrins wurden in 30^{ccm} Alkohol gelöst und mit 60^{ccm} konzentrierter Salzsäure 60 Stunden am Rückflußkühler gekocht. Das Reaktionsprodukt wurde in Wasser gegossen, das Filtrat mit 5%iger Schwefelsäure auf 50^{ccm} aufgefüllt.

1) Hiervon erf. n. Kj. 10^{ccm} $5{,}6^{ccm}$ $\frac{n}{10}$ S

= 0,00784 gr. N. In der ganzen Flüssigkeit befanden sich also 0,03920 gr. Stickstoff.

Der Rest der Flüssigkeit wurde mit Phosphorwolframsäure gefällt.

2) Das Filtrat erford. n. Kj. 8^{ccm} $\frac{n}{10}$ S

= auf die ganze Zersetzungsflüssigkeit berechnet: 0,0640 gr. N = 35,7% Amidosäuren-N

corr. 31,9%

In Übereinstimmung mit den Spaltungen des Sulfates wurde hier gefunden, daß etwa $^2/_3$ Basen und $^1/_3$ Amidosäuren entstehen. Dieses Resultat ist aber nicht einwurfsfrei, weil nur ein Teil der Substanz zersetzt war und es nicht sicher ist, daß nicht in dem ungelösten Teile eine teilweise Spaltung stattgefunden hat.

Die abfiltrierte, gefärbte Substanz war reich an N, enthielt aber weniger N als das Ausgangsmaterial.

0,1601 gr. über Schwefelsäure getr. g. 7,1^{ccm} tr. N. b. 18^0 u. 766^{mm} = 5,24% N.

VII. ca 1,5 gr. der Naphtalinsulfoverbindung wurden mit 20^{ccm} rauch. Salzsäure zunächst 48 Stunden auf 120^0 erhitzt. Da die Substanz nur zum Teil zersetzt war, wurde die Röhre weiter 60 Stunden auf 150—160^0 erhitzt. Beim Öffnen der Röhre ergab sich nur ganz geringer Druck, der Inhalt roch stark nach Naphtalin. Die Substanz schien vollständig zersetzt zu sein, außer den hellen Kristallen des Naphtalins befanden sich in der Flüssigkeit nur sehr geringe Mengen schwarzer Flocken bezw. Lamellen suspendiert. Das Filtrat wurde auf 250^{ccm} aufgefüllt. Das getrocknete Filter gab leicht an Äther das Naphtalin ab, das nach dem Verdunsten des Äthers fast farblos auskristallisierte und den Schmelzpunkt 80—81^0, welcher dem Naphtalin zukommt, besaß.

Von dem auf 250^{ccm} aufgefüllten Filtrate wurden

1) 50^{ccm} n. Kj. erf. 16,5^{ccm} $\frac{n}{10}$ S = 0,0231 gr. N = auf das ganze Filtrat berechnet 0,1155 gr N.

2) 100^{ccm} wurden auf ca die Hälfte des Volumens eingeengt und mit Phosphorwolframsäure ausgefällt. Das Filtrat hiervon erf. n. Kj. 11,0^{ccm} $\frac{n}{10}$ S = 0,0154 gr N, auf die ganze Flüssigkeit berechnet 0,0380 gr N = 32,9% Amidosäuren N corr. 29,5%.

Auch dieser Versuch, der beweiskräftiger als der vorige ist, weil die Substanz vollständig zersetzt war, ergibt annähernd in Übereinstimmung mit den bei den Zersetzungsversuchen des Sulfates gewonnenen Resultaten das Verhältnis von

Ges. N : Basen-N : Amidosäure-N = 3 : 2 : 1

B. Ergebnisse der Spaltungsversuche.

Die Versuche ergaben, daß durch starke Schwefelsäure kein, durch Salzsäure äußerst geringe Mengen Ammoniaks abgespalten werden. Das Glutokyrin enthält also *keinen sogenannten Ammoniak- oder Amidstickstoff.*

Als Basen entstehen *Arginin* und *Lysin*, *kein Histidin*, von Amidosäuren *Glutaminsäure* und wahrscheinlich *Glykokoll*. Das letztere ist bisher nicht isoliert, seine Entstehung bei der Zersetzung des Glutokyrins ist aber wahrscheinlich, weil erstens die Analysen der Kupfersalze (S. 78), die aus glutaminsaurem Kupfer uud dem Kupfersalz der fraglichen Amidosäuren bestanden

ein Verhältnis von C : N, welches kleiner bezw. in einer Fraktion ebenso groß wie im Alanin war, ergaben, zweitens, weil nach meinen früheren[1]) Versuchen über die Spaltung des Glutin-Trypsin-Peptons anzunehmen ist, daß bei der Spaltung dieses Peptons, der Muttersubstanz des Glutokyrins, außer Glykokoll keine in Alkohol schwer lösliche Amidosäure entsteht.

Die *quantitativen* Versuche ergaben ferner:

1) daß $^2/_3$ des Stickstoffs im Glutokyrin den Basen zukommt, $^1/_3$ den Amidosäuren.

2) daß von dem Basenstickstoff $^2/_3$ auf Arginin $^1/_3$ auf Lysin kommt, daß somit auf 1 Molekul Arginin 1 Molekul Lysin entsteht, unter der berechtigten Voraussetzung, daß nicht andere Basen, als Arginin und Lysin entstehen.

Da die einfache Formel des Glutokyrins $C_{21}H_{39}N_9O_8$ ist, gehören von den 9 N-Atomen 6 den Basen und zwar 4 den Arginin 2 dem Lysin. 3 Atome N kommen auf Amidosäuren, von denen eine die Glutaminsäure, die andere noch unbekannt, wahrscheinlich Glykokoll ist. Unter der Voraussetzung, daß bei der Spaltung außer Glutaminsäure nur Glykokoll entsteht, ergibt sich folgende Gruppierung des Glutokyrins:

1	Mol.	Arginin	$C_6H_{14}N_4O_2$
1	„	Lysin	$C_6H_{14}N_2O_2$
1	„	Glutaminsäure	$C_5H_9NO_4$
2	„	Glykokoll	$C_4H_{10}N_2O_4$
			$C_{21}H_{47}N_9O_{12}$
		minus $4H_2O$	H_8O_4
		Glutokyrin =	$C_{21}H_{39}N_9O_8$

Bereits begonnene Versuche sollen prüfen, welche Mengen Glutaminsäure und ob und in welchen Mengen Glykokoll entsteht, ferner ob die Mengen dieser Amidosäuren unter verschiedenen Verhältnissen konstant sind und in dem Verhältnis 1 Mol. Glutaminsäure : 2 Mol. Glykokoll stehen.

Schon früher[2]) habe ich es als unwahrscheinlich hingestellt, daß das Eiweißmolekul aus den Spaltungsprodukten, welche durch Salzsäure entstehen, in der Weise aufgebaut ist, daß die gesamte Anzahl der aus einem Eiweißkörper entstehenden Spaltungs-

1) Zeitschrift f. physiol. Chemie 35 S. 187.
2) Zeitschr. f. physiol. Chemie 35 S. 180.

produkte, könnte man sie vollständig isolieren, dieselbe Anzahl von C- oder N-Atomen besitzen würde, wie das Eiweißmolekul, aus dem sie hervorgegangen, selbst. Dies wäre nur einer der möglichen Fälle. Nach Analogie der uns bekannten Spaltungsvorgänge komplizierterer Verbindungen ist es viel wahrscheinlicher, daß, wenn auch nicht durchgängig, so doch an mehreren Stellen des Eiweißmolekuls die Spaltungen zum Teil in der einen, zum Teil in der anderen Richtung erfolgen, sodaß die Summe der C-Atome aller bei den Spaltungen erhaltenen Produkte größer als die Anzahl der C-Atome des Ausgangsmateriales, des Eiweißes ist. Man würde meines Erachtens nach ebenso fehl gehen, wollte man aus den Spaltungsprodukten durch Zusammensetzung derselben unter Wasserabzug das Eiweißmolekul konstruieren, als es nicht angeht, aus allen Spaltungsprodukten etwa substituierter Acetessigester oder des Kreatins die betreffenden Acetessigester oder das Kreatin in gleicher Weise aufzubauen.

Der eine mögliche Fall, daß die Spaltung in einer Richtung glatt verläuft, scheint bei der Abspaltung des Arginins und Lysins aus dem Glutokyrin vorzuliegen; dafür sprechen die übereinstimmend bei verschiedenen Zersetzungen, mit Salzsäure und mit Schwefelsäure, erhaltenen Werte für Basen- und Amidosäurenstickstoff.

Die Auffindung der Glutokyrins hat den Beweis geliefert, daß bei der successiven Spaltung eines Proteinkörpers Basen, Lysin und Arginin, in einem relativ kleinen Komplex mit Amidosäuren, deren Stickstoff in Summa nur die Hälfte des Basenstickstoffs beträgt, erhalten bleiben. Wenn man sieht, wie dieser ausgesprochene *basische Kern* aus dem Proteinmolekul durch die hydrolysierenden Agentien successive herausgeschält wird, selbst der weiteren Hydrolyse stärkeren Widerstand leistend als das Protein- und Peptonmolekul, so wird man unwillkürlich an die Anschauungen Kossels über den basischen Kern des Eiweißes denken. Wenn auch diese Anschauung Kossels durch die Resultate meist seiner eigenen Untersuchungen manche Veränderung erfahren hat, so bleibt ihr doch der Grundgedanke, daß ein basischer Komplex im Proteinmolekul existiert, ein basischer Kern, um den sich die anderen Komplexe gruppieren. Bis zu einem gewissen Grade bringt diese Untersuchung den Beweis für die Richtigkeit der Anschauung Kossels. Denn wenn auch die bei der Zersetzung des Glutins neben dem Kyrin gleichzeitig ent-

stehenden Körper noch nicht bekannt sind — mit deren Untersuchung bin ich zur Zeit beschäftigt — und wenn wir vielleicht auch hier größeren Komplexen als den Amidosäuren, den E. Fischers „Peptiden" zugehörigen Körpern begegnen werden, so ist doch bewiesen, daß Lysin und Arginin, in äquimolekularen Mengen mit geringen Mengen Amidosäuren einen Komplex bilden, der infolge seiner Widerstandsfähigkeit als Kern zu betrachten ist. Wenn sich entsprechende nicht basische Komplexe auffinden lassen, die ähnliche Widerstandskraft gegen Hydrolyse besitzen, wird man diese neben dem Kyrin zu ordnen haben. Zerfällt aber das Proteinmolekül bei der Reaktion, bei welcher das Kyrin erhalten bleibt, in Kyrin und die einfachen, letzten Spaltungsprodukte, die Amidosäuren etc., so wird dem basischen Kern, dem Kyrin, eine Sonderstellung zuzuweisen sein, in diesem Falle wird es *der* Kern sein.

Die relativ große Widerstandsfähigkeit des Kyrins ist die Folge der Stabilität der in dem Kyrin vorhandenen Gruppierung. Deshalb wird auch die Synthese des Kyrins relativ leicht vor sich gehen. Hier ist die Existenz des Glutaminsäure-Komplexes im Kyrin besonders bemerkenswert. Ich habe schon früher[1]) die Bedeutung der Tatsache hervorgehoben, daß alle bisher rein dargestellten 5 Peptone Glutaminsäure in großen Mengen bei der Spaltung liefern, daß also beim Abbau des Eiweißes selbst durch das weit spaltende Trypsin der Glutaminsäure-Komplex erhalten bleibt, der beim Aufbau des Eiweißes in der Pflanze eine so große Rolle spielt.

Wir sehen auch in dem Kyrin die Glutaminsäure mit den Basen vereint; es erhebt sich daher die Frage: Wird auch beim Aufbau des Eiweißes in der Pflanze ein Kyrin aus Basen und Glutaminsäure oder Asparaginsäure als Vorstufe des Eiweißes gebildet?

Wie einerseits die Stabilität des Kyrins die Bildung desselben im pflanzlichen und tierischen Organismus begünstigen muß, ist andererseits die Annahme, daß es dort als Zwischenprodukt bei dem Abbau von Proteinkörpern entsteht, berechtigt. Nach den Untersuchungen Mieschers bildet der Lachs, ohne Nahrung aufzunehmen, aus seiner Körpersubstanz die Protamine. Als Vorstufe dieser Protamine beschreibt Miescher die Kernal-

1) Karlsbader Naturforscherversammlung 1902.

buminose, eine peptonartige Substanz. Nach Miescher werden bei der Umwandlung der Albuminose in Protamin Amidosäuren abgespalten. Nachdem nachgewiesen ist, daß durch allmähliche Hydrolyse aus einem Proteinkörper ein ausgesprochen basischer Kern eliminiert wird, der nach seinem Gehalt an Stickstoff und basischen Gruppen den Protaminen sehr nahe kommt, liegt die Vorstellung nahe, daß Protamine aus Kyrin oder kyrinähnlichen, durch Hydrolyse aus Eiweiß entstehenden Substanzen, durch einfach polymerisierende oder anhydrisierende Synthese hervorgehen.

Mit der weiteren Untersuchung des Kyrins und der Beantwortung der Frage: Entsteht Kyrin auch bei der allmählichen Hydrolyse anderer Proteinkörper? bin ich beschäftigt.

Diese Untersuchung ist zum Teil mit den von der Königl. sächs. Ges. d. Wissenschaften aus der Mende-Stiftung bewilligten Mitteln ausgeführt.

Druckfertig erklärt 2. IV. 1903.]

Bemerkungen zu einem Satze von Sophus Lie über algebraische Funktionen.

Von

G. Scheffers.

Im Jahre 1892 hat Sophus Lie in einem Briefe an Herrn Leo Königsberger ein Theorem über algebraische Funktionen mitgeteilt, über dessen Beweis er nur die kurzen Anmerkungen machte: er sei auf sehr einfachen geometrischen Anschauungen, nämlich auf Mannigfaltigkeitsbetrachtungen, begründet. Soeben hat nun Herr Königsberger in den Acta mathematica einen rein analytischen Beweis des Satzes mitgeteilt.[1])

Da Sophus Lie selbst den fraglichen Satz in seiner speziellsten Form in Vorlesungen[2]) *exakt* auf synthetischem Wege abgeleitet hat, bedarf es nur einer einfachen Ausdehnung seines Verfahrens auf Räume von beliebig vielen Dimensionen, um den allgemeinen Satz so zu begründen, wie es höchst wahrscheinlich Lie selbst getan haben würde, wenn er sich darüber überhaupt näher würde geäußert haben.

Zugleich liefert dies synthetische Verfahren sofort auch den *Ausnahmefall*, in dem der Satz nicht gilt; und es unterliegt für jemanden, der in die Anschauungsweise Lies einigermaßen eingeweiht ist, keinem Zweifel, daß Lie selbst diesen Ausnahmefall kannte, wenn er ihn auch in dem Schreiben an Herrn Königs-

---

1) „Bemerkungen zu einem Satze von Sophus Lie über ein Analogon zum Abelschen Theorem", Acta math. 26. Bd. (1903), S. 171—188.

2) In Leipzig um 1890 herum. Ein anderer Beweis, der aber auf den im Texte gemeinten zurückkommt, z. B. in der Arbeit: „Beiträge zur Theorie der Minimalflächen I", Math. Ann. 14. Bd. (1879), S. 331 bis 416, insbes. S. 344, 345, sowie „Untersuchungen über Translationsflächen I", Leipziger Berichte 1892, S. 447—472, insbes. S. 461, 462.

BERGER nicht erwähnt hat. Spricht er doch selbst darin von der „nonchalanten Form“ seiner Briefe.[1]) Der Ausnahmefall ist nun von Herrn KÖNIGSBERGER unrichtig formuliert worden; doch würde mich dies ziemlich geringfügige Versehen nicht veranlassen, hier auf den Satz zurückzukommen, wenn ich es nicht als eine Pflicht der Pietät betrachtete, zu zeigen, *wie einfach der* LIE*sche Beweis ist,* und zwar auch dann, wenn man ihn *analytisch* wiedergibt. Man kann sagen, daß eben *nur der erwähnte Ausnahmefall einige weitergehende Überlegungen fordert.*

Der Satz lautet in LIES eigener Formulierung so[2]):

„*Ich betrachte* $m+1$ *Gleichungen von der Form:*

$$v_k = A_{k1}(t_1) + \cdots + A_{km}(tm) \qquad (k = 1, 2 \cdots m+1)$$

und mache über sie nur die einzige Voraussetzung, daß sich aus ihnen nur eine Relation zwischen $v_1, v_2 \cdots v_{m+1}$ *ableiten läßt; dann ist die Relation*

$$\Omega(v_1, v_2 \cdots v_{m+1}) = 0$$

dann und nur dann algebraisch, wenn zwei beliebige Größen

$$A_{ki}(t_i), \quad A_{ji}(t_i)$$

durch eine algebraische Relation gebunden sind.“

Natürlich beschränkt sich LIE stillschweigend auf Funktionen, die sich in einem gewissen Bereiche regulär verhalten.[3]) Er hätte aber noch eine Voraussetzung hinzufügen müssen:

Die Relation $\Omega = 0$ *darf keine Gleichung von der Form*

$$a_1 \frac{\partial \Omega}{\partial v_1} + a_2 \frac{\partial \Omega}{\partial v_2} + \cdots + a_{m+1} \frac{\partial \Omega}{\partial v_{m+1}} = 0,$$

in der $a_1, a_2 \cdots a_{m+1}$ *nicht sämtlich verschwindende Konstanten sind, nach sich ziehen.*[4])

Zunächst soll nun LIES Beweis, aber ins Analytische übertragen, gegeben werden, und zwar soll dies möglichst ausführlich geschehen.

---

1) Bei KÖNIGSBERGER a. a. O. S. 173.

2) Ebda. S. 171, 172.

3) Vgl. z. B. Math. Ann. 14. Bd. a. a. O. S. 333, Fußnote.

4) Bei KÖNIGSBERGER a. a. O. S. 182, 183 wird nur verlangt, daß $\Omega = 0$ nicht linear in den Argumenten sei. Auf diesen Irrtum brieflich aufmerksam gemacht, erkannte Herr KÖNIGSBERGER meinen Einwand sofort als richtig an.

§ 1. Analytischer Beweis.

Nach Voraussetzung sollen die $m+1$ Gleichungen:

(1) $$v_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + \cdots + A_{km}(t_m) \quad (k=1,2\cdots m+1)$$

nur eine von $t_1, t_2 \cdots t_m$ freie Gleichung

(2) $$\Omega(v_1, v_2 \cdots v_{m+1}) = 0$$

nach sich ziehen, und diese Gleichung soll überdies algebraisch sein.

Setzen wir:

(3) $$w_k = A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) + \cdots + A_{km}(t_m) \quad (k=1,2\cdots m+1)$$

sodaß die w_k von t_1 *frei* sind, so wird also die Gleichung:

(4) $$\Omega(u_1 + w_1, u_2 + w_2, \cdots u_{m+1} + w_{m+1}) = 0$$

für alle Werte von $t_2, t_3 \cdots t_m$ durch die Funktionen

(5) $$u_1 = A_{11}(t_1), \quad u_2 = A_{21}(t_1), \quad \cdots \quad u_{m+1} = A_{m+1,1}(t_1)$$

von t_1 identisch erfüllt. Wir geben jetzt $t_2, t_3 \cdots t_m$, aber nicht t_1 irgend welche bestimmten Zahlenwerte, sodaß die Funktionen w_k nach (3) bestimmte Werte a_k annehmen. Alsdann geben wir $t_2, t_3 \cdots t_m$ andere bestimmte Werte, sodaß die w_k etwa die bestimmten Werte b_k annehmen u. s. w. Wir können so aus der einen Gleichung (4) eine *beliebig große Anzahl von Gleichungen* bilden:

(6) $$\begin{cases} \Omega(u_1 + a_1, u_2 + a_2, \cdots u_{m+1} + a_{m+1}) = 0, \\ \Omega(u_1 + b_1, u_2 + b_2, \cdots u_{m+1} + b_{m+1}) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

die sämtlich durch die Funktionen (5) *identisch befriedigt werden.* Sie sind sämtlich algebraisch in $u_1, u_2 \cdots u_{m+1}$.

Unter diesen Gleichungen (6) können natürlich nicht mehr wie m von einander unabhängige enthalten sein, da sie durch die Funktionen (5) erfüllt werden, zwischen denen nur m von einander unabhängige Relationen bestehen. Sind nun — und dies ist der allgemeine Fall — unter den Gleichungen (6) *gerade* m von einander unabhängig, so lehren sie, daß zwischen $u_1, u_2 \cdots u_{m+1}$ gerade m von einander unabhängige *algebraische* Gleichungen bestehen. Demnach sind auch je zwei der $m+1$ Funktionen $u_1, u_2 \cdots u_{m+1}$ oder $A_{11}(t_1), A_{21}(t_1) \cdots A_{m+1,1}(t_1)$ durch je eine algebraische Relation miteinander verknüpft, was zu beweisen war. Analog wird der Beweis für jede andere Funktionenreihe $A_{1i}(t_i), A_{2i}(t_i) \cdots A_{m+1,i}(t_i)$ geführt.

Dieser, wie man sieht, sehr einfache Beweis versagt jedoch, sobald man keine m von einander unabhängigen Gleichungen (6) bilden kann. Indem wir jetzt diese Annahme machen, kommen wir zu dem in der Einleitung erwähnten *Ausnahmefall.*

Wir haben jetzt vorauszusetzen: Unter *allen* Gleichungen, die man erhält, wenn man in

$$(4) \qquad \Omega(u_1 + w_1, u_2 + w_2, \cdots u_{m+1} + w_{m+1}) = 0$$

für $w_1, w_2 \cdots w_{m+1}$ irgend welche Werte setzt, die sich aus (3) ergeben, sobald man darin $t_2, t_3 \cdots t_m$ irgend welche Werte gibt, sind höchstens $m - 1$ von einander hinsichtlich der Argumente $u_1, u_2 \cdots u_{m+1}$ unabhängige Gleichungen enthalten. Anders gesagt:

Die Gesamtheit derjenigen Wertsysteme $u_1, u_2 \cdots u_{m+1}$, die *allen* diesen in $u_1, u_2 \cdots u_{m+1}$ algebraischen Gleichungen (4) genügen, erfüllt weniger wie m von einander unabhängige algebraische Gleichungen. Sind es nur $m - r$ Gleichungen, so heißt dies: Etwa $u_1, u_2 \cdots u_r, u_{r+1}$ können ganz beliebig gewählt werden, während alsdann die übrigen $u_{r+2}, u_{r+3} \cdots u_{m+1}$ algebraische Funktionen von $u_1, u_2 \cdots u_r, u_{r+1}$ allein sind. Da r mindestens gleich Eins ist, so können mindestens zwei der u ganz beliebig genommen werden. Wir können also sagen:

Allen Gleichungen (4) wird dadurch genügt, daß wir unter $u_1, u_2 \cdots u_{m+1}$ algebraische Funktionen von mindestens zwei neuen Veränderlichen p, q verstehen (wo z. B. $u_1 = p$, $u_2 = q$ sein könnte). Diese algebraischen Funktionen dürfen nicht sämtlich von einander abhängig sein. Sie seien so bezeichnet:

$$u_k = \varphi_k(p, q).$$

Da die Gleichung (4), abgesehen von der Bezeichnung der Argumente, mit der Gleichung (2) übereinstimmt, die *alle* Wertsysteme $v_1, v_2 \cdots v_{m+1}$ definiert, weil zwischen $v_1, v_2 \cdots v_{m+1}$ nach Voraussetzung nur diese eine Gleichung (2) besteht, so folgt:

Fassen wir die Gesamtheit *aller* Wertsysteme $w_1, w_2 \cdots w_{m+1}$ ins Auge, die durch (3) definiert sind, so erhalten wir aus ihr die Gesamtheit aller Wertsysteme $v_1, v_2 \cdots v_{m+1}$ auf zwei wesentlich verschiedenen Wegen:

erstens dadurch, daß wir zu den $w_1, w_2 \cdots w_{m+1}$ die Funktionen $A_{11}(t_1), A_{21}(t_1) \cdots A_{m+1,1}(t_1)$ addieren,

zweitens dadurch, daß wir zu den $w_1, w_2 \cdots w_{m+1}$ die Funktionen $\varphi_1(p, q), \varphi_2(p, q) \cdots \varphi_{m+1}(p, q)$ addieren.

Dabei ist das eine Mal t_1 beliebig veränderlich, während das andere Mal p und q ganz beliebig verändert werden dürfen. Zur größeren Klarheit sei noch hervorgehoben, daß t_1, p und q bei der Bestimmung (3) der Wertsysteme $w_1, w_2 \cdots w_{m+1}$ *nicht* auftreten.

Weil nun die Funktionen $\varphi_1(p, q), \varphi_2(p, q) \cdots \varphi_{m+1}(p, q)$ nicht sämtlich von einander abhängig sind, würde das zweite Verfahren viel mehr Wertsysteme $v_1, v_2 \cdots v_{m+1}$ liefern als das erste, wenn nicht die Addition von unendlich vielen Wertsystemen der Funktionen φ_k zur Gesamtheit der Wertsysteme w_k dasselbe gäbe wie die Addition *eines* Wertsystems der Funktionen $A_{k1}(t_1)$ zur selben Gesamtheit der Wertsysteme w_k. D. h. es besteht zwischen p, q und t_1 eine gewisse Beziehung:

$$f(p, q) = t_1 \tag{7}$$

derart, daß alle Wertepaare, die man für p, q hieraus bei angenommenem t_1 wählen darf, beim zweiten Verfahren dieselbe Gesamtheit von Wertsystemen v_k geben wie t_1 beim ersten Verfahren.

Nun sei p_0, q_0 ein bestimmtes Wertsystem, das (7) bei angenommenem t_1 genügt, p, q ein beliebiges Wertsystem, das derselben Bedingung (7) genügt. Durch Addition von

$$\varphi_1(p_0, q_0), \quad \varphi_2(p_0, q_0) \cdots \varphi_{m+1}(p_0, q_0)$$

zu allen Wertsystemen $w_1, w_2 \cdots w_{m+1}$ geht dann dieselbe Gesamtheit von Wertsystemen hervor wie durch Addition von

$$\varphi_1(p, q), \quad \varphi_2(p, q) \cdots \varphi_{m+1}(p, q),$$

nämlich die Gesamtheit der Wertsysteme

$$w_1 + A_{11}(t_1), \quad w_2 + A_{21}(t_1), \quad \cdots w_{m+1} + A_{m+1,1}(t_1),$$

die zu dem angenommenen t_1 gehören. Also folgt:

Die Gesamtheit der Wertsysteme $w_1, w_2 \cdots w_{m+1}$ geht durch Addition der Funktionen:

$$\varphi_1(p, q) - \varphi_1(p_0, q_0), \quad \varphi_2(p, q) - \varphi_2(p_0, q_0), \quad \cdots$$
$$\varphi_{m+1}(p, q) - \varphi_{m+1}(p_0, q_0)$$

in sich selbst über. Dabei sind p_0, q_0 irgendwie bestimmt zu wählen, während p, q nach (7) *nur an die Bedingung*

$$f(p, q) = f(p_0, q_0) \tag{8}$$

geknüpft sind. Diese Bedingung gibt etwa q als Funktion von p, sodaß jene zu addierenden Funktionen alsdann als Funktionen von p allein aufzufassen sind.

Es gibt demnach gewisse $m+1$ Funktionen von p:

$$\psi_1(p), \quad \psi_2(p) \cdots \psi_{m+1}(p)$$

die, zur Gesamtheit aller Wertsysteme $w_1, w_2 \cdots w_{m+1}$ addiert, jedes solche Wertsystem in ein Wertsystem derselben Gesamtheit verwandeln. Diese Funktionen sind nicht sämtlich konstant, denn sonst wären die Gleichungen:

$$\varphi_k(p, q) - \varphi_k(p_0, q_0) = \text{const.} \qquad (k=1,2 \cdots m+1)$$

Folgen der Gleichung (8), d. h. alle Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_{m+1}$ wären von einander abhängig.

Weiter folgt hieraus, da die v_k aus den w_k durch Addition der Funktionen $A_{k1}(t_1)$ mit beliebigem t_1 hervorgehen:

Die Gesamtheit aller Wertsysteme $v_1, v_2 \cdots v_{m+1}$ bleibt ungeändert, wenn man zu ihnen die nicht sämtlich konstanten Funktionen $\psi_1(p), \psi_2(p) \cdots \psi_{m+1}(p)$ addiert, in denen p eine beliebige Veränderliche ist. Es wird aber die Gesamtheit der Wertsysteme $v_1, v_2 \cdots v_{m+1}$ durch die *eine* Gleichung

(2) $$\Omega(v_1, v_2 \cdots v_{m+1}) = 0$$

definiert. Wenn wir p irgend einen bestimmten Wert p_0 geben, so ist also die Gleichung

(9) $$\Omega(v_1 + \psi_1(p_0), v_2 + \psi_2(p_0), \cdots v_{m+1} + \psi_{m+1}(p_0)) = 0$$

mit (2) identisch. Geben wir p einen von p_0 unendlich wenig abweichenden Wert, so ergibt sich, wenn $\psi_1'(p_0), \psi_2'(p_0) \cdots \psi'_{m+1}(p_0)$ als nicht sämtlich verschwindende Konstanten mit $a_1, a_2 \cdots a_{m+1}$ bezeichnet werden, daß die Gleichung

$$\sum_1^{m+1}{}_k \frac{\partial \Omega(v_1 + \psi_1(p_0), \cdots v_{m+1} + \psi_{m+1}(p_0))}{\partial v_k} a_k = 0$$

eine Folge von (9) oder (2) sein muß. Hiernach können wir sagen:

In dem Ausnahmefalle muß die Gleichung $\Omega = 0$ eine Gleichung

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial v_k} a_k = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Konstanten $a_1, a_2 \cdots a_{m+1}$ nach sich ziehen.

Ich will mich nicht damit aufhalten, hier zu zeigen, daß tatsächlich in diesem Ausnahmefall der Liesche Satz *nicht* gilt. Dies macht sich kürzer und klarer bei der synthetischen Beweisführung, zu der wir jetzt übergehen.

§ 2. Synthetischer Beweis.

Während ich beim Vortrage des analytischen Beweises absichtlich sehr ausführlich gewesen bin, darf ich mich beim synthetischen Beweis knapper fassen, da ich mich an solche Leser wende, die mit begrifflichen Überlegungen in Räumen von beliebig vielen Dimensionen vertraut sind. Ich schicke aber ausdrücklich voraus, *daß in § 1 gerade dieser kurze synthetische Beweis in analytischer Einkleidung wiedergegeben ist.*

Liegen die Gleichungen vor:

$$(10) \qquad v_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + \cdots + A_{km}(t_m) \quad (k=1,2\cdots m+1),$$

aus denen nach Voraussetzung eine und nur eine von $t_1, t_2 \cdots t_m$ freie Relation

$$(11) \qquad \Omega(v_1, v_2 \cdots v_{m+1}) = 0$$

folgt, die überdies algebraisch ist, so deuten wir $v_1, v_2 \cdots v_{m+1}$ als gewöhnliche Punktkoordinaten in einem Raume R_{m+1} von $m+1$ Dimensionen. Die Voraussetzungen besagen dann, daß allen Wertsystemen (10) die Punkte einer algebraischen m-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit M_m oder (11) entsprechen. Auf ihr sind $t_1, t_2 \cdots t_m$ krummlinige Koordinaten. Nennen wir einfach ausgedehnte Gebilde *Kurven*, so ist die M_m von m Scharen von je ∞^{m-1} kongruenten und gleichgestellten Kurven überzogen. Geben wir nämlich allen Parametern $t_1, t_2 \cdots t_m$ mit Ausnahme eines, etwa t_i, bestimmte Werte $t_1^0, t_2^0 \cdots t_m^0$, so stellen die Gleichungen (10) eine solche *erzeugende Kurve* dar. Werden den bestimmt gewählten Parametern andere bestimmte Werte gegeben, so heißt dies, daß zu den Koordinaten $v_1, v_2 \cdots v_{m+1}$ der Punkte jener Kurve Konstanten addiert werden, sodaß die neue Kurve tatsächlich zur vorigen kongruent und mit ihr gleichgestellt ist.

Die Mannigfaltigkeit M_m ist also, wie wir sagen können, eine algebraische *Translations- oder Schiebungsmannigfaltigkeit*[1]), die dadurch entsteht, daß man zuerst m Kurven $c_1, c_2 \cdots c_m$

1) Vgl. Sophus Lie, „Die Theorie der Translationsflächen und das Abelsche Theorem“, Leipziger Berichte 1896, S. 141—198, insbes. S. 152.

durch einen Punkt P annimmt, darauf c_m ohne Drehung längs c_{m-1} verschiebt, das entstandene Gebilde ohne Drehung längs c_{m-2} u. s. w. Setzen wir dieses Verfahren zunächst nur bis zur Kurve c_2 fort, so erhalten wir eine $(m-1)$fach ausgedehnte Schiebungsmannigfaltigkeit M_{m-1} mit $m-1$ Scharen von je ∞^{m-2} kongruenten und gleichgestellten Kurven, von denen die $m-1$ Kurven $c_2, c_3 \cdots c_m$ durch P die Typen sind. *Die M_m geht aus der M_{m-1} hervor, wenn die M_{m-1} längs c_1 ohne Drehung verschoben wird*, d. h. auch dadurch, daß man durch jeden beliebigen Punkt Q der M_{m-1} wie durch den Punkt P eine mit c_1 kongruente und gleichgestellte Kurve zieht.

Jetzt sei Q ein beliebiger Punkt von M_{m-1}, und wir denken uns die M_m doppelt übereinanderliegend, einmal als ruhendes Exemplar mit dem Punkte P und dann als ein nachher in andere Lage zu bringendes Exemplar mit dem Punkte Q. Dies zweite Exemplar enthält eine durch Q gehende mit c_1 kongruente und gleichgestellte Kurve. Wird also die zweite M_m soweit verschoben, daß ihr Punkt Q nach P fällt, so hat sie nunmehr mit der ersten, ruhenden, M_m die Kurve c_1 gemein.

Dies Verfahren denken wir uns für beliebig viele Punkte Q ausgeführt. Alsdann erhalten wir beliebig viele mit M_m kongruente und gleichgestellte, also auch algebraische M_m, die sämtlich c_1 enthalten. Schneiden sich alle diese M_m nur in einer Kurve, also in c_1, so ist c_1 algebraisch. *Dies aber sollte bewiesen werden*, da längs der c_1 die Koordinaten, abgesehen von additiven Konstanten, gleich $A_{11}(t_1)$, $A_{21}(t_1) \cdots A_{m+1,1}(t_1)$ sind.

Jetzt kommen wir zu dem *Ausnahmefall*: Er tritt ein, wenn alle M_m, die man aus der einen M_m erhält, wenn man sie so verschiebt, daß ein beliebiger Punkt Q von M_{m-1} nach P rückt, nicht nur eine Kurve, sondern eine *mindestens zweifach* ausgedehnte algebraische Mannigfaltigkeit M gemein haben.

Schiebt man die M_m in ihre alten Lagen zurück, so heißt dies: Durch jeden Punkt Q der M_{m-1} geht eine mindestens zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die mit M kongruent und gleichgestellt ist und vollständig in der M_m liegt. Mit anderen Worten: Die M_m kann auf zwei Arten aus der M_{m-1} erzeugt werden:

erstens dadurch, daß man M_{m-1} längs c_1 verschiebt,

zweitens dadurch, daß man M_{m-1} längs M verschiebt.

Im zweiten Falle aber nimmt die M_{m-1} mehr Lagen wie im ersten Falle an, wenn nicht bei ∞^1 Verschiebungen der M_{m-1}

auf der M die M_{m-1} in dieselbe Lage kommt wie bei *einer* Verschiebung auf c_1. Anders gesagt: Die M_{m-1} gestattet notwendig ∞^1 Verschiebungen, bei denen sie invariant bleibt. Daraus folgt sofort, daß sie auch bei einer unendlich kleinen Verschiebung invariant bleibt, d. h. durch alle Punkte der M_{m-1} gehen parallele Gerade, die der M_{m-1} angehören. Weil nun die M_m aus der M_{m-1} durch die Verschiebungen längs c_1 hervorgeht, so folgt: Auch durch alle Punkte der M_m gehen parallele Gerade, die der M_m angehören.

Enthält aber eine Mannigfaltigkeit unendlich viele parallele Geraden derart, daß durch jeden ihrer Punkte eine geht, so kann man sie eine *cylindrische Mannigfaltigkeit* nennen.

Der Ausnahmefall tritt also auf, wenn die Mannigfaltigkeit M_m *bei einer unendlich kleinen Verschiebung*

$$\delta v_1 = a_1 \delta t, \quad \delta v_2 = a_2 \delta t, \quad \cdots \delta v_{m+1} = a_{m+1} \delta t$$

invariant bleibt, oder, was dasselbe ist, cylindrisch ist, wobei $(a_1 : a_2 : \cdots : a_{m+1})$ die Richtung des Cylinders angibt. Analytisch ausgedrückt: Der Ausnahmefall ergibt sich, wenn die Gleichung

$$\Omega(v_1, v_2 \cdots v_{m+1}) = 0$$

der Mannigfaltigkeit eine Gleichung

$$\sum_1^{m+1} {}_k \frac{\partial \Omega}{\partial v_k} a_k = 0$$

nach sich zieht, in der $a_1, a_2 \cdots a_{m+1}$ nicht sämtlich verschwindende Konstanten sind.

Daß nun der LIEsche Satz tatsächlich nicht gilt, wenn die Mannigfaltigkeit cylindrisch ist, erkennt man sofort. Es genügt der Nachweis im gewöhnlichen Raume: Man kann auf einem algebraischen Cylinder eine beliebige transcendente Kurve annehmen und längs des Cylinders verschieben. —

Indem ich schließe, möchte ich zur Vermeidung einer falschen Auffassung nochmals hervorheben, daß ich diese Mitteilung nur als eine sehr nahe liegende Verallgemeinerung LIEscher Ideengänge auffasse, die nur das Eine zeigen sollte, daß LIE selbst schon im wesentlichen im Besitz eines einfachen Beweises seines Satzes gewesen sein wird. Eine selbständige Bedeutung möchte ich diesen Zeilen nicht beilegen.

Darmstadt, im Februar 1903.

Druckfertig erklärt 26. III. 1903.]

Über projektive Transformationsgruppen.

Von

Gerhard Kowalewski.

F sei eine algebraische Form $n$ter Ordnung in den Veränderlichen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$. Den Koeffizienten von $\mathfrak{x}_1^{n-\varrho-\sigma} \cdot \mathfrak{x}_2^{\varrho} \cdot \mathfrak{x}_3^{\sigma}$ wollen wir mit

$$\frac{n!}{(n-\varrho-\sigma)!\,\varrho!\,\sigma!} \cdot x_{\varrho+\sigma i}$$

bezeichnen, wo i die imaginäre Einheit sein soll.[1]) Die Indices der $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Koeffizienten x sind nach dieser Festsetzung lauter verschiedene komplexe Zahlen.

Unterwirft man F den Transformationen der Gruppe

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_\mu \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}_\nu}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

so werden die Koeffizienten x durch folgende Gruppe transformiert:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = \sum (n-\varrho-\sigma) x_{\varrho+1+\sigma i} p_{\varrho+\sigma i}, \\ \mathfrak{X}_i = \sum (n-\varrho-\sigma) x_{\varrho+(\sigma+1)i} p_{\varrho+\sigma i}, \\ \mathfrak{X}_{-1+i} = \sum \varrho x_{\varrho-1+(\sigma+1)i} p_{\varrho+\sigma i}, \\ \mathfrak{X}_{-1} = \sum \varrho x_{\varrho-1+\sigma i} p_{\varrho+\sigma i}, \\ \mathfrak{X}_{-i} = \sum \sigma x_{\varrho+(\sigma-1)i} p_{\varrho+\sigma i}, \\ \mathfrak{X}_{1-i} = \sum \sigma x_{\varrho+1+(\sigma-1)i} p_{\varrho+\sigma i}, \\ \mathfrak{B} = \sum \varrho x_{\varrho+\sigma i} p_{\varrho+\sigma i}, \\ \mathfrak{W} = \sum \sigma x_{\varrho+\sigma i} p_{\varrho+\sigma i}, \\ \mathfrak{U} = \sum x_{\varrho+\sigma i} p_{\varrho+\sigma i}. \end{cases}$$

1) In allen Formeln der vorliegenden Arbeit hat i diese Bedeutung.

Betrachtet man die x als homogene Punktkoordinaten in einem Raume R_N mit $N = -1 + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Dimensionen, so ist (2) eine projektive Gruppe in diesem Raume.

Man kann sich die Aufgabe stellen, alle projektiven Gruppen des R_N zu ermitteln, welche die Gruppe (2) als Untergruppe enthalten. Die analoge Frage im Gebiet der binären algebraischen Formen habe ich in einer früheren Arbeit erledigt.[1]) Die dort benutzte Methode läßt sich im wesentlichen auch hier anwenden, und es ist leicht zu erkennen, wie sie in dem allgemeinen Falle zu handhaben sein wird, wo man von einer algebraischen Form mit irgend einer Anzahl von Veränderlichen ausgeht.

I. Einführung geeigneter Gewichte.

Es wird sich als zweckmäßig erweisen, jedem $x_{\varrho+\sigma i}$ das Gewicht $\varrho + \sigma i$ und dem Symbol $p_{\varrho+\sigma i} = \frac{\partial f}{\partial x_{\varrho+\sigma i}}$ das Gewicht $-(\varrho + \sigma i)$ beizulegen. Als Gewicht von $x_{\varrho'+\sigma' i} p_{\varrho+\sigma i}$ gilt die Summe der Gewichte der beiden Faktoren, d. h. die komplexe Zahl $(\varrho' - \varrho) + (\sigma' - \sigma) i$. Bei einer *isobaren* infinitesimalen Transformation haben alle Glieder das gleiche Gewicht, und wenn man mit zwei solchen Transformationen den Klammerausdruck bildet, so addieren sich ihre Gewichte.

$\mathfrak{G}$ sei eine projektive Gruppe des R_N, in welcher die Gruppe (2) als Untergruppe steckt, und $\mathfrak{X}$ sei eine nicht isobare infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{X}$ zerlegt sich dann in isobare Summanden von verschiedenem Gewicht[2]):

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\alpha_1+\beta_1 i} + \mathfrak{X}_{\alpha_2+\beta_2 i} + \cdots$$

Kombiniert man $\mathfrak{X}$ wiederholt mit der in (2) vorkommenden infinitesimalen Transformation

$$\mathfrak{V} + i\mathfrak{W} = \sum(\varrho + \sigma i) x_{\varrho+\sigma i} p_{\varrho+\sigma i},$$

so findet man

$$(\mathfrak{V} + i\mathfrak{W}, \mathfrak{X}) = (\alpha_1 + \beta_1 i)\mathfrak{X}_{\alpha_1+\beta_1 i} + (\alpha_2 + \beta_2 i)\mathfrak{X}_{\alpha_2+\beta_2 i} + \cdots,$$

$$(\mathfrak{V} + i\mathfrak{W}, (\mathfrak{V} + i\mathfrak{W}, \mathfrak{X})) = (\alpha_1 + \beta_1 i)^2 \mathfrak{X}_{\alpha_1+\beta_1 i} + (\alpha_2 + \beta_2 i)^2 \mathfrak{X}_{\alpha_2+\beta_2 i} + \cdots$$

u. s. f. Daraus folgt dann wegen der Verschiedenheit der

1) Diese Berichte, 1902. S. 371—392.

2) Die Indices sollen die Gewichte anzeigen. Nach diesem Prinzip haben wir oben die sechs ersten infinitesimalen Transformationen von (2) bezeichnet.

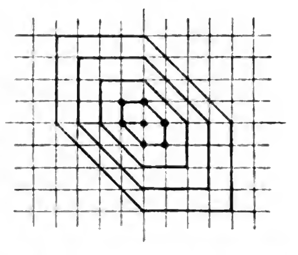
komplexen Zahlen $\alpha_1 + \beta_1 i$, $\alpha_2 + \beta_2 i, \ldots$, daß $\mathfrak{X}_{\alpha_1+\beta_1 i}$, $\mathfrak{X}_{\alpha_2+\beta_2 i}, \ldots$ selbständig in $\mathfrak{G}$ vorkommen. Wir können uns daher auf die Betrachtung der isobaren infinitesimalen Transformationen von $\mathfrak{G}$ beschränken. Jede solche hat ein bestimmtes Gewicht $\alpha + \beta i$, welches wir uns durch den Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten α, β in einer Ebene versinnlicht denken. Bezeichnen wir alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten als Gitterpunkte, so werden also die in $\mathfrak{G}$ vorkommenden Gewichte durch eine Anzahl von Gitterpunkten repräsentiert, die wir kurz *die Gitterpunkte der Gruppe* $\mathfrak{G}$ nennen werden.

II. Einschließung der Gitterpunkte von $\mathfrak{G}$ in ein Sechseck.

In der Gruppe (2) kommen nur die sieben Gewichte

$$0, \quad -1, \quad 1, \quad i, \quad -i, \quad -1+i, \quad 1-i$$

vor. Die zugehörigen Gitterpunkte bilden die Ecken und den Mittelpunkt eines Sechsecks.



Wenn man dieses Sechseck vom Mittelpunkt aus im Verhältnis $1 : m$ vergrößert (m eine positive ganze Zahl), so entsteht ein Sechseck $\mathfrak{S}_m$. Jeder Gitterpunkt der Ebene, der vom Anfangspunkt verschieden ist, liegt, wie der Anblick der Figur zeigt, auf der Peripherie eines und nur eines Sechsecks aus der Reihe

$$(3) \qquad \mathfrak{S}_1, \quad \mathfrak{S}_2, \quad \mathfrak{S}_3, \ldots$$

Das gilt insbesondere von den Gitterpunkten der Gruppe $\mathfrak{G}$, und es wird unter den Sechsecken, auf deren Peripherie ein Gitterpunkt von $\mathfrak{G}$ existiert, ein *größtes*, $\mathfrak{S}_k$, geben. Das Sechseck $\mathfrak{S}_k$ enthält also auf seiner Peripherie mindestens einen Gitterpunkt von $\mathfrak{G}$, während dies von $\mathfrak{S}_{k+1}$ nicht mehr gilt. Offenbar ist $1 \leqq k \leqq n$.

III. Umformung von $\mathfrak{G}$ durch Vertauschung der x.

Die Gruppe (2) bleibt bei gewissen Vertauschungen der x ungeändert, was unmittelbar daraus folgt, daß $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ beliebig permutiert werden dürfen, ohne daß die Gruppe (1) sich ändert. Rechnen wir die identische Substitution mit, so haben wir

folgende sechs Substitutionen, welche die Gruppe (2) ungeändert lassen[1]):

$$
(4)\quad \begin{cases}
\begin{pmatrix} \cdots & \varrho+\sigma i & \cdots \\ & \varrho+\sigma i & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdots & \varrho+\sigma i & \cdots \\ & \sigma+\varrho i & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdots & \varrho+\sigma i & \cdots \\ & n-\varrho-\sigma+\sigma i & \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \cdots & \varrho+\sigma i & \cdots \\ & n-\varrho-\sigma+\varrho i & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdots & \varrho+\sigma i & \cdots \\ & \varrho+(n-\varrho-\sigma)i & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdots & \varrho+\sigma i & \cdots \\ & \sigma+(n-\varrho-\sigma)i & \end{pmatrix}.
\end{cases}
$$

Wendet man auf eine isobare infinitesimale Transformation vom Gewicht $\alpha+\beta i \neq 0$ diese Substitutionen an, so entstehen sechs infinitesimale Transformationen mit folgenden Gewichten:

$$
(5)\quad \begin{cases} \alpha+\beta i, \quad \beta+\alpha i, \quad -(\alpha+\beta)+\beta i, \quad -(\alpha+\beta)+\alpha i, \\ \qquad \alpha-(\alpha+\beta)i, \quad \beta-(\alpha+\beta)i. \end{cases}
$$

Die Bildpunkte dieser Gewichte liegen, wie man leicht erkennt, alle auf der Peripherie eines einzigen Secksecks $\mathfrak{S}_m$ aus der Reihe (3), und zwar so, daß von zwei benachbarten Seiten[2]) wenigstens eine einen von den betrachteten Punkten enthält. Dies gilt insbesondere von den beiden Seiten, die in der Ecke $(m, 0)$ zusammenstoßen.

Aus den obigen Bemerkungen können wir folgendes schließen: Wendet man auf $\mathfrak{G}$ eine von den Substitutionen (4) an, so bewahrt $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft, die Gruppe (2) als Untergruppe zu enthalten, auch bleibt die oben definierte Zahl k ungeändert. Wir können es außerdem immer so einrichten, daß das Sechseck $\mathfrak{S}_k$ auf den beiden in der Ecke $(k, 0)$ zusammenstoßenden Seiten einen Gitterpunkt von $\mathfrak{G}$ enthält.

Gesetzt nun, $(k, 0)$ wäre kein Gitterpunkt von $\mathfrak{G}$. Dann wählen wir unter den Gitterpunkten von $\mathfrak{G}$, die sich auf den anstoßenden Seiten von $\mathfrak{S}_k$ befinden, einen, der möglichst nahe an $(k, 0)$ liegt. $\mathfrak{X} = \sum c_{\varrho,\sigma}\, x_{\alpha+\varrho+(\beta+\sigma)i}\, p_{\varrho+\sigma i}$ sei eine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}$, deren Gewicht durch diesen Gitterpunkt repräsentiert wird. Die Gewichte der drei infinitesimalen Transformationen

$$
(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}), \quad (\mathfrak{X}_i\mathfrak{X}), \quad (\mathfrak{X}_{1-i}\mathfrak{X})
$$

---

1) Der Sinn dieser Symbole ist der, daß jedes $x_{\varrho+\sigma i}$ durch das x, dessen Index unter $\varrho+\sigma i$ steht, ersetzt werden soll. In den p vollzieht sich jedesmal die entsprechende Substitution.

2) Zu einer Seite rechnen wir immer die sie begrenzenden Ecken mit.

sind

$$\alpha + 1 + \beta i, \quad \alpha + (\beta + 1)i, \quad \alpha + 1 + (\beta - 1)i$$

und werden durch Gitterpunkte dargestellt, die entweder außerhalb von $\mathfrak{S}_k$ liegen oder auf den beiden von $(k, 0)$ ausgehenden Seiten, dann aber näher an $(k, 0)$ als der Punkt (α, β). Beides ist ausgeschlossen, und man hat daher

$$(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}) = 0, \quad (\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}) = 0, \quad (\mathfrak{X}_{1-i} \mathfrak{X}) = 0.$$

Daraus folgt aber, wie eine einfache Rechnung zeigt, daß $\mathfrak{X}$ identisch verschwindet. Wir dürfen also schließen, daß $(k, 0)$ selbst zu den Gitterpunkten von $\mathfrak{G}$ gehört.

IV. Die infinitesimale Transformation vom Gewicht k.

Wir können nach dem Obigen annehmen, daß in $\mathfrak{G}$ das Gewicht k vertreten ist.

$$\mathfrak{M} = \sum c_{\varrho,\sigma} x_{\varrho + k + \sigma i} p_{\varrho + \sigma i}$$

sei eine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}$ mit diesem Gewicht. Dann muß

(6) $$(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{M}) = 0, \quad (\mathfrak{X}_i \mathfrak{M}) = 0, \quad (\mathfrak{X}_{1-i} \mathfrak{M}) = 0$$

sein; denn die Gewichte dieser infinitesimalen Transformationen werden durch Punkte repräsentiert, die außerhalb des Secksecks $\mathfrak{S}_k$ liegen und daher unmöglich Gitterpunkte von $\mathfrak{G}$ sein können. Aus (6) ergibt sich aber (abgesehen von einem konstanten Faktor)

$$\mathfrak{M} = \sum \frac{\binom{n-k}{\varrho+\sigma}}{\binom{n}{\varrho+\sigma}} x_{\varrho + k + \sigma i} p_{\varrho + \sigma i}.$$

Es ist also in $\mathfrak{G}$ nur diese eine infinitesimale Transformation vom Gewicht k vorhanden.

V. Erledigung des Falles $k = 1$.

Für $k = 1$ fallen die Gitterpunkte von $\mathfrak{G}$ mit denen der Gruppe (2) zusammen. $n\mathfrak{M}$ reduziert sich auf $\mathfrak{X}_1$ und nach dem Obigen gibt es in $\mathfrak{G}$ keine andere infinitesimale Transformation vom Gewicht 1. Wenn überhaupt irgend einem Gitterpunkt, der vom Anfangspunkt verschieden ist, zwei infinitesimale Transformationen von $\mathfrak{G}$ entsprächen, so brauchte man nur eine passende

Substitution (4) anzuwenden[1]), um eine neue Gruppe zu erhalten mit zwei infinitesimalen Transformationen vom Gewicht 1. Das ist aber unmöglich, weil für diese neue Gruppe, in der die Gruppe (2) als Untergruppe steckt, immer noch $k = 1$ wäre. Es gibt also in $\mathfrak{G}$ nur vom Gewicht 0 mehr als eine infinitesimale Transformation. Ist $\sum a_{\varrho,\sigma} x_{\varrho+\sigma i} p_{\varrho+\sigma i}$ eine solche, so müssen alle $\mathfrak{X}$ in der Gruppe (2) isobar bleiben, wenn man die Belegung (a) einführt, d. h. jedem $x_{\varrho+\sigma i}$ das Gewicht $a_{\varrho,\sigma}$ und jedem $p_{\varrho+\sigma i}$ das Gewicht $-a_{\varrho,\sigma}$ beilegt.[2]) Daraus folgt aber leicht, daß $\sum a_{\varrho,\sigma} x_{\varrho+\sigma i} p_{\varrho+\sigma i}$ sich linear aus $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ zusammensetzt.

Wir erkennen also, daß im Falle $k = 1$ die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit (2) zusammenfällt, und werden daher im folgenden immer $k > 1$ voraussetzen.

VI. Ermittelung des Wertes k im Falle $k > 1$.

Wir schreiben die infinitesimalen Transformationen

$$\mathfrak{M},\ \mathfrak{X}_{-1},\ \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{V},\ \mathfrak{U} \tag{7}$$

in folgender Weise

$$\mathfrak{M} = M + \cdots,\ \mathfrak{X}_{-1} = X_{-1} + \cdots,\ \mathfrak{X}_1 = X_1 + \cdots,$$
$$\mathfrak{V} = V + \cdots,\ \mathfrak{U} = U + \cdots,$$

wobei

$$\begin{cases} M = \sum \frac{\binom{n-k}{\varrho}}{\binom{n}{\varrho}} x_{k+\varrho} p_\varrho, & X_{-1} = \sum \varrho x_{\varrho-1} p_\varrho, \\ X_1 = \sum (n-\varrho) x_{\varrho+1} p_\varrho, & V = \sum \varrho x_\varrho p_\varrho, \quad U = \sum x_\varrho p_\varrho \end{cases} \tag{8}$$

sein soll. Die durch Punkte angedeuteten Glieder enthalten kein x und auch kein p mit reellem Index. Die infinitesimalen Transformationen (8) mögen die Verkürzungen von (7) heißen. Offenbar ist dann die Verkürzung des Klammerausdrucks von zwei infinitesimalen Transformationen (7) gleich dem Klammerausdruck ihrer Verkürzungen.

---

1) Den Substitutionen (4) entspricht, wie aus (5) hervorgeht, eine *transitive* Gruppe von Vertauschungen der Ecken von $\mathfrak{S}_1$.

2) Vgl. die Ausführungen auf S. 372 in meiner oben citierten Arbeit.

Wenn man nun durch fortgesetzte Anwendung der Klammeroperation aus den infinitesimalen Transformationen (7) neue herleitet, so gelangt man schließlich zu einer Gruppe, die in $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Die Verkürzungen ihrer infinitesimalen Transformationen bilden ebenfalls eine Gruppe, die wir mit G bezeichnen wollen. G ergibt sich auch, wenn man von den infinitesimalen Transformationen (8) ausgeht und fortgesetzt die Klammeroperation anwendet. Die Zahl k ist offenbar das Maximalgewicht, welches in G vorkommt. Gerade um diese Gruppe handelte es sich aber in meiner oben citierten Arbeit, und k hatte damals genau dieselbe Bedeutung. Wir können uns also auf die Resultate jener Arbeit[1]) hier stützen und zunächst folgendes behaupten:

Bei ungeradem n ist k gleich n, bei geradem n jedenfalls nicht kleiner als $n-1$.

Wenn n gerade und $k=n-1$ ist, so hat man

$$n\mathfrak{M} = (nx_{n-1}p_0 + x_np_1) + x_{n-1+i}p_i.$$

Kombiniert man diese infinitesimale Transformation $(n-1)$-mal nacheinander mit $\mathfrak{X}_{-1}$, so kommt (abgesehen von einem nicht verschwindenden Faktor)

$$\sum_0^n(-1)^\varrho\binom{n}{\varrho}(n-2\varrho)\,x_\varrho p_\varrho + \sum_0^{n-1}(-1)^\varrho\binom{n-1}{\varrho}\,x_{\varrho+i}p_{\varrho+i}.$$

Setzen wir

$$g_\varrho = (-1)^\varrho\binom{n}{\varrho}(n-2\varrho),\quad g_{\varrho+i} = (-1)^\varrho\binom{n-1}{\varrho},\quad g_{\varrho+\sigma i} = 0 \quad (\sigma > 1),$$

so sind die isobaren Summanden (von verschiedenem Gewicht), in die eine infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}$ bei Einführung der Belegung (g) eventuell zerfällt, selbst infinitesimale Transformationen von $\mathfrak{G}$. Nun ist

$$n(\mathfrak{M}\mathfrak{X}_{-i}) = (n-1)x_{n-1}p_i + x_np_{1+i} + 2x_{n-1+i}p_{2i}.$$

Die Gewichte der einzelnen Glieder sind bei der Belegung (g) der Reihe nach folgende:

$$-1+n(n-2),\quad -1,\quad -1.$$

Da $k=n-1$ angenommen wird und $k>1$ ist, so hat man $n>2$, und das erste Glied hat also ein anderes Gewicht

1) Siehe a. a. O. S. 376f.

als die beiden letzten, d. h. $x_{n-1}p_i$ kommt selbständig in $\mathfrak{G}$ vor. Durch Kombination von $x_{n-1}p_i$ mit $\mathfrak{X}_i$ ergibt sich aber $x_{n-1+i}p_i - nx_{n-1}p_0$. Diese infinitesimale Transformation vom Gewicht $n-1$ kann aber unmöglich in $\mathfrak{G}$ neben $\mathfrak{M}$ vorkommen, da es in $\mathfrak{G}$, wie wir wissen, außer $\mathfrak{M}$ keine infinitesimale Transformation vom Gewicht k gibt.

Es folgt hieraus, daß unter allen Umständen $k = n$ sein muß.

VII. Bestimmung der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Wir dürfen jetzt $\mathfrak{M} = x_n p_0$ setzen. Kombinieren wir

$$(\mathfrak{X}_{-1}\mathfrak{M}) = nx_{n-1}p_0 - x_n p_1$$

mit $\mathfrak{X}_{-i}$, so kommt

(9) $$-nx_{n-1}p_i + x_n p_{1+i}.$$

Wenn wir ferner n-mal nacheinander $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{X}_{-1}$ kombinieren, so ergibt sich

$$\sum_0^n (-1)^\varrho \binom{n}{\varrho} x_\varrho p_\varrho .$$

Setzen wir $g_\varrho = (-1)^\varrho \binom{n}{\varrho}$ und $g_{\varrho + i\sigma} = 0$ für $\sigma > 0$, so haben bei der Belegung (g) die beiden Glieder der infinitesimalen Transformation (9) ungleiche Gewichte. In $\mathfrak{G}$ kommt also die infinitesimale Transformation $x_n p_{1+i}$ selbständig vor. Kombiniert man sie mit $\mathfrak{X}_i$, so ergibt sich $x_n p_1$, und wir können also auch behaupten, daß in $\mathfrak{G}$ die infinitesimale Transformation $x_{n-1}p_0$ vorkommt.

Wenn man $x_n p_0$ fortgesetzt mit $\mathfrak{X}_{-1}$ kombiniert, so hat das dieselbe Wirkung, als wenn man $x_n p_0$ mit X_{-1} kombiniert. Man kann also schließen, daß in $\mathfrak{G}$ die infinitesimalen Transformationen

(10) $$x_n p_0, \quad (X_{-1}, x_n p_0), \quad (X_{-1}(X_{-1}, x_n p_0)), \ldots .$$

enthalten sind. Daraus folgt aber, wie aus meiner mehrfach citierten Arbeit[1]) zu entnehmen ist, bei geradem n sofort, daß in $\mathfrak{G}$ alle infinitesimalen Transformationen

(11) $$x_{\varrho'} p_\varrho \qquad (\varrho, \varrho' = 0, 1, \ldots, n)$$

1) Vgl. S. 378 ff.

vorkommen. Das gilt aber auch, wenn n ungerade ist, weil $\mathfrak{G}$ außer den infinitesimalen Transformationen (10) noch $x_{n-1}p_0$ enthält.[1])

Daraus, daß die infinitesimalen Transformationen (11) zu $\mathfrak{G}$ gehören, folgt nun leicht, daß diese Gruppe mit der allgemeinen projektiven des R_N zusammenfällt. Kombiniert man nämlich $x_{\varrho'}p_\varrho$ $(n-\varrho)$-mal nacheinander mit $\mathfrak{X}_{-i}$, so findet man

$$x_{\varrho'}p_{\varrho+i},\ x_{\varrho'}p_{\varrho+2i},\ \ldots,\ x_{\varrho'}p_{\varrho+(n-\varrho)i}$$

und kann daraus schließen, daß $\mathfrak{G}$ alle infinitesimalen Transformationen

(12) $$x_{\varrho'}p_{\varrho+\sigma i} \qquad (0 \leqq \varrho' \leqq n,\ 0 \leqq \varrho+\sigma \leqq n)$$

enthält. Kombiniert man $x_{\varrho'}p_{\varrho+\sigma i}$ $(n-\varrho')$-mal nacheinander mit $\mathfrak{X}_i$, so überzeugt man sich, daß in $\mathfrak{G}$ die infinitesimalen Transformationen

$$x_{\varrho'+i}p_{\varrho+\sigma i},\ x_{\varrho'+2i}p_{\varrho+\sigma i},\ \ldots,\ x_{\varrho'+(n-\varrho')i}p_{\varrho+\sigma i}$$

vorhanden sind. $\mathfrak{G}$ enthält also alle infinitesimalen Transformationen

$$x_{\varrho'+\sigma' i}p_{\varrho+\sigma i} \qquad (0 \leqq \varrho+\sigma,\ \varrho'+\sigma' \leqq n)$$

d. h. $\mathfrak{G}$ ist mit der allgemeinen projektiven Gruppe des R_N identisch, und wir finden also folgendes Resultat:

Die Gruppe (2) *steckt in keiner größeren Untergruppe der allgemeinen projektiven Gruppe des* R_N.

1) Vgl. die Bemerkungen auf S. 382f. meiner früheren Arbeit.

Druckfertig erklärt 6. IV. 1903.]

INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

FÜNFUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1903.

III.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1903.



SITZUNG VOM 4. MAI 1903.

Geschäftliches:

Erledigung eingegangener Zuschriften sowie des Tauschverkehres.

Zur Kartellversammlung in München (5. und 6. Juni) wird Herr Wiener als Delegierter entsandt.

Die von der Royal Society anberaumte Sitzung des Komitees der internationalen akademischen Association soll am 4. Juni in London stattfinden. Daran soll sich eine konstituierende Sitzung der von der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. beantragten Kommission zur Förderung der Gehirnforschung anschließen. Zur Komiteesitzung wird der Klassensekretär delegiert, außerdem wird Herr Flechsig gebeten, an der Sitzung der Gehirnkommission teilzunehmen.

Der Vorschlag der Royal Society, prinzipiell sämtliche Fragen der Association zuzuweisen, bei denen eine Unterstützung verschiedener Staaten in Frage kommt, wird von der Klasse als zu weit gehend abgelehnt.

Vorträge halten:

Herr A. Mayer, Mitteilung einer Notiz des Herrn J. Thomae: „Über orthogonale Invarianten und Kovarianten bei Kurven dritter Ordnung mit unendlich fernem Doppelpunkte".

Herr A. Mayer: „Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale".

Herr P. Flechsig: „Neue Mitteilungen über die Markentwickelung im menschlichen Gehirn".

Herr C. Neumann teilt eine Notiz mit von Herrn H. Liebmann: „Über die Zentralbewegung in der nichteuklidischen Geometrie".

Über orthogonale Invarianten und Kovarianten bei Kurven dritter Ordnung mit unendlich fernem Doppelpunkte.

Von

J. Thomae.

In den Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von 1899 habe ich die orthogonalen Invarianten der Kurven dritter Ordnung in Untersuchung gezogen. Darauf hat Herr A. Greiner in seiner Dissertation (Jena 1902) auf meine Veranlassung diese Untersuchung in dem speziellen Falle fortgesetzt, in dem die Kurve einen unendlich fernen Doppelpunkt hat. Es ist ihm gelungen eine größere Reihe metrischer Eigenschaften dieser Kurven ausfindig zu machen, und dieselben in orthogonalen Invarianten auszudrücken. Herr Greiner hat die Eigenschaft der Kurve, einen unendlich fernen Doppelpunkt zu haben, in der Kurvengleichung nicht unmittelbar zum Ausdruck gebracht, sondern die Koeffizienten allgemein gelassen. Dadurch sind manche seiner Formen bedingte Invarianten. Bringt man aber die besagte Bedingung sofort in den Koeffizienten zum Ausdruck, so ergeben sich ganz erhebliche Vereinfachungen, und es gelingt namentlich die Kurvengleichung so darzustellen, daß alle ihre Koeffizienten rationale orthogonale Invarianten sind, die ein vollständiges System bilden, durch die alle orthogonalen Invarianten, insbesondere auch die allgemeinen, also auch orthogonalen Invarianten S und T rational darzustellen sind. Auch läßt sich die Kurvengleichung durch gerade orthogonale Kovarianten ausdrücken. Auf eine Fülle von metrischen Eigenschaften wird man so geführt, selbst wenn man sich auf die einfachsten beschränkt. Von besonderem Interesse sind die zahlreichen geraden Kovarianten, zu denen z. B. der Ort, der Punkt gehört, deren zugehörige Tangentenquadrupel das singuläre Doppelverhältnis $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ hat, diese Gerade ist eine allgemeine Kovariante der

Kurven dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Der Ort der Punkte, in denen das Doppelverhältnis das harmonische ist, ist eine kovariante Kurve dritter Ordnung. — Alles dies läßt eine Fortsetzung der Greinerschen Arbeit gerechtfertigt erscheinen.

Meine eigene Arbeit vom Jahre 1899 will ich mit (Abh. pag. . .), die des Herrn Greiner mit (Gr. pag. . .) citieren.

§ 1. Bezeichnungen.

Die allgemeine Kurve dritter Ordnung werde, wie in meiner Abhandlung von 1899 in der Form gegeben gedacht

$$f_a(x, y) = f_a^{(3)}(x, y) + 3f_a^{(2)}(x, y) + 3f_a^{(1)}(x, y) + f_a^{(0)} = 0,$$

$$f_a^{(0)} = a_{00},\ f_a^{(3)}(x, y) = a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3,$$

$$f_a^{(2)}(x, y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2,\ f_a^{(1)}(x, y) = a_{10}x + a_{01}y.$$

Diese Kurve hat in der Richtung, die um den Winkel $A - \frac{1}{2}\pi$ von der x-Achse abweicht einen Doppelpunkt, wenn

$$f_a^{(3)}(x, y) = (\mathfrak{a}_{30}x + \mathfrak{a}_{03}y)(x \cos A + y \sin A)^2,$$

$$f_a^{(2)}(x, y) = (\mathfrak{a}_{20}x + \mathfrak{a}_{02}y)(x \cos A + y \sin A)$$

ist, was hier vorausgesetzt wird. Es ist dann

$$a_{30} = \mathfrak{a}_{30} \cos^2 A,\ a_{21} = \tfrac{2}{3}\mathfrak{a}_{30} \cos A \sin A + \tfrac{1}{3}\mathfrak{a}_{03} \cos^2 A,$$

$$a_{12} = \tfrac{1}{3}\mathfrak{a}_{30} \sin^2 A + \tfrac{2}{3}\mathfrak{a}_{03} \cos A \sin A,\ a_{03} = \mathfrak{a}_{03} \sin^2 A,$$

$$a_{30}a_{03} - a_{12}a_{21} = -\tfrac{4}{9}(\mathfrak{a}_{30} \sin A - \mathfrak{a}_{03} \cos A)^2 \cos A \sin A,$$

$$a_{20} = \mathfrak{a}_{20} \cos A,\ a_{02} = \mathfrak{a}_{02} \sin A,\ 2a_{11} = \mathfrak{a}_{20} \sin A + \mathfrak{a}_{02} \cos A.$$

Die Diskriminante D der Form $f_a^{(3)}(x, y)$ ist in diesem Falle Null, und $\mathfrak{a}_{30}^2 + \mathfrak{a}_{03}^2$ ist eine orthogonale Invariante, deren Verschwinden bedeutet, daß die Kurve durch einen absoluten Punkt gehe, was für reelle $\mathfrak{a}$ nicht möglich ist. Die Bezeichnungen für orthogonale Invarianten, die in meiner Abhandlung von 1899 eingeführt sind, behalte ich hier bei, werde sie jedoch von neuem erklären. Die allgemeine Kurve ging (Abh. pag. 324) durch einen absoluten Punkt, wenn

$$O_2' - 9\,O_2 = f^{(3)}(1, i)\, f^{(3)}(1, -i) = (a_{30} - 3a_{12})^2 + (a_{03} - 3a_{21})^2$$

verschwindet. Dies stimmt, wie man sich durch Einsetzen der $\mathfrak{a}$ für die a überzeugt, mit der Bedingung $\mathfrak{a}_{30}\mathfrak{a}_{30} + \mathfrak{a}_{03}\mathfrak{a}_{03} = 0$ überein.

Die orthogonale Invariante (Abh. pag. 323)

$$O_2' = a_{30}^2 + 3a_{30}a_{12} + 3a_{03}a_{21} + a_{03}^2$$

gewinnt durch Einsetzen der $\mathfrak{a}$ die Form $(\mathfrak{a}_{30}\cos A + \mathfrak{a}_{03}\sin A)^2$ und es ist demnach

$$O_1' = \mathfrak{a}_{30}\cos A + \mathfrak{a}_{03}\sin A = \mathfrak{c}_{30}$$

eine orthogonale Invariante der Doppelpunktskurve $f_a(x, y) = 0$, wovon man sich noch leicht direkt überzeugt.

Die Asymptoten im Doppelpunkte mögen als erste und zweite, die weitere als dritte gezählt werden. Das Verschwinden der linearen orthogonalen Invariante O_1' bedeutet, daß die dritte Asymptote auf den beiden ersten senkrecht steht.

Ferner ist (Abh. pag. 324)

$$O_2 = a_{30}a_{12} - a_{21}a_{21} - a_{12}a_{12} + a_{03}a_{21}$$

eine orthogonale Invariante. Substituiert man die $\mathfrak{a}$, so folgt

$$9\,O_2 = -(\mathfrak{a}_{30}\sin A - \mathfrak{a}_{03}\cos A)^2,$$

und es ist demnach

$$O_1 = -\mathfrak{a}_{30}\sin A + \mathfrak{a}_{03}\cos A = \sqrt{-9\,O_2} = 3\mathfrak{c}_{21}$$

eine zweite lineare orthogonale Invariante der Kurve $f_a = 0$, deren Verschwinden besagt, daß von den beiden parallelen Asymptoten eine die uneigentliche Gerade, und eine dritte Asymptote nicht vorhanden ist. Wir notieren noch die Formel

$$a_{30}a_{03} - a_{21}a_{12} = -\tfrac{2}{9}O_1^2\cos A\sin A = 2\,O_2\cos A\sin A.$$

Setzt man in der Asymptotendreiecksinvariante (Abh. pag. 332)

$$O_3 = -\begin{vmatrix} a_{20} & a_{30} & a_{21} \\ a_{11} & a_{21} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{30} \end{vmatrix}$$

die $\mathfrak{a}$ ein, so findet man

$$O_3 = 0,$$

obschon das Asymptotendreieck unendlich groß ist.

Machen wir die Substitution

$$x' = x\cos A + y\sin A,\quad y' = -x\sin A + y\cos A,$$
$$x = x'\cos A - y'\sin A,\quad y = x'\sin A + y'\cos A,$$

so geht f_a über in

$$f_{a'} = a_{30}'x'^3 + 3a_{21}'x'^2y' + \cdots + 3a_{01}'y' + a_{00}',$$

wobei

$$a'_{30} = c_{30}, \; a'_{21} = c_{21}; \; a'_{12} = a'_{03} = 0, \; a'_{20} = a_{20} \cos A + a_{02} \sin A$$
$$2a'_{11} = - a_{20} \sin A + a_{02} \cos A, \; a'_{02} = 0, \; a'_{00} = a_{00}$$
$$a'_{10} = a_{10} \cos A + a_{01} \sin A, \; a'_{01} = - a_{10} \sin A + a_{01} \cos A$$

ist. In dieser Form ist

$$- O_3 = \begin{vmatrix} a'_{20} & c_{30} & c_{21} \\ a'_{11} & c_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

und das Verschwinden dieser orthogonalen Invariante tritt einfach in Evidenz.

Eine dritte Form geben wir der Kurvengleichung $f_a = 0$ durch die Substitution $x = x'' + p'$, $y = y'' + q'$, p' und q' so einrichtend, daß die Glieder zweiter Ordnung aus der Kurvengleichung herausfallen. Dann muß man (Abh. pag. 332)

$$a_{30}p' + a_{21}q' + a_{20} = 0, \quad a_{21}p' + a_{12}q' + a_{11} = 0,$$
$$a_{12}p' + a_{03}q' + a_{02} = 0$$

setzen, was möglich ist, weil O_3 verschwindet. Die Kurvengleichung gewinnt dadurch die Form, wenn man $x''y''$ durch xy ersetzt,

$$f_b(xy) = b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + \cdots + 3b_{01}y + b_{00},$$

wo

$$b_{30} = a_{30}, \quad b_{21} = a_{21}, \quad b_{12} = a_{12}, \quad b_{03} = a_{03},$$
$$b_{20} = b_{11} = b_{02} = 0$$
$$b_{10} = a_{10} + a_{20}p' + a_{11}q', \quad b_{01} = a_{01} + a_{11}p' + a_{12}q',$$
$$b_{00} = 2(a_{20}p'p' + 2a_{11}p'q' + a_{02}q'q') + 3(a_{10}p' + a_{01}q') + a_{00}$$

ist.

Endlich geben wir der Gleichung der Kurve eine vierte Form, indem wir die beiden Substitutionen verbinden, nämlich

$$x''' = x'' \cos A + y'' \sin A, \quad y''' = - x'' \sin A + y'' \cos A$$

setzen. Dadurch erhalten wir mit Unterdrückung der dreifachen Accente

$$f_c(xy) = c_{30}x^3 + 3c_{21}x^2y + 3c_{10}x + 3c_{01}y + c_{00} = 0.$$

Die Größen $p'q'$ mögen durch diese Substitution bez. in p und q übergehen, sie werden durch die Gleichungen bestimmt

$$a'_{30}p + a'_{21}q + a'_{20} = 0, \quad a'_{21}p + a'_{11} = 0,$$

aus denen sich ergibt

$$p = -\frac{a'_{11}}{a'_{21}} = -\frac{a'_{11}c_{21}}{c_{21}c_{21}} = \frac{a'_{11}c_{21}}{O_2}$$

$$q = (a'_{20}c_{21} - a'_{11}c_{30}) : O_2 .$$

§ 2. In der Form $f_c(xy)$ sind sämtliche Koeffizienten orthogonale Invarianten.

Daß

$$c_{30} = \mathfrak{a}_{30}\cos A + \mathfrak{a}_{03}\sin A = O'_1, \quad c_{21} = \tfrac{1}{3}(-\mathfrak{a}_{30}\sin A + \mathfrak{a}_{03}\cos A) = \tfrac{1}{3}O_1$$

orthogonale Invarianten sind, fanden wir schon. Der unendlich ferne Doppelpunkt der Kurve $f_c = 0$ liegt auf der y-Achse, und der Koordinatenanfang hat die Eigenschaft, daß seine erste Polare in die unendlich ferne Gerade und die Gerade

$$2c_{10}x + 2c_{01}y + c_{00} = 0$$

zerfällt. Aus diesem Grunde hat Herr Greiner (Gr. pag. 12) diesen Punkt nicht unpassend Geradenpol genannt. Da jedoch die erste Polare wegen ihres uneigentlichen Teiles durch die absoluten Punkte geht, und um in Übereinstimmung mit meiner ersten Abhandlung zu bleiben, will ich den Punkt Kreispol nennen. Seine zweite Polare ist der ersten parallel und hat die Gleichung

$$c_{10}x + c_{01}y + c_{00} = 0.$$

Diese beiden Geraden, die erste und die zweite Polare des Kreispoles, sind orthogonale Kovarianten der Kurve $f_a = 0$ und der Punkt $x = p$, $y = q$ in Bezug auf die Kurve $f_a = 0$, oder der Koordinatenanfang für $f_c = 0$ ist ein orthogonal-kovarianter Punkt der Kurve.

Das Quadrat der Entfernung des Kreispoles von der zweiten Polare $c_{00}^2 : (c_{01}^2 + c_{10}^2)$ ist eine orthogonale Invariante. Der Nenner ist aber als orthogonale Invariante einer Kovariante für sich orthogonal-invariant, mithin ist auch c_{00} eine orthogonale Invariante. Die Größen c_{10}, c_{01} sind bez. dem Sinus und Cosinus des vom Koordinatensystem unabhängigen Winkels der zweiten Polare des Kreispoles mit den beiden ersten Asymptoten proportional, sie sind orthogonale Invarianten. Auch die Gerade $y = 0$, die auf den beiden ersten Asymptoten senkrecht steht, und durch den Kreispol geht, ist eine orthogonale Kovariante. Nun ist

$$c_{10}O_2 = a'_{10}O_2 + a'_{11}(2a'_{20}a'_{21} - a'_{11}a'_{30}),$$

$$c_{01}O_2 = a'_{01}O_2 + a'_{11}a'_{11}a'_{21} = -a'_{01}c_{21}c_{21} + a'_{11}a'_{11}c_{21}$$

$$= \tfrac{1}{3}O_1\,(a'_{11}a'_{11} - a'_{01}a'_{21}).$$

Es ist demnach

$$O_2''' = a_{11}' a_{11}' - a_{01}' a_{21}'$$

eine orthogonale Invariante zweiter Dimension. Ebenso ist

$$c_{10} O_2 = a_{10}' O_2 + a_{11}' (2 a_{20}' a_{21}' - a_{11}' a_{30}')$$

eine orthogonale Invariante dritter Dimension, die mit O_3' bezeichnet werden mag. Ist $c_{00} = 0$, so hat die Kurve einen Mittelpunkt, woraus die Invarianteneigenschaft nochmals folgt. Wir drücken die Invariante c_{00} durch die a' aus

$$c_{00} = 2(a_{20}' p + 2 a_{11}' q) p + 3(a_{10}' p + a_{01}' q) + a_{00}'$$

$$c_{00} O_2^2 = 2 a_{11}' (3 a_{20}' a_{21}' - 2 a_{11}' a_{30}') a_{11}' a_{21}' + 3 a_{10}' a_{11}' a_{21}' O_2$$
$$+ 3 a_{01}' (a_{20}' a_{21}' - a_{11}' a_{30}') + a_{00}' O_2^2$$

$$\frac{3 c_{00} O_2^2}{O_1} = 2 a_{11}' a_{11}' (3 a_{20}' a_{21}' - 2 a_{11}' a_{30}') + 3 a_{10}' a_{11}' O_2$$
$$+ 3 a_{01}' a_{20}' O_2 - a_{01}' a_{11}' a_{30}' O_1 - \tfrac{1}{3} a_{00}' O_2 O_1.$$

Dies ist eine Invariante vierter Dimension, die mit O_4 bezeichnet werden mag.

§ 3. Zusammenstellung der orthogonalen Grundinvarianten.

Da die Koeffizienten der Kurve $f_c(x, y) = 0$ sämtlich orthogonale Invarianten sind, so lassen sich alle noch vorhandenen orthogonalen Invarianten durch diese fünf darstellen, die demnach ein vollständiges System bilden und deshalb Grundinvarianten genannt werden können. Es sind die Formen

$$O_1 = - \mathfrak{a}_{30} \sin A + \mathfrak{a}_{03} \cos A, \quad O_1' = \mathfrak{a}_{30} \cos A + \mathfrak{a}_{03} \sin A$$

$$O_2''' = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{a}_{20} \sin A + \mathfrak{a}_{02} \cos A)^2 - \tfrac{1}{3}(- \mathfrak{a}_{30} \sin A + \mathfrak{a}_{03} \cos A)(- a_{10} \sin A + a_{01} \cos A)$$

$$O_3' = - \tfrac{1}{9}(a_{10} \cos A + a_{01} \sin A)\, O_1^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}(- \mathfrak{a}_{20} \sin A + \mathfrak{a}_{02} \cos A) \tfrac{2}{3} (\mathfrak{a}_{20} \cos A + \mathfrak{a}_{02} \sin A)(- \mathfrak{a}_{30} \sin A + \mathfrak{a}_{03} \cos A)$$
$$- \tfrac{1}{4}(- \mathfrak{a}_{20} \sin A + \mathfrak{a}_{02} \cos A)^2 (\mathfrak{a}_{30} \cos A + \mathfrak{a}_{03} \sin A)$$

$$O_4 = \tfrac{1}{2}(- \mathfrak{a}_{20} \sin A + \mathfrak{a}_{02} \cos A)^2 (\mathfrak{a}_{20} \cos A + \mathfrak{a}_{02} \sin A)(- \mathfrak{a}_{30} \sin A + \mathfrak{a}_{03} \cos A)$$
$$- (- \mathfrak{a}_{20} \sin A + \mathfrak{a}_{02} \cos A)^3 (\mathfrak{a}_{30} \cos A + \mathfrak{a}_{03} \sin A) - \tfrac{1}{3} a_{00} O_2 O_1$$
$$+ 3 O_2 \tfrac{1}{2}(- \mathfrak{a}_{20} \sin A + \mathfrak{a}_{02} \cos A)(a_{10} \cos A + a_{01} \sin A)$$
$$+ 3 O_2 (\mathfrak{a}_{20} \cos A + \mathfrak{a}_{02} \sin A)(- a_{10} \sin A + a_{01} \cos A))$$
$$- \tfrac{1}{2}(- \mathfrak{a}_{10} \sin A + \mathfrak{a}_{01} \cos A)(- \mathfrak{a}_{20} \sin A + \mathfrak{a}_{02} \cos A)(\mathfrak{a}_{30} \cos A + \mathfrak{a}_{03} \sin A)\, O_1.$$

Die orthogonalen Invarianten $O_2 = -\frac{1}{9} O_1 O_1$, $O_2' = O_1' O_1'$ sind im Grunde entbehrlich, können aber um so mehr als willkommene Abkürzungen beibehalten werden, als sie Beziehung zu den allgemeinen Kurven dritter Ordnung haben, in denen sie orthogonale Invarianten niedrigster Dimension sind, weil die linearen Formen O_1, O_1' dort fehlen.

In der Gleichung $f_c = 0$ sind also alle Koeffizienten einfach rationale Funktionen der orthogonalen Grundinvarianten. Die Formen c_{01}, c_{10}, c_{00} enthalten zwar einen Nenner und sind deshalb nicht so einfach als die Grundinvarianten. Gleichwohl wird es sich empfehlen, wegen ihrer Stellung in der Kurvengleichung alle weiteren Invarianten nicht in den O, sondern in den c auszudrücken. Die gewonnenen Ausdrücke können ja sofort durch die Beziehungen

$$c_{30} = O_1', \quad c_{21} = \frac{1}{3} O_1, \quad c_{10} = O_3' : O_2, \quad c_{01} = -3 O_2''' : O_1$$
$$c_{00} = O_1 O_4 : 3 O_2^2$$

in Funktionen der O umgesetzt werden.

§ 4. Darstellung der Invarianten S und T durch orthogonale Invarianten.

Setzen wir die c in die biquadratische Invariante S der allgemeinen Kurven dritter Ordnung ein, so erhalten wir

$$S = -c_{01} c_{01} c_{21} c_{21} = -O_2''' O_2'''.$$

Es ist also S ein vollständiges Quadrat. Ihr Verschwinden bedeutet, daß die zweite Polare des Kreispoles den beiden ersten Asymptoten parallel ist, wenn der Faktor c_{00} verschwindet. Der Faktor c_{21} darf nicht als verschwindend angenommen werden, weil in diesem Falle die Reduktion der Kurvengleichung auf den Kreispol als Koordinatenanfang nicht möglich ist. $S : (c_{01}^2 + c_{10}^2) O_2$ ist das Quadrat des Sinus des Neigungswinkels dieser Polare gegen die parallelen Asymptoten.

Setzt man die c in die bikubische Invariante T ein, so erhält man

$$T = 8 c_{21}^3 c_{01}^3, \quad T^2 + 64 S^3 = 0.$$

Ist O_1 gleich Null, so daß die Kurve nicht in die Form $f_c = 0$ gebracht werden kann, so läßt sie sich in die Form $f_{a'} = 0$ des § 1 bringen, und es ist dann $a_{21}' = 0$. Die Invariante S reduziert sich dann auf den Ausdruck

$$S = -a_{11}' a_{11}'$$

Ihr Verschwinden bedeutet eine Spitze, deren Tangente die uneigentliche Gerade ist.

§ 5. Geradlinige orthogonale Kovarianten und orthogonal kovariante Punkte.

Die parallelen Asymptoten haben die Gleichungen

$$x = \pm e, \quad e^2 = - c_{01} : c_{21} = O_2''' : O_2$$

sie fallen zusammen, wenn $O_2''' = 0$ ist, wenn nicht zugleich c_{21} gleich Null ist. Sind c_{01} und c_{21} gleichzeitig Null, so zerfällt die Kurve in drei parallele gerade Linien.

Wird die Kurvengleichung in der Form $f_c = 0$ gegeben, so kann natürlich c_{21} gleich Null sein, und es ist dann die uneigentliche Gerade Asymptote. Wir wollen aber den singulären Fall $O_1 = 0$ im folgenden ausschließen.

Die parallelen Asymptoten bilden ein orthogonal kovariantes Geradenpaar, einzeln genommen enthalten die Gleichungen eine irrationale Größe, ihre Mitte aber ist eine rationale orthogonal kovariante Gerade, die übrigens noch eine besondere nachher zu erörternde Bedeutung hat. Ebenso ist die dritte Asymptote

$$c_{30}x + 3c_{21}y = 0$$

eine orthogonale Kovariante. Weiter sind die Geraden

$$2c_{10}x + 2c_{01}y + c_{00} = 0,$$

als endlicher Bestandteil der ersten Polare des Kreispoles, und die Gerade

$$c_{10}x + c_{01}y + c_{00} = 0$$

die zweite Polare des Kreispoles orthogonale Kovarianten.

Ebenso die Gerade durch den Kreispol, die auf der dritten Asymptote senkrecht steht,

$$3c_{21}x - c_{30}y = 0$$

Die vier Geraden $x = 0$, $3c_{21}x - c_{30}y = 0$, $y = 0$, $c_{30}x + 3c_{21}y = 0$, bilden einen harmonischen Büschel, woraus ebenfalls die Invarianteneigenschaft der aufgestellten Geraden folgt.

Es gibt Punkte der Kurve, deren Koordinaten rationale Funktionen der Koefficienten der Kurvengleichung sind. Sie sind orthogonal kovariante Punkte. Z. B. der Punkt

$$x = 0, \quad y = - c_{00} : 3c_{01}.$$

Seine Tangente hat die Gleichung

$$3xc_{10} + 3yc_{01} + c_{00} = 0,$$

sie ist eine orthogonale Kovariante. Wir wollen den Punkt den parabelhaltenden Kurvenpunkt nennen. Die uneigentliche Gerade, die Tangente im parabelhaltenden Punkte, die zweite und die erste Polare des Kreispoles bilden einen harmonischen Büschel.

Ein andrer rationaler Punkt der Kurve wird durch den Schnitt der beiden orthogonalen kovarianten Geraden

$$xc_{30} + 3c_{21}y = 0, \quad 3xc_{10} + 3yc_{01} + c_{00} = 0$$

gefunden. Seine Koordinaten sind

$$x : y : 1 = c_{00}c_{21} : -\tfrac{1}{3}c_{10}c_{30} : c_{30}c_{01} - 3c_{21}c_{10}.$$

Der dritte unendlich ferne Punkt und der parabelhaltende Kurvenpunkt sind in Mac Laurins Sinne korrespondierende Punkte.

Die Tangente im letztgefundenen Punkte ist eine orthogonale Kovariante, ihr Schnittpunkt mit der Kurve ein kovarianter Punkt. Durch fortgesetztes Tangentenziehen gelangt man zu unendlich vielen kovarianten Punkten und Geraden.

Die Kurve $f_c = 0$ ist durch drei orthogonal kovariante Gerade dargestellt. Denn es ist f_c das Produkt aus der dritten Asymptote in das Quadrat der parabelhaltenden Geraden, der Mitte der parallelen Asymptoten, vermindert um die Tangente des parabelhaltenden Kurvenpunktes.

Ein Punkt, in dem die beiden durch ihn gehenden Geraden, auf denen die Summe der Strecken bis zu den Kurvenschnittpunkten Null ist, senkrecht aufeinanderstehen, wurde (Abh. pag. 338) von mir ein orthischer Punkt genannt. Der Kreispol gehört natürlich zu diesen Punkten. Sie füllen eine Gerade aus, für die bei der allgemeinen Kurve die Gleichung gefunden wurde

$$(a_{30} + a_{12})x + (a_{21} + a_{03})y + a_{20} + a_{02} = 0.$$

Für die Kurve $f_c = 0$ wird die Gleichung der orthischen Geraden, die eine orthogonale Kovariante ist

$$c_{30}x + c_{21}y = 0.$$

Harmonisch getrennt von dieser Geraden und den Geraden $x = 0$ $y = 0$ ist die orthogonal kovariante Gerade

$$c_{30}x - c_{21}y = 0.$$

Sucht man Punkte, in denen die beiden Geraden zusammenfallen, auf denen die Abstandssumme von der Kurve Null ist, so muß die Gleichung

$$\cos^2\varphi(c_{30}x + c_{21}y) + 2\cos\varphi\sin\varphi c_{21}x = 0$$

nur einen Wert für φ ergeben. Das geschieht für $x = 0$, und der Ort dieser Punkte ist die Mitte der parallelen Asymptoten. Herr Greiner zeigt (Gr. p. 17), daß die erste Polare jedes dieser Punkte eine Parabel ist, wir können deshalb mit ihm diese orthogonale Kovariante die parabelhaltende Gerade nennen.

Die Schnittpunkte aller dieser kovarianten Geraden miteinander sind orthogonal kovariante Punkte, die mit den parallelen Asymptoten sind orthogonal kovariante Punktpaare.

Damit sind die orthogonal kovarianten Geraden keineswegs erschöpft. Insbesondere führt die Hessesche Kovariante zu neuen Geraden dieser Art.

§ 6. Die Hessesche Kovariante.

Die Gleichung der Hesseschen Kurve ist

$$\begin{vmatrix} c_{30}x + c_{21}y, & c_{21}x, & c_{10} \\ c_{21}x, & 0, & c_{01} \\ c_{10}, & c_{01}, & c_{10}x + c_{01}y + c_{00} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{21}y, & c_{21}x, & c_{10} \\ c_{21}x, & 0, & c_{01} \\ \frac{c_{10}c_{21} - c_{01}c_{30}}{c_{21}}, & c_{01}, & c_{00} + c_{10}x + c_{01}y \end{vmatrix}$$

$$= -c_{21}c_{21}(xc_{10} + yc_{01})x^2 - c_{21}c_{21}c_{00}x^2 + c_{01}(2c_{10}c_{21} - c_{01}c_{30})x - c_{21}c_{01}c_{10}y = 0.$$

Die Kurve geht durch den Kreispol und zweimal durch den Doppelpunkt der Mutterkurve, ihre dritte Asymptote ist die erste Polare des Kreispoles (Gr. p. 32). Es folgt daraus der allgemeinere Satz: Legt man durch den Doppelpunkt einer Kurve dritter Ordnung eine Gerade, so gibt es auf ihrer Hesseschen Kurve einen Punkt, dessen erste Polare diese Gerade enthält. Der zweite Bestandteil dieser Polare ist die Tangente der Mutterkurve im dritten Punkte, den die erste Gerade noch mit der Kurve gemein hat.

Die orthogonalen Invarianten $c_{10}c_{01}$ gewinnen dadurch die Bedeutung, daß sie dem Cosinus bez. Sinus des Winkels der dritten Asymptote gegen die auf der parabelhaltenden Geraden Senkrechte proportional sind. Die dritte Asymptote der Hesse-

schen Kurve steht auf der dritten Asymptote der Mutterkurve senkrecht oder ist ihr parallel, je nachdem

$$c_{10}c_{30} + 3c_{01}c_{21} = 0, \quad 3c_{10}c_{21} - c_{01}c_{30} = 0$$

ist. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind orthogonale Invarianten höherer Dimension. Hat die Kurve einen Mittelpunkt, und ist die zweite Gleichung erfüllt, so haben beide Kurven dieselbe dritte Asymptote.

Setzen wir

$$h = c_{00} : c_{01},$$

so kann die Gleichung der HESSEschen Kurve geschrieben werden

$$H = -c_{21}c_{21}(xc_{10} + (y+h)c_{01})x^2 + c_{01}(2c_{10}c_{21} - c_{01}c_{30})x$$
$$- c_{21}c_{01}c_{01}(y+h) + c_{21}c_{01}c_{00} = 0.$$

Die Kreispole der Mutterkurve und ihrer HESSEschen liegen demnach auf einer Geraden, die für beide die parabelhaltende ist, und ihre Entfernung $c_{00} : c_{01}$ ist eine orthogonale Invariante. Hat die Mutterkurve einen Mittelpunkt, so hat ihre HESSEsche denselben. Die Mitte zwischen beiden Kreispolen ist ein orthogonal kovarianter Punkt.

Das Quadrat der Entfernung des Kreispoles von den parallelen Asymptoten der HESSEschen Kurve ist

$$-\frac{c_{21}c_{01}c_{01}}{c_{21}c_{21}c_{01}} = -\frac{c_{01}}{c_{21}},$$

also fallen die parallelen Asymptoten der Mutterkurve und ihrer HESSEschen zusammen, was natürlich nur als Rechnungsprobe anzusehen ist.

Ein orthogonal invariantes Geradentripel erhält man, wenn man y aus $H = 0$ und $f_c = 0$ eliminiert. Es ist

$$f_c = y(3c_{21}x^2 + 3c_{01}) + c_{30}x^3 + 3c_{10}x + c_{00},$$
$$H = -c_{21}c_{01}y(c_{21}x^2 + c_{01}) - c_{21}c_{21}c_{10}x^3$$
$$+ c_{01}(2c_{10}c_{21} - c_{01}c_{30})x - c_{21}c_{21}c_{00}x^2,$$
$$c_{21}c_{01}f_c + 3H = c_{21}(c_{30}c_{01} - 3c_{21}c_{10})x^3 - 3c_{21}c_{21}c_{00}x^2$$
$$+ 3x(3c_{10}c_{01}c_{21} - c_{01}c_{10}c_{30}) + c_{21}c_{01}c_{10}.$$

Dieser Ausdruck gleich Null gesetzt liefert die drei Geraden, die der Doppelpunkt mit den drei Wendepunkten bestimmt, sie bilden demnach ein kovariantes Tripel.

§ 7. Die Dreiwendepunktslinie.

Die Hessesche Kurve führt nun weiter zu einer kovarianten Geraden, die die drei Wendepunkte der Kurve verbindet. Ist x eine Wurzel der Gleichung $c_{01}c_{21}f_c + 3H = 0$, die die Abscissen der Wendepunkte liefert, so ist das zugehörige y

$$y = -(c_{30}x^3 + 3c_{10}x + c_{00}) : 3(c_{21}x^2 + c_{01}).$$

Setzen wir nun die Gleichung der Dreiwendepunktslinie in der Form voraus

$$Ux + Vy + W = 0,$$

setzen dann für y den obigen Wert ein und schaffen den Nenner fort, so erhalten wir den Ausdruck:

$$x^3(3c_{21}U - c_{30}V) + 3c_{21}Wx^2 + 3x(c_{01}U - c_{10}V) + 3c_{01}W - c_{00}V,$$

der für dieselben Werte von x verschwinden muß, als der Ausdruck $c_{01}c_{21}f_c + 3H$. Es müssen demnach die Gleichungen bestehen

$$3c_{21}U - c_{30}V = c_{21}m, \qquad W = -c_{21}c_{00},$$
$$c_{01}U - c_{10}V = -c_{01}m, \quad Vc_{00} - 3c_{01}W = -c_{21}c_{01}c_{00},$$

worin m eine augenblickliche Abkürzung für den Ausdruck $c_{30}c_{01} - 3c_{21}c_{10}$ ist.

W ist unmittelbar gegeben, aus der letzten Gleichung folgt $V = -4c_{21}c_{01}$. Gleichviel, ob man die eine oder die andere der übrig bleibenden Gleichungen benutzt, die Gleichungen sind eben miteinander verträglich, man erhält für U den Wert

$$U = -(c_{21}c_{10} + c_{30}c_{01}),$$

und als Gleichung der Dreiwendepunktslinie

$$(c_{21}c_{10} + c_{30}c_{01})x + 4c_{21}c_{01}y + c_{21}c_{00} = 0.$$

Hat die Kurve einen Mittelpunkt, ist $c_{00} = 0$, so geht diese Linie durch ihn, er ist ja ein Wendepunkt. Der Fall $c_{21} = 0$ ist singulär, es ist dann im allgemeinen $c_{00} = \infty$. Ist aber c_{00} endlich, so geht die Gleichung in $x = 0$ über, die Gerade verbindet die Spitze mit dem einen in diesem Falle nur vorhandenen Wendepunkt. Für $c_{21} = 0$ liegt aber im allgemeinen der Kreispol nicht im Endlichen, der Fall ist deshalb singulär.

Die orthische Gerade der Hesseschen Kurve hat die Gleichung

$$3c_{10}x + c_{01}(y + h) = 3c_{10}x + c_{01}y + c_{00} = 0.$$

Sie schneidet sich mit der orthischen Geraden der Mutterkurve $c_{30}x + c_{21}y = 0$ im Punkte

$$x : y : 1 = c_{21}c_{00} : -c_{30}c_{00} : c_{30}c_{01} - 3c_{21}c_{10}.$$

Die orthischen Geraden aller Kurven der Schar $f_c + \lambda H = 0$ gehen durch diesen orthogonal kovarianten Punkt, der *panorthischer Punkt* heißen mag.

Der panorthische Punkt und die Kreispole der Kurve und ihrer Hesseschen bestimmen ein Dreieck, dessen doppelter Inhalt eine orthogonale Invariante gleich

$$c_{21}c_{00}c_{00} : c_{01}(3c_{21}c_{10} - c_{30}c_{01})$$

ist.

Die orthische Gerade der Hesseschen Kurve bestimmt auf den früher gefundenen orthogonal kovarianten Geraden eine Reihe von orthogonal kovarianten Punkten, deren Polaren orthogonal kovariante Gebilde sind.

§ 8. Orthogonal kovariante Kegelschnitte und damit verbundene gerade Linien.

Der Polarkegelschnitt eines Punktes $\xi\eta$ hat die Gleichung

$$\xi(c_{30}x^2 + 2c_{21}xy + c_{10}) + \eta(c_{21}x^2 + c_{01}) + 2c_{10}x + 2c_{01}y + c_{00} = 0.$$

Lassen wir $\xi\eta$ auf den Kreispol der Hesseschen Kurve, oder auf den panorthischen oder irgend einen orthogonal kovarianten Punkt fallen, so erhalten wir orthogonal kovariante Kegelschnitte, und ihre Achsen und Asymptoten geben Veranlassung zu orthogonalen Invarianten. Der Polarkegelschnitt des dritten unendlich fernen Punktes der Kurve hat die Gleichung

$$3c_{21}(c_{30}x^2 + 2c_{21}xy + c_{10}) - c_{30}(c_{21}x^2 + c_{01})$$
$$= 2c_{21}c_{30}x^2 + 6c_{21}c_{21}xy + 3c_{21}c_{10} - c_{30}c_{01} = 0.$$

Er ist eine Hyperbel, deren Mittelpunkt im Kreispol liegt. Eine Asymptote geht durch den Doppelpunkt, die andere $c_{30}x + 3c_{21}y$ fällt mit der dritten Asymptote der Mutterkurve zusammen. Der Polarkegelschnitt des uneigentlichen Punktes der orthischen Geraden ist eine gleichseitige Hyperbel und hat die Gleichung

$$2c_{21}c_{21}xy = c_{30}c_{01} - c_{21}c_{10}.$$

Die orthogonale Invariante $(c_{00}c_{01} - c_{21}c_{10}) : c_{21}c_{21}$ bedeutet das Quadrat ihrer Halbachse. Der Polarkegelschnitt des unendlich

fernen Punktes der orthischen Geraden der Hesseschen Kurve ist ebenfalls eine orthogonale Kovariante

$$c_{01}(c_{30}x^2 + 2c_{21}xy + c_{10}) - 3c_{10}(c_{21}x^2 + c_{01})$$
$$= (c_{01}c_{30} - 3c_{21}c_{10})x^2 + 2c_{21}c_{01}xy - 2c_{10}c_{01},$$

und der Kegelschnitt

$$c_{30}x^2 + 2c_{21}xy + c_{10} = 0$$

ist die erste Polare des unendlich fernen Punktes der x-Achse.

Der Büschel von Kegelschnitten, die die Polaren aller uneigentlichen Punkte sind,

$$c_{30}x^2 + 2c_{21}xy + c_{10} + \lambda(c_{21}x^2 + c_{01}) = 0,$$

hat den Kreispol zum Mittelpunkt und die parabelhaltende Gerade als eine Asymptote aller seiner Individuen. Die zweiten Asymptoten aber bilden den Geraden-Büschel

$$(c_{30} + \lambda c_{21})x + 2c_{21}y = 0,$$

dessen Träger der Kreispol ist. Da die Kegelschnitte des Büschels eine gemeinsame Asymptote haben, so liegen nur zwei seiner Grundpunkte im Endlichen. Sie bilden ein orthogonal kovariantes Punktpaar, die Schnittpunkte des Kegelschnittes $2c_{21}c_{21}xy + c_{10}c_{21} - c_{30}c_{01} = 0$ und des Geradenpaares $c_{21}x^2 + c_{21} = 0$. Ihre Verbindungslinie, die wir sogleich finden werden, ist eine orthogonal kovariante Gerade. Die Determinante des Kegelschnittbüschels hat den Wert

$$c_{21}(c_{10} + \lambda c_{01}),$$

sie verschwindet für $\lambda = -c_{10} : c_{01}$, d. h. wenn der unendlich ferne Punkt der Polare des Kreispoles auf der Hesseschen Kurve liegt. Für diesen Punkt zerfällt der entsprechende Kegelschnitt des Büschels in die Gerade $x = 0$ und die Gerade

$$(c_{30}c_{01} - c_{21}c_{10})x + 2c_{21}c_{01}y = 0,$$

die durch den Kreispol geht und die Verbindungslinie der Grundpunkte des Kegelschnittbüschels ist.

Die Polarkegelschnitte der Geraden $\xi = 0$ haben die Gleichung

$$\eta(c_{21}x^2 + c_{01}) + 2c_{10}x + 2c_{01}y + c_{00} = 0,$$

die Parabeln bedeutet. Deshalb wurde diese Gerade (Gr. pag. 17) parabelhaltende Gerade genannt. Die Parabeln berühren sich im Unendlichen und haben noch zwei Punkte auf der ersten Polare

des Kreispoles gemein, die ein orthogonal kovariantes Punktpaar bilden. Liegt der Punkt $\xi\eta$ auf der orthischen Geraden, ist also $\xi c_{30} + \eta c_{21} = 0$, so bilden die Polarkegelschnitte (Abh. pag. 338) den linearen Büschel gleichseitiger Hyperbeln

$$2c_{21}c_{30}xy + c_{30}c_{10} - c_{21}c_{01} + \lambda(2c_{10}x + 2c_{01}y + c_{00}) = 0,$$

so daß also die orthische Gerade auch als eine gleichseitige Hyperbeln haltende Gerade bezeichnet werden könnte. Die Mittelpunkte dieses Büschels liegen auf einer orthogonal kovarianten Geraden, nämlich auf der Geraden

$$xc_{10} - yc_{01} = 0,$$

die durch den Kreispol geht. Die vierte harmonische dieser Geraden, die von ihr durch die x- und y-Achse harmonisch getrennt ist, $xc_{10} + yc_{01} = 0$, ist natürlich auch eine orthogonal kovariante Gerade, aber auch schon aus dem Grunde, weil sie den Polaren des Kreispoles parallel ist, und durch den Kreispol geht.

Die Gerade $xc_{01} - yc_{10} = 0$ ist kovariant, weil sie auf den Polaren des Kreispoles senkrecht steht und durch den Kreispol geht. Auch $xc_{01} + yc_{10} = 0$ ist orthogonal kovariant Die Polarkegelschnitte der Geraden $\eta = 0$ gehen alle durch den Doppelpunkt und einen festen unendlich fernen Punkt, dessen Richtung orthogonal kovariant ist, und bilden den Büschel

$$c_{30}x^2 + 2c_{21}xy + c_{10} + \lambda(2c_{10}x + 2c_{01}y + c_{00}) = 0,$$

dessen übrige Grundpunkte auf der Geraden $2c_{10}x + 2c_{01}y + c_{00} = 0$ ein orthogonales kovariantes Punktpaar bilden.

Die Mittelpunkte liegen auf der orthogonal kovarianten Geraden

$$(c_{21}c_{10} - c_{30}c_{01})x - c_{21}c_{01}y = 0.$$

Man kann ebenso noch die linearen Kegelschnittbüschel behandeln, die der dritten Asymptote von f_c oder von H angehören. Sie liefern wieder orthogonal kovariante Gebilde.

§ 9. Zweite Polare. Poloconik.

Die zweite Polare des Punktes $\xi\eta$ hat die Gleichung

$$x(c_{30}\xi^2 + 2c_{21}\xi\eta + c_{10}) + y(c_{21}\xi^2 + c_{10}) + 2c_{10}\xi + 2c_{01}\eta + c_{00} = 0.$$

Ist $\xi = s\cos\varphi$, $\eta = s\sin\varphi$, und läßt man s über alle Grenzen

wachsen, so erhält man als zweite Polare des unendlich fernen Punktes der Richtung φ die Gerade

$$x(c_{30} + 2\operatorname{tg}\varphi c_{21}) + y c_{21} = 0.$$

Variiert man φ, so erhält man einen Büschel, der uns schon im vorigen Paragraphen begegnet ist, und somit eine neue Bedeutung gewinnt.

Nimmt man für $\xi\eta$ die Punkte der orthischen Geraden, so stützen sich die zweiten Polaren nach Herrn Greiner (Gr. pag. 34) auf den Kegelschnitt

$$c_{21}c_{21}(c_{10}x + c_{01}y + c_{00})(-xc_{30} + yc_{21}) - (c_{10}c_{21} - c_{01}c_{30})^2 = 0.$$

Diese Hyperbel ist ein orthogonal kovarianter Kegelschnitt, sein Mittelpunkt ist ein ausgezeichneter Punkt. Seine Asymptoten sind kovariante Gerade, und zwar ist die eine die zweite Polare des Kreispoles, die andre ist von der orthischen Geraden durch die Koordinatenachsen harmonisch getrennt.

Die zweiten Polaren der parabelhaltenden Punkte $\xi = 0$ haben die Gleichung

$$xc_{10} + yc_{01} + c_{00} + 2\eta c_{01} = 0$$

und bilden einen Parallelstrahlenbüschel, dessen Individuen den Polaren des Kreispoles parallel sind.

Die zweiten Polaren der orthogonal kovarianten Geraden $\eta = 0$ haben die Gleichung

$$x(\xi^2 c_{30} + c_{10}) + y(\xi^2 c_{21} + c_{01}) + 2c_{10}\xi + c_{00} = 0,$$

die zugehörige Poloconik hat die Gleichung

$$(c_{10}x + c_{01}y + c_{00})(xc_{30} + yc_{21}) - c_{10}^2 = 0,$$

deren beide Asymptoten schon bekannte orthogonal kovariante Geraden sind. — Jede der gefundenen orthogonal kovarianten Geraden liefert durch ihre Poloconik einen kovarianten Kegelschnitt.

Legt man durch den Punkt $\xi\eta$ eine Gerade $x = \xi + s\cos\varphi$, $y = \eta + s\sin\varphi$ und setzt diese Ausdrücke in f_c ein, so ist das, was mit $3s$ multipliziert ist

$$\cos\varphi(c_{30}\xi^2 + 2c_{21}\xi\eta + c_{10}) + \sin\varphi(c_{21}\xi^2 + c_{01}).$$

Es gibt demnach durch jeden Punkt eine Richtung, in der die Summe der reziproken Abstände von der Kurve Null ist. Die beiden Punkte aber, in denen sich die parallelen Asymptoten mit

dem Kegelschnitte $c_{30}\xi^2 + 2c_{21}\xi\eta + c_{10} = 0$, oder was dasselbe ist, mit der orthogonal kovarianten Geraden

$$(c_{30}c_{01} - c_{21}c_{10})\xi + c_{21}c_{01}\eta = 0$$

schneiden, bilden ein orthogonal kovariantes Punktpaar, das wir schon im vorigen Paragraphen fanden, so daß dieses eine neue Deutung findet. Ihre zweite Polare ist die unendlich ferne Gerade.

Läßt man $\xi\eta$ die orthogonal kovariante Gerade durchlaufen, die durch den Kreispol geht und den Polaren des Kreispoles parallel läuft, so daß

$$\xi = \sqrt{\lambda}\cdot c_{01}, \quad \eta = -\sqrt{\lambda}\cdot c_{10}$$

ist, so bilden die ersten Polaren den linearen Büschel

$$xc_{10} + yc_{01} + c_{00} + \lambda((c_{30}c_{01} - 2c_{21}c_{10})x + c_{21}c_{01}y) = 0,$$

dessen Zentrum ein ausgezeichneter Punkt ist, wie die beiden den Büschel bestimmenden Geraden orthogonal kovariant sind.

§ 10. Der Tangentenbüschel.

Setzt man

$$x = t,\ y = -(c_{30}t^3 + 3c_{10}t + c_{00}) : 3(c_{21}t^2 + c_{01}),$$

so wird dadurch für die Kurve $f_c = 0$ ein Parameterdarstellung erbracht, und zwar ergeben sich die Koordinatenverhältnisse in der Form

$$\varrho x^2 : \varrho y : \varrho = 3(c_{21}t^2 + c_{01})t : -c_{30}t^3 - 3c_{20}t - c_{00} : 3c_{21}t^2 + 3c_{01}.$$

Der Tangentenbüschel hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2c_{01}t, & -2c_{10}t - c_{00}, & c_{21}t^2 + 3c_{01} \\ 3c_{21}t^2 + c_{01}, & -c_{30}t - c_{10}, & 2c_{21}t \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$x(c_{21}c_{30}t^4 + 3t^2(c_{30}c_{01} - c_{21}c_{10}) - 2c_{21}c_{00}t + 3c_{10}c_{01})$$
$$+ 3y(c_{21}t^2 + c_{01})^2 + 2(3c_{21}c_{10} - c_{30}c_{01})t^3 + 3c_{21}c_{00}t^2 + c_{00}c_{01} = 0,$$

oder nach Potenzen von t geordnet

$$\varphi(t) = c_{24}t^4(xc_{30} + 3yc_{21}) + 2(3c_{21}c_{10} - c_{01}c_{03})t^3$$
$$+ 3t^2((c_{30}c_{01} - c_{21}c_{10})x + 2c_{21}c_{01}y + c_{21}c_{00}) - 2c_{21}c_{00}tx$$
$$+ c_{01}(3c_{10}x + 3c_{01}y + c_{00}) = 0.$$

Liegt xy auf der Asymptote $xc_{30} + 3yc_{21} = 0$, so wird die Gleichung vom dritten Grade, es gibt nur noch drei Tangenten, weil schon

die eine die Asymptote $t = \infty$ ist. Liegt xy auf der Tangente des parabelhaltenden Punktes der Kurve, $t = 0$, $3c_{10}x + 3c_{01}y + c_{00} = 0$, so gibt es außer ihr auch nur noch drei Tangenten. Der Schnittpunkt der Tangenten $t = 0$ und $t = \infty$ liegt wie wir wissen auf der Kurve, und es muß deshalb für ihn

$$2(3c_{21}c_{10} - c_{30}c_{01})t^2 + 3t((c_{30}c_{01} - c_{21}c_{10})x + 2c_{21}c_{10}y + c_{21}c_{00}) - 2c_{21}c_{01}x$$

ein vollständiges Quadrat sein. Ersetzt man zunächst y durch $-c_{30}:3c_{21}$, so wird der Ausdruck

$$2(3c_{21}c_{10} - c_{30}c_{01})t^2 + t((c_{30}c_{01} - c_{21}c_{10})x + 3c_{01}c_{00}) - 2c_{21}c_{00}x$$

und, wenn man noch $c_{21}c_{10}:(c_{30}c_{01} - 3c_{21}c_{10})$ für x setzt,

$$2((3c_{21}c_{10} - c_{30}c_{01})t + c_{21}c_{00})^2 : (3c_{21}c_{10} - c_{30}c_{01}).$$

Es ist demnach $t = -c_{21}c_{00}:(2c_{21}c_{10} - c_{30}c_{01})$ der Parameter der Tangente jenes Schnittpunktes, und zugleich die Abczisse desselben. Als Gleichung der Tangente in diesem Punkte, die eine orthogonale Kovariante ist, ergibt sich

$$x(c_{30}c_{21}^2c_{10}^2 + 3c_{10}(c_{30}c_{01} - 3c_{21}c_{10})^2) + y(3c_{21}^3c_{10}^2 + 3c_{01}(c_{30}c_{01} - 3c_{21}c_{10})^2) \\ + c_{00}(c_{30}c_{01} - 3c_{21}c_{10})^2 = 0.$$

Die Koeffizienten der Potenzen von t im Büschel $\varphi(t) = 0$ sind orthogonal kovariante Linien oder Invarianten. Der Koeffizient von t^4 ist die dritte Asymptote, der von $3t^2$ ist eine Gerade, die einer im § 8 gefundenen Kovariante parallel ist und durch den orthogonal kovarianten Punkt $x = 0$, $y = -c_{00}:2c_{01}$ geht, der Koeffizient von t ist die parabelhaltende Gerade.

§ 11. Die orthogonal kovariante Gerade der äquianharmonischen Tangentenquadrupel.

Der Ort der Punkte, deren zugehörige Tangentenquadrupel das singuläre Doppelverhältnis $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ besitzen, wird gefunden, wenn man die quadratische Invariante des Tangentenbüschels $\varphi(t)$ gleich Null setzt. Diese Invariante schreibt sich

$$c_{21}c_{01}(c_{30}x + 3c_{21}y)(3c_{10}x + 3c_{01}y + c_{00}) + c_{21}c_{00}(3c_{21}c_{10} - c_{30}c_{01})x \\ + \tfrac{3}{4}((c_{30}c_{01} - c_{21}c_{10})x + 2c_{21}c_{01}y + c_{21}c_{00})^2,$$

und wenn man mit 4 multipliziert und 3 dividiert:

$$(c_{30}c_{01} + c_{21}c_{20})^2x^2 + 8c_{21}c_{01}(c_{30}c_{01} + c_{21}c_{10})xy + 16c_{21}^2c_{01}^2y^2 \\ + 2c_{21}c_{00}(c_{30}c_{01} + c_{21}c_{10})x + 8c_{21}^2c_{01}c_{00}y + c_{21}^2c_{00}^2 \\ = ((c_{30}c_{01} + c_{21}c_{10})x + 4c_{21}c_{01}y + c_{21}c_{00})^2.$$

Die Kovariante ist also ein vollständiges Quadrat, und die gesuchten Punkte liegen auf einer geraden Linie, die eine orthogonale Kovariante ist. Sie fällt mit der Dreiwendepunktslinie zusammen. Setzen wir ihre Gleichung in die Form

$$c_{01}(c_{30}x + 3c_{31}y) + c_{21}(c_{10}x + c_{01}y + c_{00}) = 0,$$

so erkennt man, daß die Gerade

$$c_{01}(c_{30}x + 3c_{21}y) - c_{21}(c_{10}x + c_{01}y + c_{00})$$
$$= (c_{30}c_{01} - c_{21}c_{10})x + 2c_{21}c_{01}y - c_{21}c_{00} = 0$$

als vierte harmonische zur Dreiwendepunktslinie und zwei orthogonal kovarianten Geraden ebenfalls eine orthogonal kovariante Gerade ist.

§ 12. Die kubische Kovariante des Ortes harmonischer Tangentenquadrupel.

Der Ort der Punkte, für die das Tangentenquadrupel an die Kurve harmonisch ist, wird gefunden, wenn man die kubische Invariante des Büschels $\varphi(t) = 0$, also den Ausdruck

$$ad^2 + b^2e - ace - 2bcd + c^3 = 0$$

macht, wenn man $\varphi(t)$ abkürzend in die Form $at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e$ bringt. Die Rechnung wird etwas umfangreich. Es ist aber dieser Ort schlechthin, nicht bloß orthogonal kovariant. Wir wollen ihn deshalb einfacher zunächst für eine andere Doppelpunktskurve suchen, nämlich für die Kurve

$$x = m + nt^2, \quad y = nt + nt^3, \quad x^3 = mx^2 + ny^2.$$

Sie hat ihren Doppelpunkt im Koordinatenanfang, und die uneigentliche Gerade ist Wendetangente. Auf diese Form kann jede Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt durch Kollineation gebracht werden. Der Tangentenbüschel dieser Kurve hat die Gleichung

$$\omega(t) = \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ m + nt^2, & mt + nt^3 & 1 \\ 2nt & m + 2nt^2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -x(m + 3nt^2) + 2nty + m^2 + 2mnt^2 + n^2t^4$$
$$= n^2t^4 + n(2m - 3x)t^2 + 2nty + m(m - x) = 0.$$

Für die quadratische Invariante des Büschels $\omega(t)$ erhält man den Ausdruck

$$12g_2 = n^2(3x - 4m)^2.$$

Sie gibt durch ihr Verschwinden die Dreiwendepunktslinie an. Die Wendepunkte haben die Koordinaten

$$x = \tfrac{4}{3}m, \quad y = \pm\frac{4m}{3}\sqrt{\frac{m}{3n}}.$$

Die Wendetangenten dieser Kurve besitzen die Gleichungen

$$xm \mp \sqrt{\tfrac{1}{3}mn}\,y = \tfrac{8}{9}m^2.$$

Für die kubische Invariante des Büschels $\omega(t)$, also, da b gleich Null ist, für den Ausdruck

$$g_3 = ad^2 + c(c^2 - ae)$$

findet man die Form

$$\tfrac{1}{4}n^4y^2 = \frac{n^3}{6^3}(3x - 2m)\left((3x + 2m)^2 - 48m^2\right),$$

und es ergibt sich für die gesuchte Kurve die Gleichung

$$\begin{aligned} 2 \cdot 27 \cdot ny^2 &= (3x - 2m)((3x + 2m)^2 - 48m^2) \\ &= 27x^3 + 2 \cdot 27 \cdot mx^2 - 9 \cdot 16 \cdot m^2x + 64m^3 = 0. \end{aligned}$$

Die Kurve geht durch die Wendepunkte. Es sind aber auch zugleich die Tangenten in den Wendepunkten gemeinsam. Die orthogonal kovariante Kurve geht also durch die Wendepunkte der Mutterkurve und hat mit ihr die Wendetangenten gemein. Hierdurch und einen weiteren Punkt ist sie bestimmt. Zu dieser Bestimmung kann man einen kovarianten Punkt wählen, etwa den Punkt $x = \frac{2}{3}m$, $y = 0$. Er liegt auf der Verbindungslinie des Doppelpunktes und des unendlich fernen Wendepunktes und ist vom Doppelpunkte durch die Dreiwendepunktslinie und die unendlich ferne Wendetangente harmonisch getrennt.

Die kubische orthogonal kovariante Kurve der Zentren harmonischer Tangentenquadrupel an die Kurve $f_c = 0$ ist also diejenige Kurve dritter Ordnung, die mit f_c drei Wendepunkte und die dazu gehörige Wendetangente gemein hat, zu deren vollständiger Bestimmung noch ein Punkt nötig ist. Dazu wählt man einen Punkt auf der Verbindungslinie des Doppelpunktes mit einem Wendepunkte, und zwar den Punkt, der auf ihr vom Doppelpunkte durch die Dreiwendepunktslinie und die Tangente

des gewählten Wendepunktes harmonisch getrennt ist, der aber auf g in der Mitte zwischen den Schnittpunkten dieser beiden Linien liegt.

§ 13. Das Wendetangententripel.

Setzt man für t einen Wert ξ ein, der zu einem Wendepunkt gehört, so gewinnt man die beiden Gleichungen

$$\varphi(\xi) = a\xi^4 + 4b\xi^3 + 6c\xi^2 + 4d\xi + e = 0,$$
$$\psi(\xi) = A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D = 0,$$

worin $abcde$ die Abkürzungen des vorigen Paragraphen sind, $ABCD$ aber die Werte bedeuten (vergl. § 6)

$$A = c_{21}(c_{30}c_{01} - 3c_{22}c_{10}), \qquad B = -3c_{21}c_{10}c_{00},$$
$$C = -3c_{01}(c_{30}c_{01} - 3c_{21}c_{10}), \quad D = c_{21}c_{10}c_{00}.$$

Nun kann man zunächst aus $\varphi(\xi)$ die vierte Potenz mittels der Gleichung $\psi(\xi) = 0$ entfernen und dann auch noch die dritte. Man findet so

$$\big(D(A\varphi(\xi) - a\varphi(\xi)) - Ae\psi(\xi)\big) : \xi = l\xi^2 + m\xi + n,$$
$$l = (4Ab - aB)D - A^2e, \quad m = (6Ac - Ca)D - ABe,$$
$$n = (4ADd - Da)D - ACe,$$

und es ist

$$l\xi^2 + m\xi + n = 0$$

die Gleichung einer Wendetangente. Substituieren wir für ξ die drei Wurzeln $\xi_1\xi_2\xi_3$ der Gleichung $\psi(\xi) = 0$ und bilden das Produkt

$$w(xy) = (l\xi_1^2 + m\xi_1 + n)(l\xi_2^2 + m\xi_2 + n)(l\xi_3^2 + m\xi_3 + n)A^2,$$

so ist $w(xy) = 0$ die Gleichung des Wendetangententripels. Es ergibt sich

$$w(xy) : A^2 = l^3\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 + lm(\xi_1^2\xi_2^2\xi_3 + \xi_1\xi_2^2\xi_3^2 + \xi_1^2\xi_2\xi_3^2)$$
$$+ lm^2\xi_1\xi_2\xi_3(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + lmn(\xi_1^2(\xi_2 + \xi_3) + \xi_2^2(\xi_3 + \xi_1)$$
$$+ \xi_3^2(\xi_1 + \xi_2)) + ln^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + m^3\xi_1\xi_2\xi_3$$
$$+ m^2n(\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1) + mn^2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + n^3,$$

und wenn man die symmetrischen Funktionen durch die Koeffizienten in ξ ausdrückt, so ergibt sich

$$w(xy) = l^3D^2 - l^3mCD - lm^2BD + lmn(3AD - BC)$$
$$+ ln^2(B - 2AC) - m^3AD + m^2nAC - mn^2AB + n^3A^2 = 0$$

als die Gleichung des orthogonal kovarianten Wendetangententripels. Die kubische Kovariante des harmonischen Tangentenquadrupels des vorigen Paragraphen ist in der Form enthalten

$$\lambda f_c(xy) + \mu w(xy) = 0.$$

Setzt man in der kubischen Invariante des Büschels $\varphi(t)$ x gleich Null, so gewinnt man den Faktor c, woraus hervorgeht, daß die kubische Kovariante durch den orthogonal kovarianten Punkt

$$x = 0, \quad y = - c_{00} : 2c_{01}$$

geht. Die Gleichung derselben schreibt sich daher

$$w\left(o, \, -\frac{c_{00}}{2c_{01}}\right) f_c(xy) - f_c\left(o, \, -\frac{c_{00}}{2c_{01}}\right) w(xy) = 0.$$

Inhaltsübersicht.[1])

---

1) Bemerkung zu meinen Aufsätzen über einige elementare Sätze aus der Theorie der Kurven dritter Ordnung in den Berichten von 1902. Der Nachweis, daß eine Kurve dritter Ordnung durch ein Kegelschnittbüschel durch vier beliebige Kurvenpunkte und einen ihm projektiven Strahlenbüschel erzeugt werder kann, ist synthetisch bereits von Herrn Schur in Schlömilchs Zeitschrift im Jahrgange XXIV geführt. Daß das Doppelverhältnis der vier Tangenten konstant sei, ist ohne infinitesimale Betrachtungen von Herrn Sturm im 90. Band des Crelleschen Journals erwiesen, und auch in Schröters Buch über Kurven dritter Ordnung ist ein solcher Beweis enthalten. Da die von mir gegegebenen Methoden neu sind, so können meine Beweise doch wohl ein gewisses Interesse beanspruchen.

Druckfertig erklärt 15. VI. 1908.]

Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.

Von

A. Mayer.

In seinen hochinteressanten „*Mathematischen Problemen*" hat Hilbert u. a. auch eine vielversprechende neue Methode zur Ableitung der Kriterien des Maximums und Minimums der ein- und mehrfachen Integrale angedeutet.[1]) Grundlegend für diese neue Methode ist ein Satz, der im einfachsten Problem der Variationsrechnung, wo es sich um den größten oder kleinsten Wert eines gegebenen Integrales:

$$J \equiv \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx, \qquad \left(y' \equiv \frac{dy}{dx}\right),$$

bei festen Grenzwerten von x und y handelt, also lautet:

Hat man von der Differentialgleichung zweiter Ordnung des Problems diejenige einfach unendliche Schar von Lösungen:

$$y = Y(x, a)$$

gefunden, welche für $x = x_0$ den vorgeschriebenen festen Wert y_0 annimmt, so braucht man nur noch die Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = p(x, y)$$

zu bilden, deren vollständige Lösung durch jene Schar dargestellt wird, um in der Funktion $p = p(x, y)$ zugleich eine solche Funktion gewonnen zu haben, die den Ausdruck:

$$f(x, y, p) + (y' - p)\frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p}$$

1) Göttinger Nachrichten 1900, p. 291—296.

zu einem vollständigen Differentialquotienten, und damit, infolge der vorgeschriebenen Grenzwerte, das Integral:

$$J^* \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left\{ f(x, y, p) + (y' - p) \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} \right\} dx$$

(solange die Funktion unter dem Integralzeichen stetig bleibt) unabhängig macht von der Wahl der Funktion y von x.

Im folgenden handelt es sich darum, diesen Hilbertschen Unabhängigkeitssatz auszudehnen auf das allgemeinere Problem:

Unter allen Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von x, die $r < n$ gegebenen, in Bezug auf die Differentialquotienten $y_1', \ldots, y_n'$ voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen

$$f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0 \qquad \varrho = 1, 2, \ldots, r$$

genügen, in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und $x_1 > x_0$ feste Werte besitzen, und zwischen diesen Grenzen mit ihren ersten Differentialquotienten stetig bleiben, diejenigen zu finden, welche dem gegebenen Integrale:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

einen größten oder kleinsten Wert verschaffen.

Und zwar soll gezeigt werden, daß der betreffende Satz sich ganz von selbst darbietet, wenn man nach der Methode von Clebsch[1]) die Differentialgleichungen des Problems mittelst ihrer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung integriert hat, mit der überhaupt der Satz in allerengstem Zusammenhange steht. Ich hatte ursprünglich die Absicht, diese Integrationsart als bekannt vorauszusetzen, wodurch dann der Beweis des Satzes in ein paar Zeilen erledigt werden kann. In den mir bekannten Begründungen der Clebschschen Integrationsmethode tritt aber gerade ein Punkt, auf den es hier wesentlich ankommt, nicht deutlich genug zu Tage. Der Klarheit wegen habe ich es daher schließlich doch vorgezogen, dem Beweise des verallgemeinerten Unabhängigkeitssatzes die Ableitung der kanonischen Integrationsmethode der Differentialgleichungen der Variationsrechnung selbst vorauszuschicken.[2])

1) Crelle J. 55, p. 337—340.

2) Für den Fall $n = 2$ ist allerdings der Satz bereits richtig angegeben, aber nur ein gänzlich verfehlter Beweis dafür geliefert worden,

§ 1. Integration der Differentialgleichungen des Problems durch vollständige Lösung ihrer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung.

Setzt man:

$$(1)\quad \Omega \equiv f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') + \sum_1^r \varrho\, \lambda_\varrho f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'),$$

so führt das vorgelegte Problem auf die n Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen $y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ und x:

$$(2)\qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}.$$

Soll dasselbe daher bei festen Grenzwerten von $x, y_1, \ldots, y_n$ überhaupt möglich und bestimmt sein, so müssen zu allernächst die $n + r$ Gleichungen (2) und:

$$(3)\qquad f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0$$

ein System Differentialgleichungen von der Ordnung $2n$ bilden, d. h. ihre vollständige Integration muß $2n$ willkürliche Konstanten mit sich bringen, und das wieder ist identisch damit, daß die $n + r$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0$$

auflösbar sein müssen nach den $n + r$ Unbekannten

$$y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_r.$$[1]

Die Substitution ihrer Auflösungen:

$$y_i' = \Psi_i\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right),$$

$$\lambda_\varrho = \Pi_\varrho\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right)$$

führt dann die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \Omega - \sum_1^n {}^h\, y_h' \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'} = f - \sum_1^n {}^h \frac{\partial V}{\partial y_h} y_h'$$

---

obgleich man in diesem speziellen Falle die partielle Differentialgleichung des Problems gar nicht heranzuziehen braucht und auch ohne dieselbe unschwer zeigen kann, daß die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

1) Vgl. diese Berichte 1895, p. 138.

über in eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(4)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = H\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right)$$

zwischen der unbekannten Funktion V und den $n+1$ unabhängigen Variabeln $x, y_1, \ldots, y_n$.

Ist daher $V = W$ irgend eine Lösung dieser Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung des Problems, so genügen die Werte:

$$(5)\qquad \begin{cases} y_i' = \Psi_i\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial y_n}\right), \\ \lambda_\varrho = \Pi_\varrho\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial y_n}\right) \end{cases}$$

mit den $n + r$ Gleichungen:

$$(6)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial W}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0,$$

von denen sie die Auflösungen sind, zugleich auch der Gleichung:

$$(7)\qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \Omega - \sum_1^n {}_h\, y_h' \frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}$$

identisch für alle Werte sowohl der Variabeln $x, y_1, \ldots, y_n$ als auch der etwaigen willkürlichen Konstanten der Lösung W.

Es sei a irgend eine solche, in W nicht bloß additiv vorkommende Konstante.

Denkt man sich dann für die y_i' und λ_ϱ die Werte (5) gesetzt und differenziiert hierauf die Relation (7) partiell nach y_i und nach a, so erhält man, indem sich die partiellen Differentialquotienten der y_h' von selbst wegheben, die Formeln:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} + \sum_1^r {}_\varrho\, f_\varrho \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial y_i} - \sum_1^n {}_h\, y_h' \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial a} = \sum_1^r {}_\varrho\, f_\varrho \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial a} - \sum_1^n {}_h\, y_h' \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}.$$

Mit den Gleichungen (6) genügen daher ihre Auflösungen (5) zugleich auch für alle Werte von $x, y_1, \ldots, y_n, a$ identisch den Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial x} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \sum_1^n {}^h \dfrac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial y_i} y_h', \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial a \partial x} = \qquad - \sum_1^n {}^h \dfrac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial a} y_h'. \end{cases}$$

Sei nun im besonderen:

$$(9)\qquad V = W(x, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_n) + \text{const.}$$

irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (4). Dann ist die Determinante:

$$(10)\qquad \sum \pm \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial a_1} \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial a_2} \cdots \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial a_n}$$

nicht identisch Null. Daher bestimmen die n Gleichungen:

$$(11)\qquad \frac{\partial W}{\partial a_i} = \alpha_i,$$

in denen auch $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ willkürliche Konstanten bedeuten sollen, stets die n Unbekannten $y_1, \ldots, y_n$, und wenn die Substitution ihrer Auflösungen:

$$(12)\qquad y_i = \varphi_i(x, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv [y_i]$$

die Gleichungen (5) überführt in:

$$(13)\qquad \begin{cases} y_i' = \psi_i(x, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv [y_i'], \\ \lambda_\varrho = \pi_\varrho(x, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv [\lambda_\varrho], \end{cases}$$

so genügen diese Werte (12) und (13) den Gleichungen (11), (6), (7) und (8) identisch für jedes $x, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots \alpha_n$. Deutet man die Substitution der Werte (12) und (13) durch [ ] an, so hat man also einerseits:

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right] \equiv \left[\frac{\partial W}{\partial y_i}\right], \quad \alpha_i \equiv \left[\frac{\partial W}{\partial a_i}\right],$$

und daraus durch partielle Differentiation nach x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right] \equiv \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial x}\right] + \sum_1^n {}^h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_h}\right] \frac{\partial [y_h]}{\partial x},$$

$$0 \equiv \left[\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x}\right] + \sum_1^n {}^h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial y_h}\right] \frac{\partial [y_h]}{\partial x}.$$

Andrerseits ist aber nach (8):

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial x}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right] - \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial y_i}\right][y'_h],$$

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial x}\right] \equiv \qquad - \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial a_i}\right][y'_h],$$

und wenn man diese Identitäten zu den vorhergehenden addiert, ergibt sich:

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y'_i}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right] + \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_h}\right]\left(\frac{\partial [y_h]}{\partial x} - [y'_h]\right),$$

$$(15) \qquad 0 \equiv \qquad \sum_1^n{}_h \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y_h \partial a_i}\right]\left(\frac{\partial [y_h]}{\partial x} - [y'_h]\right).$$

Nun kann die Determinante (10), da sie an sich nicht Null und ganz frei von den unbestimmten Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ist, auch nicht in Folge der Gleichungen (11) identisch verschwinden. Es ist daher auch die Determinante der n linearen homogenen Relationen (15) nicht identisch Null und diese Relationen verlangen folglich, daß einzeln jedes:

$$\frac{\partial [y_h]}{\partial x} - [y'_h] \equiv 0$$

sei, wodurch sich die Relationen (14) auf:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y'_i}\right] \equiv \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right]$$

reduzieren, d. h. aber, da auch jedes $[f_\varrho] \equiv 0$ ist:

Die Differentialgleichungen (2) und (3) werden vollständig integriert durch die Auflösungen (12) und (13) der Gleichungen (11) und (6), Auflösungen, welche zugleich für alle beliebigen Werte von $a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Gleichung (7) identisch erfüllen, und in denen endlich allgemein ist:

$$(16) \qquad [y'_h] \equiv \frac{\partial [y_h]}{\partial x}.$$

Damit haben wir die kanonische Integrationsmethode der Differentialgleichungen unsres Problems gewonnen und können nunmehr zur Ableitung des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes übergehen.

§ 2. Zusammenhang zwischen der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung und dem Hilbertschen Unabhängigkeitssatze.

Das vorgelegte Problem schreibt den Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ an den beiden festen Grenzen x_0 und x_1 fest gegebene Werte vor. Nennt man also $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ die gegebenen Anfangswerte der y, so müssen, damit die Aufgabe lösbar sei, weiter nun noch die n Gleichungen (12) zusammen mit den n Gleichungen:

$$(17)\qquad y_{i0} = \varphi_i(x_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

auflösbar sein nach ihren $2n$ willkürlichen Konstanten a und α, oder nur anders ausgedrückt, es müssen die n letzten Gleichungen auflösbar sein nach n von diesen Konstanten, und nach Substitution der Auflösungen müssen die n Gleichungen (12) die übrigen n Konstanten bestimmen.

Bei der Festsetzung:

$$(18)\qquad W_0 \equiv W(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, a_1, \ldots, a_n)$$

ergeben sich aber aus den Gleichungen (11) sofort die n Gleichungen:

$$(19)\qquad \frac{\partial(W - W_0)}{\partial a_k} = 0,$$

welche, die Anfangswerte $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ als fest gegeben betrachtet, die Unbekannten $y_1, \ldots, y_n$ als bloße Funktionen von x und von den n willkürlichen Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ bestimmen.

Ist also, was natürlich hier immer vorausgesetzt wird, die Aufgabe überhaupt möglich und bestimmt, so müssen die n Gleichungen (19) auflösbar sein auch nach den n Unbekannten $a_1, \ldots, a_n$.

Es seien:

$$(20)\qquad y_i = Y_i(x, a_1, \ldots, a_n)$$

diejenigen Auflösungen der Gleichungen (19) nach den n Unbekannten y_i, die für $x = x_0$ die Werte $y_i = y_{i0}$ annehmen.

Die Gleichungen (19) besitzen dann gleichzeitig immer auch solche Auflösungen:

$$(21)\qquad a_k = A_k(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv \{a_k\}$$

nach den n Unbekannten a_k, welche die Gleichungen (20) identisch erfüllen, also auch von diesen Gleichungen wieder Auflösungen sind, und indem man die Werte (20) in die Gleichungen (5) einsetzt, erhält man nach (16) ein Wertsystem der y_i' und λ_ϱ:

$$(22) \qquad \begin{cases} y_i' = Y_i'(x, a_1, \ldots, a_n) \equiv \dfrac{\partial Y_i}{\partial x}, \\ \lambda_\varrho = L_\varrho(x, a_1, \ldots, a_n), \end{cases}$$

welches zusammen mit den Werten (20) der y_i den Gleichungen (6) und (7) identisch genügt für jedes $a_1, \ldots, a_n$, wobei zugleich die Werthe der y_i und λ_ϱ ein System partikulärer Lösungen der Differentialgleichungen (2) und (3) mit nur noch n willkürlichen Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ bilden.

Die Einsetzung der Werte (21) der a_k, die durch $\{\ \}$ hervorgehoben werden möge, erfüllt nun die Gleichungen (20) identisch und verwandelt die Werte (22) der y_i' und λ_ϱ in bloße Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$. Bezeichnen wir diese Funktionen durch p_i und μ_ϱ, definieren wir also:

$$(23) \qquad p_i \equiv \left\{\frac{\partial Y_i}{\partial x}\right\}, \quad \mu_\varrho \equiv \{L_\varrho\},$$

so führt die Substitution $\{\ \}$ die Gleichungen (20) und (22) über in die Identitäten und Gleichungen:

$$(24) \qquad y_i \equiv y_i \text{ und } y_i' = p_i, \ \lambda_\varrho = \mu_\varrho,$$

von denen die n Gleichungen:

$$y_i' = p_i$$

ein System Differentialgleichungen erster Ordnung bilden, das durch die Gleichungen (20) vollständig integriert wird.

[Für $x = x_0$ reduzieren sich die Gleichungen (20) auf $y_i = y_{i0}$ und bestimmen also gar nicht mehr die Unbekannten a_k. Daher nehmen notwendig ihre Auflösungen (21), und mit diesen auch die Funktionen p_i und μ_ϱ an der Stelle $x = x_0$, wo den y_i die gegebenen Anfangswerthe y_{i0} vorgeschrieben sind, die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, d. h. die Anfangswerte der Funktionen $\{a_k\}$, p_i und μ_ϱ sind durch die Anfangswerte der Funktionen y allein noch nicht bestimmt, sondern hängen auch noch ab von den Anfangswerten der Differentialquotienten dieser Funktionen. Im besondern lehrt die Definition der p_i und die Entstehung der Gleichungen (21) aus den Gleichungen (20), daß für jedes Funktionensystem $y_1, \ldots, y_n$, welches die gegebenen Anfangswerte besitzt, der Anfangswert von p_i nichts anderes ist als der Anfangswert des Differentialquotienten y_i'.]

Es mögen endlich $\bar{f}$, $\bar{f}_\varrho$ und $\bar{\Omega}$ diejenigen Funktionen bezeichnen, die aus f, f_ϱ und Ω durch die Substitutionen (24) entstehen, wenn man die p_i und μ_ϱ zunächst als beliebige Variable auffaßt.

Die Werte (20) und (22) genügen den Gleichungen (6) und (7) identisch für alle Werte von $a_1 \ldots, a_n$. Diese Identitäten können daher nicht aufgehoben werden durch Substitution der Werte (21) der a_k. Nach (24) und nach den eben gegebenen Definitionen gehen sie aber hierdurch über in:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial y_i}\right\}, \quad \bar{f}_\varrho \equiv 0, \quad \bar{\Omega} - \sum_1^n {}^i p_i \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\},$$

wo nun natürlich unter den p_i und μ_ϱ die bestimmten, durch (23) definierten Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ zu verstehen sind. Diese Identitäten lehren, daß für alle beliebigen Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ von x die Relation besteht:

$$\bar{f} + \sum_1^n {}^i (y_i' - p_i)\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\} + \sum_1^n {}^i \left\{\frac{\partial W}{\partial y_i}\right\} y_i'.$$

Andrerseits hat man, wenn man durch die Substitution { } auch die Funktion $W - W_0$ überführt in eine Funktion von $x, y_1, \ldots, y_n$ allein:

$$\frac{d\{W - W_0\}}{dx} \equiv \left\{\frac{\partial W}{\partial x}\right\} + \sum_1^n {}^i \left\{\frac{\partial W}{\partial y_i}\right\} y_i' + \sum_1^n {}^k \left\{\frac{\partial (W - W_0)}{\partial a_k}\right\} \frac{d\{a_k\}}{dx},$$

und die Werte (21) der a_k sind Auflösungen auch der Gleichungen (19), also ist jedes:

$$\left\{\frac{\partial (W - W_0)}{\partial a_k}\right\} \equiv 0.$$

Aus den beiden vorhergehenden Identitäten fließt daher sofort die Formel:

$$(26) \qquad \bar{f} + \sum_1^n {}^i (y_i' - p_i)\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} \equiv \frac{d\{W - W_0\}}{dx},$$

welche nichts anderes ist als die kanonische Form des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes, und aus der, für alle Funktionen $y_1, \ldots, y_n$, welche an der Stelle $x = x_0$ die festen Anfangswerte

$y_{10}, \ldots, y_{n0}$ besitzen, und zwischen den Grenzen x_0 und x die Funktion $\{W - W_0\}$ stetig erhalten, folgt:

$$(27)\qquad \int_{x_0}^{x}\left(\bar{f} + \sum_1^n (y_i' - p_i)\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i}\right)dx \equiv \{W - W_0\}. -$$

Obgleich diese Resultate bereits vollständig ausreichen, um die gewünschte Ausdehnung des Unabhängigkeitssatzes in voller Allgemeinheit darstellen zu können, schalte ich hier doch noch die folgenden, für diese Ausdehnung selbst überflüssigen Bemerkungen ein, weil dieselben die allgemeinen Beziehungen zwischen der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (4) und der Aufgabe, den Ausdruck

$$(28)\qquad \bar{\Omega} + \sum_1^n (y_i' - p_i)\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i}$$

zu einem vollständigen Differentialquotienten zu machen, und daneben auch noch den r endlichen Gleichungen:

$$(29)\qquad \bar{f}_\varrho = 0$$

zu genügen, einerseits, und andrerseits zwischen dieser letzten Aufgabe und der Integration der Differentialgleichungen (2) und (3) in ein helleres Licht setzen.

Zunächst sieht man sofort, daß die mittlere Aufgabe und die Aufgabe, von der Gleichung (4) eine Lösung zu finden, nur verschiedene Formen einer und derselben Aufgabe sind.

Jedem System Funktionen $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$ von $x, y_1, \ldots, y_n$, für die der Ausdruck (28) ein vollständiger Differentialquotient wird, und die zugleich den Gleichungen (29) identisch genügen, kann man nämlich vermöge einer bloßen Quadratur eine solche Funktion V derselben Variabeln hinzufügen, daß die betrachteten Funktionen identisch auch der Gleichung genügen:

$$(30)\qquad \bar{\Omega} + \sum_1^n (y_i' - p_i)\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} = \frac{dV}{dx}.$$

Dann aber erfüllen diese Funktionen identisch die Gleichungen:

$$\bar{\Omega} - \sum_1^n p_i \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y_i} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

und:

$$(31)\qquad \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial y_i},\quad \bar{f}_\varrho = 0,$$

und daher ist die Funktion V eine Lösung derjenigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welche entsteht, wenn man mittelst der $n+r$ letzten Gleichungen die $n+r$ Größen p_i und μ_ϱ aus der vorhergehenden Gleichung eliminiert, d. h. sie ist eben eine Lösung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (4) (daher denn, was übrigens auch unmittelbar einleuchtet, auch unsere Funktion $\{W - W_0\}$ eine solche ist). Und umgekehrt erhält man aus jeder Lösung V dieser Gleichung ein Funktionensystem $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$, das die Gleichungen (29) und (30) identisch erfüllt, indem man die $n+r$ Gleichungen (31) nach diesen $n+r$ Unbekannten auflöst.

Damit aber die p und μ solche Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ seien, welche den Ausdruck:

$$\bar{\Omega} + \sum_1^n{}^h (y'_h - p_h)\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_h} \equiv B + \sum_1^n{}^h B_h y'_h$$

zu einem vollständigen Differentialquotienten machen, müssen dieselben den $n + \frac{n(n-1)}{2}$ Integrabilitätsbedingungen identisch genügen:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial y_h} - \frac{\partial B_h}{\partial y_i} = 0.$$

Von diesen kann man in Folge der letzten die n ersten ersetzen durch die:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} + \sum_1^n{}^h p_h \left(\frac{\partial B_i}{\partial y_h} - \frac{\partial B_h}{\partial y_i}\right) = 0.$$

Überdies ist, weil die partiellen Differentialquotienten p_h sich von selbst wegheben:

$$\frac{\partial B}{\partial y_i} \equiv \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\bar{\Omega} - \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_h}\right) \equiv \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y_i} + \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_i}\bar{f}_\varrho - \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_h};$$

wegen:

$$B_h \equiv \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_h}$$

lassen sich daher die Integrabilitätsbedingungen so schreiben:

$$(32) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} + \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i} - \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y_i} = \sum_1^r{}^\varrho \bar{f}_\varrho \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_i},$$

$$(33) \qquad \frac{\partial}{\partial y_h}\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_h} = 0,$$

wo erst bei den zweiten partiellen Differentiationen die Abhängigkeit der p und μ von $x, y_1, \ldots, y_n$ zu berücksichtigen ist.

Nach dem eben Bemerkten liefert also jede Lösung V der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (4) ein solches System von Lösungen $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$ dieser $n + \frac{n(n-1)}{2}$ partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welches gleichzeitig den r endlichen Gleichungen (29) genügt, und das allgemeinste System Lösungen dieser Art wird durch die Gleichungen (31) definiert, wenn man in diesen unter V die allgemeine Lösung der Gleichung (4) versteht.

Sind endlich die p_i und μ_ϱ solche Funktionen von $x, y_1, \ldots y_n$, welche die Gleichungen (29) und (32) identisch erfüllen, und bildet man mit diesen Funktionen die n Differentialgleichungen erster Ordnung und die r endlichen Gleichungen:

$$(34) \qquad y_i' = p_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad \lambda_\varrho = \mu_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n),$$

so erkennt man aus der Form der Gleichungen (32) sofort, daß die vollständigen Lösungen der Gleichungen (34) gleichzeitig auch Lösungen der Differentialgleichungen (2) und (3) sind. Nach dem Vorhergehenden gibt es daher neben unseren früheren Gleichungen (24) noch unendlich viele andere Systeme von Gleichungen (34), welche die doppelte Eigenschaft besitzen, daß ihre vollständige Integration Lösungen auch der Differentialgleichungen (2) und (3) liefert, und daß für ihre rechten Seiten zugleich der Ausdruck (28) ein vollständiger Differentialquotient wird, was unmittelbar den bekannten Satz enthält, daß jeder Lösung ihrer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung Lösungen der Differentialgleichungen (2) und (3) mit n neuen willkürlichen Konstanten zugehören.

Dagegen sind die Integrabilitätsbedingungen (33) keine bloßen Folgen der Bedingungen (32) und der Gleichungen (29). Daher gilt nicht mehr, wie im Falle $n = 1$, der Satz, daß bereits in jedem System Gleichungen (34), dessen vollständige Lösungen zugleich den Differentialgleichungen (2) und (3) genügen, die rechten Seiten solche Funktionen wären, welche den Ausdruck (28) zu einem vollständigen Differentialquotienten machen. —

§ 3. Allgemeiner Ausdruck des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes.

Mit dem in (26) enthaltenen Resultate, daß der Ausdruck:

$$\bar{f} + \sum_1^n i\,(y_i' - p_i)\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_i}$$

für die durch (23) definierten Funktionen p_i und μ_ϱ ein vollständiger Differentialquotient wird, ist die Ausdehnung des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes auf das vorgelegte Problem gewonnen und bewiesen, zunächst freilich nur unter der Voraussetzung, daß man in den vollständigen Lösungen:

$$y_i = \varphi_i(\alpha,\ a_1, \ldots, a_n,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$
$$\lambda_i = \pi_\varrho(\alpha,\ a_1, \ldots, a_n,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

der Differentialgleichungen des Problems kanonische Konstanten $a_1, \ldots, a_n,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eingeführt habe. Da aber unsere Funktionen:

$$Y_i,\quad \frac{\partial Y_i}{\partial x}\quad \text{und}\quad L_\varrho$$

respektive aus den Funktionen:

$$\varphi_i,\quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\quad \text{und}\quad \pi_\varrho$$

hervorgehen müssen, wenn man darin die Auflösungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der n Gleichungen (17) einsetzt, so kann man kurz sagen: Man erhält die in (23) definierten Funktionen p_i und λ_ϱ, indem man mit Hilfe der $2n$ Gleichungen:

$$\varphi_i(x_0,\ a_1, \ldots, a_n,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = y_{i0},$$
$$\varphi_i(x,\ a_1, \ldots, a_n,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = y_i$$

die $2n$ kanonischen Konstanten $a_1, \ldots, a_n,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aus den Gleichungen eliminiert:

$$p_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x},\quad \mu_\varrho = \pi_\varrho.$$

Stellen nun die Gleichungen:

$$(35)\qquad y_i = \theta_i(x,\ c_1, \ldots, c_{2n}),\quad \lambda_\varrho = X_\varrho(x,\ c_1, \ldots, c_{2n})$$

irgend ein System vollständiger Lösungen der Differentialgleichungen (2) und (3) dar, so muß es notwendig $2n$, von x freie Substitutionen von der Form:

$$(36)\qquad c_h = C_h(a_1, \ldots, a_n,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

geben, welche

$$\theta_i \equiv \varphi_i, \quad X_\varrho \equiv \pi_\varrho$$

und damit auch

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x} \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$$

machen, und man kann dann also unsere Funktionen p_i und μ_ϱ dadurch erhalten, daß man mittelst der $4n$ Gleichungen (36) und

(37) $\theta_i(x_0, c_1, \ldots, c_{2n}) = y_{i0}, \quad \theta_i(x, c_1, \ldots, c_{2n}) = y_i$

die $4n$ Konstanten

$$c_1, \ldots, c_{2n}, \quad a_1, \ldots, a_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

aus den Formeln:

(38) $$p_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial x}, \quad \mu_\varrho = X_\varrho$$

eliminiert. Die Konstanten a und α eliminieren sich aber dadurch von selber, daß man einfach die Transformationsformeln (36) ganz wegläßt, und man braucht somit nur die $2n$ Integrationskonstanten c vermöge der $2n$ Gleichungen (37) aus (38) zu eliminieren. Führen wir diese Elimination nicht auf einmal, sondern wieder in zwei Absätzen aus, so können wir hiernach unser Resultat allgemein so aussprechen:

Hat man von den, mit der Funktion:

$$\Omega \equiv f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') + \sum_1^r{}_\varrho \lambda_\varrho f_\varrho(x, y_1, \ldots, y_n, y_1' \ldots, y_n')$$

gebildeten $n + r$ Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0$$

irgend ein System vollständiger Lösungen:

$$y_i = \theta_i(x, c_1, \ldots, c_{2n}), \quad \lambda_\varrho = X_\varrho(x, c_1, \ldots, c_{2n})$$

gefunden, so bestimme man aus den n Gleichungen:

$$\theta_i(x_0, c_1, \ldots, c_{2n}) = y_{i0}$$

n von den $2n$ Integrationskonstanten $c_1, \ldots, c_{2n}$ durch die n übrigen. Gehen durch Einsetzung der Auflösungen die vollständigen Lösungen über in die (bei fest gegebenem $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$) partikulären Lösungen mit nur noch n willkürlichen Konstanten $c_1, \ldots, c_n$:

$$y_i = Y_i(x, c_1, \ldots, c_n), \quad \lambda_\varrho = L_\varrho(x, c_1, \ldots, c_n),$$

so braucht man nur mit Hilfe der n ersten dieser letzten Gleichungen diese Konstanten aus den $n + r$ Gleichungen:

$$y_i' = \frac{\partial Y_i}{\partial x}, \quad \lambda_\varrho = L_\varrho$$

zu eliminieren, um in den rechten Seiten der so entstehenden Gleichungen:

$$(\alpha) \qquad y_i' = p_i, \quad \lambda_\varrho = \mu_\varrho$$

solche Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ gewonnen zu haben, welche den Ausdruck:

$$\bar{f} + \sum_1^n {}_h (y_h' - p_h) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial p_h}$$

zu einem vollständigen Differentialquotienten machen und überdies den r Gleichungen:

$$\bar{f}_\varrho = 0$$

identisch genügen.

Dabei bedeuten $\bar{\Omega}, \bar{f}, \bar{f}_\varrho$ diejenigen Funktionen von $x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$, die durch die $n + r$ Substitutionen (α) aus Ω, f, f_ϱ entstehen, und von diesen Substitutionen bilden die n ersten ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung, das durch die n Gleichungen $y_i = Y_i$ vollständig integriert wird. —

Will man diesen Satz unabhängig von der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung beweisen, so muß man zeigen, daß die auf die angegebene Weise erhaltenen Funktionen $p_1, \ldots, p_n, \mu_1, \ldots, \mu_r$ den $n + \frac{n(n-1)}{2}$ partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (32) und (33) genügen. Das leuchtet nun zwar für die Gleichungen (32) sofort ein und läßt sich im Falle $n = 2$ auch noch ohne allzugroße Rechnung für die eine Gleichung nachweisen, auf welche sich dann das System (33) reduziert; im allgemeinen Falle aber einen solchen direkten Beweis für die Gleichungen (33) zu erbringen, scheint erhebliche Schwierigkeiten darzubieten.

Druckfertig erklärt 31. V. 1903.

Über die Zentralbewegung in der nichteuklidischen Geometrie.

Von

H. Liebmann.

1. *Der Bertrandsche Satz.* J. Bertrand[1]) hat im Jahre 1873 den folgenden Satz bewiesen: Es gibt nur *zwei* Anziehungsgesetze, bei denen die Bahn eines beweglichen Punktes P um einen festen Punkt O (unter Voraussetzung gewisser zwischen den Koordinaten der Anfangslage und den Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit bestehender Ungleichheiten) geschlossen ist.

Er verfährt dabei in folgender Weise: Das dynamische Problem wird mit Benutzung des Flächensatzes und des Integrals der lebendigen Kraft in das rein analytische verwandelt:

Es ist die Funktion $\psi(z)$ so zu bestimmen, daß die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \psi(z) = K^2\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z\right)$$

periodische Funktionen von φ mit der Periode 2π werden. Dabei ergibt sich, daß $\psi(z)$ nur die beiden Werte haben darf

$$(2) \qquad \psi(z) = \frac{A}{\frac{1}{z^{m^2}} - 1}, \text{ wo } m = 1 \text{ oder } m = \tfrac{1}{2}.$$

$m = \frac{1}{2}$ führt auf den Fall, wo die anziehende Kraft der Entfernung OP direkt proportional ist (Fall der elastischen Anziehung), und in diesem Falle bewegt sich P bekanntlich in einer Ellipse, deren Mittelpunkt O ist, also *immer in einer geschlossenen Kurve.*

---

1) J. Bertrand, Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe. Comptes rendus de l'A. des S. LXXVII, 1873, p. 849—853.

$m = 1$ führt dagegen auf das Newtonsche Anziehungsgesetz, und bei der Bewegung nach diesem Gesetz sind die Bahnkurven ja (wenn nur die tangentiale Geschwindigkeitskomponente nicht zu groß ist im Verhältnis zur anziehenden Kraft) ebenfalls geschlossen. —

Wir wollen hier dieselbe Fragestellung für die *nichteuklidische* Geometrie behandeln, und zwar sowohl für die *hyperbolische* (Gausssche, Bolyaische, Lobatscheffskijsche) als für die *sphärische* (Riemannsche), und die Bewegung nach den sich ergebenden Anziehungsgesetzen, soweit sie nicht schon bekannt ist, untersuchen. Die Untersuchung wird eine große Übereinstimmung mit der euklidischen Geometrie ergeben.

2. *Bestimmung der Anziehungsgesetze für die hyperbolische Geometrie.* Führt man in der hyperbolischen Ebene Polarkoordinaten ein (r, φ), und nimmt man den Punkt O zum Koordinatenanfang, so lautet das Integral der lebendigen Kraft[1])

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \operatorname{sh}^2 r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2V = h \tag{3}$$

Hierin bedeuten $\operatorname{sh} r$ (entsprechend später $\operatorname{ch} r$, $\operatorname{th} r$ und $\operatorname{cth} r$) die hyperbolischen Funktionen des Radius-vectors $r = OP$.

Wir wollen jetzt zuerst dem Problem eine ähnliche Form geben, wie sie Bertrand im Fall der euklidischen Geometrie hergestellt hat.

Die Lagrangeschen Gleichungen werden

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \operatorname{sh} r \operatorname{ch} r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{dV}{dr} = -f(r), \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{sh}^2 r \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$$

In der ersten Gleichung ist $f(r)$ die Kraft, mit der P von O angezogen wird; aus dem zweiten folgt das dem Flächensatz der gewöhnlichen Mechanik entsprechende erste Integral

$$\operatorname{sh}^2 r \frac{d\varphi}{dt} = K.$$

---

1) Vgl. § 10 meiner Arbeit: Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum. (Diese Berichte 1902, S. 393—423.) — Für die trigonometrischen Relationen in der nichteuklidischen Geometrie, vgl. S. 345—348 von Lobatscheffskij: Zwei geometrische Abhandlungen. Deutsch mit Anmerkungen von F. Engel (Leipzig 1898—1899).

Man kann jetzt mit Hilfe dieses Integrals aus der ersten Gleichung (4) die Zeit t eliminieren.

Es ist nämlich

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{K}{\operatorname{sh}^2 r} = -K\frac{d\operatorname{cth} r}{d\varphi}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{-K^2}{\operatorname{sh}^2 r}\frac{d^2\operatorname{cth} r}{d\varphi^2},$$

und durch diese Substitution geht die erste Gleichung (4) über in

$$(4') \qquad -K^2\left(\frac{d^2\operatorname{cth} r}{d\varphi^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}^2 r} + \frac{\operatorname{sh} r\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh}^4 r}\right) = -f(r)\cdot$$

Setzt man jetzt

$$\operatorname{cth} r = z$$

$$\operatorname{sh}^2 r\, f(r) = \psi(z),$$

so nimmt (4′) die Form an

$$(1) \qquad \psi(z) = K^2\left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z\right)\cdot$$

Nun können wir mit Bertrand weiterschließen: Sollen die Bahnkurven geschlossen sein, so muß r, also auch z eine periodische Funktion von φ mit der Periode 2π werden.

Dies ist aber nur möglich (nach Bertrand), wenn $\psi(z) = A$, oder $\psi(z) = Az^{-3}$ ist.

$\psi(z) = A$ gibt

$$\operatorname{sh}^2 r\, f(r) = A,$$

$$f(r) = \frac{A}{\operatorname{sh}^2 r};\quad V = \int f(r)\,dr = A\left(\frac{-1}{\operatorname{th} r}\right)$$

$\psi(z) = A\cdot z^{-3}$ gibt

$$\operatorname{sh}^2 r\, f(r) = A\,\frac{\operatorname{sh}^3 r}{\operatorname{ch}^3 r},\ \text{also}$$

$$f(r) = \frac{A\operatorname{sh} r}{\operatorname{ch}^3 r};\quad V = \int f(r)\,dr = \frac{A}{2}\operatorname{th}^2 r\cdot$$

In beiden Fällen muß A eine *positive* Konstante sein, weil $f(r)$ eine anziehende Kraft darstellt.

Der erste Fall führt auf die *Planetenbewegung* in der hyperbolischen Geometrie, die in der Tat ganz ähnlich ist, wie in der

euklidischen. Auch hier treten als Bahnkurven nur Kegelschnitte auf, von denen O ein Brennpunkt ist.[1])

Den zweiten Fall wollen wir jetzt genauer behandeln.

3. *Die Bahnkurven bei der elastischen Anziehung im hyperbolischen Raum.* Das Anziehungsgesetz $f(r) = A \operatorname{sh} r : \operatorname{ch}^3 r$, das beim Grenzübergang zur euklidischen Geometrie sich in $f(r) = Ar$ verwandelt, wollen wir ebenfalls als „Gesetz der elastischen Anziehung" bezeichnen, und bei der Bestimmung der Bewegung lediglich die Bahnkurven feststellen. (Der zeitliche Verlauf der Bewegung ergibt sich ja weiterhin aus dem Flächensatz.)

Eliminieren wir wieder t aus dem Integral der lebendigen Kraft (3) so kommt

$$(3') \qquad K^2\left(\left(\frac{d \operatorname{cth} r}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 r}\right) + A \operatorname{th}^2 r = h \cdot$$

Setzt man wieder

$$\operatorname{cth} r = z, \text{ also}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 r} = \operatorname{cth}^2 r - 1 = z^2 - 1,$$

so kommt

$$(3'') \qquad K^2\left(\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2 - 1\right) + \frac{A}{z^2} = h$$

oder

$$\left(z\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^4 - z^2\left(1 + \frac{h}{K^2}\right) + \frac{A}{K^2} = 0 \cdot$$

Um nun zur Integration der Differentialgleichung 3″ überzugehen, bemerken wir, daß

$$z = \frac{e^r + e^{-r}}{e^r - e^{-r}} > 1$$

und daher h (in 3″) positiv ist, weil ja auch A positiv ist.

Schreiben wir (3″) in der Form

$$\left(z\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + \left(z^2 - \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{h}{K^2}\right)\right)^2 + \frac{A}{K^2} - \tfrac{1}{4}\left(1 + \frac{h}{K^2}\right)^2 = 0,$$

---

1) Diese Planetenbewegung ist, worauf ich nachträglich von Herrn Prof. Stäckel aufmerksam gemacht wurde, schon mehrfach untersucht worden, aber wohl nicht mit der Ausführlichkeit und mit Berücksichtigung der in § 9, 3 und 4 meiner oben genannten Arbeit besprochenen Ausartungen. Vgl. die Literaturzusammenstellung von P. Stäckel: „De ea mechanicae analyticae parte, quae ad varietates complurium dimensionum spectat" in der Festschrift der Universität *Clausenburg* zum 100. Geburtstag J. Bolyais (1902).

so erkennen wir: es ist

$$\frac{A}{K^2} - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{h}{K^2}\right)^2 < 0.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung für z^2

$$z^4 - z^2\left(1 + \frac{h}{K^2}\right) + \frac{A}{K^2} = 0,$$

nämlich

$$z^2 = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{h}{K^2}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{h}{K^2}\right)^2 - \frac{4A}{K^2}}\right)$$

sind also *reell* und *positiv*.

Demnach kann man 3′ schließlich schreiben:

$$\left(z\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + (z^2 - a^2)(z^2 - b^2) = 0,$$

wo a^2 und b^2 reelle positive Zahlen sind.

Hieraus folgt durch Integration

(5) $$z^2 = a^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) + b^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0),$$

unter φ_0 eine Integrationskonstante verstanden.

4. *Untersuchung der Formen der Bahnkurven in diesem Fall.* Da nur die Gestalt der Bahnkurven untersucht werden soll, so wollen wir der Einfachheit halber $\varphi_0 = 0$ annehmen. Da ferner z^2 immer größer als 1 ist, so muß mindestens eine der beiden Größen a^2 und b^2, etwa b^2 größer als 1 sein, denn z^2 ist zwischen a^2 und b^2 enthalten.

Wir wollen nun die verschiedenen Kurven untersuchen, die sich aus

$$z^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi$$

ergeben, wenn man bei festgehaltenem b die Größe a variieren läßt.

Führt man nun die Weierstrassschen[1]) Koordinaten ein

$$p = \operatorname{ch} r, \quad x = \operatorname{sh} r \cos\varphi, \quad y = \operatorname{sh} r \sin\varphi,$$

so nimmt unter Berücksichtigung der Bedeutung von z ($= \operatorname{cth} r$) die Gleichung die Form an

$$p^2 = a^2x^2 + b^2y^2,$$

d. h. die Bahnkurve ist ein *Kegelschnitt*.[2])

1) Vgl. Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885. S. 19.

2) Killing a. a. O. S. 37—46.

Im einzelnen sei noch bemerkt, daß sich für $a > 1$ eine *Ellipse*[1]) ergibt, denn wir bekommen dann eine Mittelpunktskurve zweiten Grades, die ganz im Endlichen liegt ($z > 1$).

Für $a < 1$ ergibt sich eine *Hyperbel zweiter Art*[1]), die für $a = 0$ in eine Gerade übergeht. In der Tat wird für $a = 0$ die Gleichung die Form annehmen

$$\operatorname{ch} r = b \operatorname{sh} r \sin \varphi,$$

d. h. sie ist linear und homogen in den Weierstrassschen Koordinaten, stellt also eine Gerade dar.[2])

Dies steht auch damit in Übereinstimmung, daß für $a = 0$ notwendig (vgl. Nr. 3) $A = 0$ sein muß. Die anziehende Kraft ist also gleich Null, d. h. P muß sich in einer Geraden bewegen.

Für $a = 1$ endlich ergibt sich eine *Abstandslinie*, deren Mittellinie die Gerade $\varphi = 0$ ist: Die Gleichung wird dann nämlich

$$\operatorname{ch}^2 r = \operatorname{sh}^2 r \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sh}^2 r \sin^2 \varphi$$

oder

$$\operatorname{sh}^2 r \sin^2 \varphi (b^2 - 1) = 1,$$

d. h.

$$y = \operatorname{sh} r \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}} = \text{constans.} \text{ —}$$

Fassen wir noch einmal das Ergebnis kurz zusammen: *Während in der euklidischen Geometrie die elastische Anziehung $f(r) = Ar (A > 0)$ Bewegung in Ellipsen um O als Mittelpunkt (also immer geschlossene Bahnkurven) zur Folge hat, wird in der hyperbolischen Geometrie der Punkt P sich bei dem entsprechenden Anziehungsgesetz $f(r) = A \operatorname{sh} r : \operatorname{ch}^3 r$ zwar auch in einem Kegelschnitt bewegen, dessen Mittelpunkt C ist, doch ist der Kegelschnitt nicht immer eine Ellipse.*

In der hyperbolischen Geometrie gibt es also kein Anziehungsgesetz, das unabhängig von Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit immer geschlossene Bahnkurven ergibt.

5. *Das Bertrandsche Problem in der sphärischen Geometrie.* Bezeichnet man das Komplement der Breite eines auf der Kugel vom Radius 1 gelegenen Punktes mit r, seine geographische mit φ, so wird das Bogenelement

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2,$$

1) Killing a. a. O. S. 37—46.

2) Killing a. a. O. S. 20.

und eine Rechnung, die der in Nr. 3 angestellten Schritt für Schritt parallel geht (es sind immer nur die hyperbolischen Funktionen durch die entsprechenden trigonometrischen zu ersetzen) ergibt die beiden Anziehungsgesetze:

$$f(r) = \frac{A}{\sin^2 r}\left(V = -A\cot r\right); \quad f(r) = \frac{A \sin r}{\cos^3 r}\left(V = \frac{A}{2}\operatorname{tang}^2 r\right).$$

Das erste Anziehungsgesetz ergibt wieder eine der Planetenbewegung entsprechende Bewegung[1]); bei dem zweiten erhält man zur Bestimmung der Bahnkurven die folgende, der Gleichung 3'' entsprechende Differentialgleichung

$$K^2\left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + 1 + u^2\right) + \frac{A}{u^2} = h, \qquad (A > 0, \ h > 0)$$

wo

$$u = \cot r.$$

Hieraus kommt

$$\left(u\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^4 + u^2\left(1 - \frac{h}{K^2}\right) + \frac{A}{K^2} = 0.$$

Schreibt man (vgl. Nr. 3) diese Gleichung in der Form

$$\left(u\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(u^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{K^2}\right)\right)^2 + \frac{A}{K^2} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{h}{K^2}\right)^2 = 0,$$

so sieht man, daß

$$\frac{A}{K^2} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{h}{K^2}\right)^2 < 0.$$

Gibt man endlich der Gleichung die Form

$$\left(u\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + (u^2 - \alpha)(u^2 - \beta) = 0,$$

wo

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{h}{K^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{h}{K^2}\right)^2 - \frac{4A}{K^2}}\right),$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{h}{K^2}\right) - \sqrt{\left(1 - \frac{h}{K^2}\right)^2 - \frac{4A}{K^2}}\right),$$

so muß mindestens eine der beiden reellen Größen α, β positiv sein, da

$$u^2 = \alpha\cos^2(\varphi - \varphi_0) + \beta\sin^2(\varphi - \varphi_0)$$

positiv sein muß und zwischen α und β enthalten ist.

---

1) Vgl. C. Neumann, Ausdehnung der Kepplerschen Gesetze auf den Fall, daß die Bewegung auf einer Kugel stattfindet (diese Berichte 38, 1886, S. 1. 2). Die daselbst ohne Beweis aufgestellten Sätze habe ich in § 8 meiner oben genannten Abhandlung bewiesen.

Es ist also, da wegen $A > 0$:

$$\left|1 - \frac{h}{K^2}\right| > \sqrt{\left(1 - \frac{h}{K^2}\right)^2 - \frac{4A}{K^2}}$$

sicher

$$\left(1 - \frac{h}{K^2}\right) > 0$$

und daher sowohl α wie β positiv.

Es ist daher erlaubt zu setzen

$$\alpha = a^2, \quad \beta = b^2,$$

und hierin sind a und b reelle Größen.

Führen wir nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen Anfang mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt, d. h. setzen wir

$$x = \sin r \cos(\varphi - \varphi_0),$$
$$y = \sin r \sin(\varphi - \varphi_0),$$
$$z = \cos r,$$

so kommt als Gleichung der Bahnkurve

$$z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

in Verbindung mit

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Die Bahnkurve des Punktes P, der von O mit der Kraft

$$f(r) = A \sin r : \cos^3 r \qquad (r = OP)$$

angezogen wird, ist also eine sphärische Ellipse mit dem Mittelpunkt O.

Während also in der euklidischen Geometrie das Gesetz der elastischen Anziehung immer geschlossene Bahnkurven ergibt und das Newtonsche Gesetz auch, sobald die Anfangsgeschwindigkeit von P nicht zu groß ist, führen in der *sphärischen* Geometrie die beiden entsprechenden Anziehungsgesetze ($f(r) = A \sin r : \cos^3 r$; $b(r) = A : \sin^2 r$) *immer* auf geschlossene Bahnkurven. In der *hyperbolischen* (Vgl. Nr. 3 und 4) sind bei *beiden* Anziehungsgesetzen ($f(r) = A \operatorname{sh} r : \operatorname{ch}^3 r$; $f(r) = A : \operatorname{sh}^2 r$) den Anfangsgeschwindigkeiten Bedingungen (Ungleichheiten) aufzuerlegen.

In allen drei Geometrien aber sind die Bahnkurven Kegelschnitte, wobei das anziehende Zentrum im ersten Fall ein Brennpunkt, im zweiten der Mittelpunkt ist.

Druckfertig erklärt 26 V. 1903.]



INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

FÜNFUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1903.

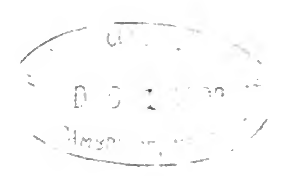
IV.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1903.

Einzelpreis 2 Mark.



SITZUNG VOM 8. JUNI 1903.

Über die Präsentation von zwei neuen Mitgliedern wird statutengemäß in der nächsten Sitzung abgestimmt werden.

Dem Kartelltag in München hat der Herr Sekretär der phil.-hist. Klasse, Herr Windisch, beigewohnt und dabei auch an den die math.-phys. Klasse betreffenden Kommissionssitzungen teilgenommen. Den von Herrn Windisch an seinen Stellvertreter, Herrn Lipsius, erstatteten Bericht teilt dieser der math.-phys. Klasse mit, und er legt einen vorläufigen Entwurf zu einer *internationalen Organisation für luftelektrische Forschungen* vor.

Der Sekretär erstattet Bericht über die in London abgehaltene Komiteesitzung der internationalen Association der Akademien und über die Sitzung der von der Association beschlossenen Gehirnkommission. Letztere Kommission schlägt den Akademien vor, behufs speziellerer Bearbeitung von Organisationsplänen eine Zentralkommission, bestehend aus den Herren Ehlers, Flechsig, Golgi, His, Munk, Obersteiner und Waldeyer, niederzusetzen.

Die Klasse stimmt dem gestellten Antrag bei.

Herr Neumann teilt einen Aufsatz mit von Herrn M. Krause: „Über Fouriersche Reihen mit zwei veränderlichen Größen“.

Herr Wiener teilt eine Notiz mit von Herrn Karl Bädeker: „Über einen Versuch, eine Einwirkung ultravioletten Lichtes auf den elektrischen Widerstand der Metalle zu finden“.

Bericht an die K. S. Gesellschaft der Wissenschaften über die am 5. Juni 1903 in London abgehaltene Sitzung der von der internationalen Association der Akademien niedergesetzten Kommission zur Gehirnerforschung.

Erstattet von den Delegierten Paul Flechsig und Wilhelm His.

Auf Antrag der K. S. G. d. W. hat die internationale Association der Akademien bei ihrer Generalversammlung in Paris (am 16. April 1901) beschlossen, eine Kommission niederzusetzen, mit dem Auftrag, *eine nach einheitlichen Grundsätzen erfolgende Durchforschung, Sammlung und allgemeine Nutzbarmachung des auf Gehirnanatomie bezüglichen Materiales zu beraten, und dabei ausdrücklich die Schaffung besonderer Zentralinstitute in Erwägung zu ziehen, in denen die Methoden der Forschung entwickelt, das vorhandene Beobachtungsmaterial aufgespeichert und der allgemeinen Benutzung der dabei interessierten Gelehrten zugänglich gemacht werden soll.*

Die Wahl dieser Kommission fiel statutengemäß dem Komitee der Association zu. Unsere Gesellschaft hat (unterm 3. Febr. 1902) der Royal Society als leitender Akademie eine Reihe von Namen aus den Kreisen der Akademiker vorgeschlagen. In der Folge sind von anderen Seiten her noch Namen von sachkundigen Nichtakademikern hinzugefügt und von der Royal Society den associierten Akademien mitgeteilt worden. Die formelle Bestätigung sämtlicher Wahlen erfolgte in der Komiteesitzung der Association vom 4. Juni 1903. Danach bestand die für die Frage der Gehirnforschung niedergesetzte Kommission aus den Herrn:

Bechterew (St. Petersburg)	Ehlers (Göttingen)
Ramon y Cajal (Madrid)	Flechsig (Leipzig)
Cunningham (Edinburgh)	Ferrier (London)
Déjerine (Paris)	M. Foster (London)
A. S. Dogiel (Petersburg)	van Gehuchten (Loewen)
Edinger (Frankfurt a./M.)	Giard (Paris)

Guldberg (Christiania)
Heger (Brüssel)
His (Leipzig)
Hitzig (Halle)
Horsley (London)
Ray Lankester (London)
Lannelongue (Paris)
Langley (London)
Lenhossék (Budapest)
Mall (Baltimore)
Minot (Boston)
Monakow (Zürich)
Mosso (Turin)
Munk (Berlin)
Obersteiner (Wien)
Perrier (Paris)
Retzius (Stockholm)
Sherrington (London)
Toldt (Wien)
W. Turner (Edinburgh)
Waldeyer (Berlin)
Zuckerkandl (Wien)

Seitens der Royal Society sind diese sämtlichen Herren zum 5. Juni 1903 nach London eingeladen worden. Herr Heger hatte sich brieflich entschuldigt. Im übrigen haben an der Sitzung teil genommen:

aus Berlin	Hr.	Waldeyer
Budapest		Lenhossék
Christania		Guldberg
Edinburgh		Cunningham
Göttingen		Ehlers
Leipzig		Flechsig und His
London		Ferrier, Foster, Horsley und Sherrington
Paris		Giard
Stockholm		Retzius
Wien		Obersteiner und Toldt

Die Sitzung wurde durch den Präsidenten des Komitees der Association Sir Michael Foster eingeleitet, und auf dessen Antrag wurde der Sekretär der antragstellenden Gesellschaft zum Vorsitzenden ernannt. Die Schriftführung wurde von den Herren Lenhossék und Sherrington übernommen, von denen der letztere am Vormittag durch Herrn Harrison vertreten war.

Es war zunächst die Sache der beiden Leipziger Delegierten, den von ihrer Gesellschaft bei der Association eingebrachten Antrag sachlich zu begründen und über dessen weitere Behandlung Vorschläge zu machen. Dies ist auf Grund folgender, vorher vereinbarter Gedankengänge geschehen:

Allgemein gefaßt, geht der Sinn der von der Association gestellten Aufgabe dahin, daß *die Förderung der Gehirnkenntnis durch vereinigte Arbeit angestrebt werden soll.* Dabei wird die Bildung

eines *internationalen Systemes von Anstalten* als ein Hauptmittel zur Erfüllung der gestellten Anfgabe ins Auge gefaßt. Die vor kurzem von autoritativer Seite ausgesprochene Behauptung, daß „die Kenntnis des menschlichen Gehirns bis dahin sehr langsame Fortschritte gemacht habe“, kann angesichts der ungewöhnlich ergebnisreichen und mannigfaltigen Arbeiten der verflossenen zwei bis drei Jahrzehnte als unbegründet abgelehnt werden. Die Sachlage ist vielmehr die, daß der *überaus große Umfang*, welchen die Einzeltatsachen auf dem Gebiet der Hirnforschung gerade in den letzten Jahren erreicht haben, es dem einzelnen unmöglich macht, sich über alle wichtigen Fortschritte *selbsttätig* auf dem Laufenden zu erhalten. Der überaus hohe Entwicklungsgrad, den die Hirnanatomie in relativ kurzer Zeit erreicht hat, beruht auf der Anwendung einer *größeren Anzahl, ihrem Wesen nach recht verschiedener Methoden.* Nur durch das gleichzeitige Arbeiten von Theoretikern und Praktikern und durch das Ineinandergreifen von Anatomie, Histologie, Physiologie, Entwicklungsgeschichte, Pathologie und klinischen Disziplinen, sowie vergleichender Anatomie ist es möglich gewesen, das Problem des Hirnbaues und der Hirnleistungen soweit zu fördern, daß wir im stande sind, *die zu erstrebenden Endziele wenigstens in ihren allgemeinen Umrissen zu erfassen.* Andererseits ist es gerade der Beteiligung so verschiedener Faktoren zuzuschreiben, daß für den Einzelforscher *die Übersicht des in zahllosen Sonderarbeiten schon Erreichten so schwierig ist.* Der einzelne überblickt in der Regel nur ein, höchstens zwei Gebiete vollständig, und selbst bei größter Arbeitskraft ist keiner im stande, alle Angaben, selbst über wichtige Befunde nachzuprüfen und herauszuschälen, was in jeder besonderen Disziplin als feststehend und von dauerndem Wert zu betrachten ist. Soll die Kommission in Behandlung der ihr gestellten Aufgabe allen Anforderungen der Wissenschaft gerecht werden, so hat sie in Betracht zu ziehen:

1. die makroskopische Morphologie des menschlichen Gehirns, mit Berücksichtigung der Rassenunterschiede, sowie der individuellen Variationen nach Größe, Form, Gewicht u. s. w.,
2. die vergleichend anatomische Gehirnforschung,
3. die histologische Forschung, insbesondere auch die Verwendung der Silbermethode,
4. die entwicklungsgeschichtliche Bearbeitung, die sich ihrerseits gliedert in die

a. der morphologischen Hirnentwicklung,
b. der früh embryonalen Histogenese,
c. der Markscheidenentwicklung bei Menschen und Tieren,
5. die pathologisch-anatomischen Methoden, insbesondere die Verfolgung der sekundären Degeneration nach den Methoden von Türk, Gudden und Marchi,
6. die experimentelle Physiologie, besonders die der Gehirnoberfläche,
7. die Bearbeitung der klinischen Tatsachen wie z. B. die der Aphasie u. a. m.

Um die Frage nach der Errichtung und zweckmäßigen Organisation von Hirnforschungsinstituten in fruchtbringender Weise zu beraten, erscheint es notwendig, die Arbeit zu teilen und an Stelle der vielgliedrigen Gesamtkommission eine Anzahl von Spezialkommissionen zu ernennen. Das Zusammenarbeiten der Beratungsergebnisse dieser Spezialkommissionen ist sodann einer nicht allzu umfangreichen Zentralkommission zu überweisen.

Hinsichtlich der anzustrebenden Institute sind zunächst eine Anzahl von allgemeinen Gesichtspunkten festzustellen: die Institute haben in *erster Linie der Förderung der Forschung,* in zweiter Linie der *Verbreitung von Kenntnissen* zu dienen. In ersterer Hinsicht fallen ihnen zu:

1. Die Bewältigung größerer, über die Kräfte einzelner Forscher hinausgehender Aufgaben, vor allem solcher Aufgaben, die ein nach einheitlichem Plan arbeitendes technisch geschultes Personal verlangen.
2. Die Teilnahme an solchen wissenschaftlichen Unternehmungen, die nur durch Kooperation verschiedener Anstalten möglich sind.
3. Die Aufspeicherung von wissenschaftlichem Material zu Gunsten der desselben bedürfenden Forscher.
4. Die Anlegung von Archiven, in denen bereits bearbeitetes Material bis auf weiteres aufgehoben wird.

Zur Verbreitung der Kenntnisse haben die in Aussicht genommenen Anstalten dadurch beizutragen, daß sie für eine geordnete Aufstellung und Erläuterung des der allgemeinen Belehrung in engeren oder weiteren Kreisen dienenden Materials Sorge tragen. Sie sind, so weit diese Forderung in Betracht kommt, nach Art von Museen oder Bibliotheken zu verwalten.

Bei Annahme dieser allgemeinen Grundsätze und bei *Festhaltung des einheitlichen Endzieles, der allseitigen Förderung unserer Kenntnisse vom Gehirn* bleibt den einzelnen Anstalten,

hinsichtlich ihrer Ausdehnung und Gestaltung ein weiter Spielraum übrig. In manchen Fällen wird es zweckmäßig sein, das betreffende Institut für Hirnforschung an andere schon bestehende Anstalten an anatomische, physiologische oder klinische Institute, oder an größere Museen anzugliedern, in anderen Fällen wird eine völlige Neuschöpfung erwünscht sein. Dabei wird nicht jede Anstalt alles bieten können. Der Schwerpunkt der Einrichtung kann nach einer, oder nach einer anderen Richtung gelegt werden. Das Wesentliche ist, daß die verschiedenen Institute unter einander in Beziehung gesetzt werden, und der Pariser-Beschluß spricht daher von einem *System von Instituten*. Es wird uns geholfen, wenn wir wissen, daß *an einem Ort das embryologische*, *an einem anderen das vergleichend-anatomische, das anthropologische oder das physiologische Material geordnet beisammen zu finden ist*, und wenn *die verschiedenen Institute sich unter einander gegenseitig mit Material und mit Unterrichtsmitteln aushelfen*. Auch die Benutzung einer *einheitlichen Nomenklatur*, sowie *einheitliche Anwendung* von *Maß* und *Gewicht* sind zu erstrebende Ziele. An die vereinigten Akademien ist der Antrag zu stellen, daß sie den Regierungen und sonstigen Instanzen gegenüber die Wichtigkeit der Sache gebührend hervorheben und für die Errichtung von Hirnforschungsanstalten befürwortend eintreten, sowie daß sie auch sonst, soweit irgend möglich, unseren Bestrebungen hilfreich entgegenkommen.

Nach Abgabe des in obiger Darstellung zusammengezogenen Votums der beiden Leipziger Delegierten hat noch in der Morgensitzung der Kommission eine allgemeine Diskussion stattgefunden, an der sich die Herren WALDEYER, TOLDT, EHLERS, RETZIUS und Sir MICHAEL FOSTER beteiligt haben. Prinzipielle Gegensätze sind dabei nicht hervorgetreten. Besonderes Gewicht wurde auf volle Freiheit der Bewegung gelegt (TOLDT) und auf die Aufstellung und gegenseitige Mitteilung von Sammlungskatalogen (EHLERS). Die an die Akademien zu stellenden Anträge hat Herr WALDEYER in einer Reihenfolge von Sätzen zusammengefaßt, und auf den Wunsch der Versammlung hin hat er sich der dankenswerten Mühe unterzogen, im Intervall zwischen der Vormittags- und der Nachmittagssitzung einen schriftlichen Entwurf der bezüglichen Anträge auszuarbeiten. Dieser Entwurf ist den Verhandlungen der Nachmittagssitzung zu Grunde gelegt und mit

untergeordneten Modifikationen von der Kommission einstimmig angenommen worden. Die von der Kommission angenommenen Anträge lauten also:

Anträge an die internationale Association der Akademien seitens der von ihr ernannten Kommission für Hirnforschung.

A. Nächste Aktion der vereinigten Akademien in Sachen der Hirnforschung.

1. Die einzelnen in der Association vertretenen Akademien und Gesellschaften sollen namens der Association bei ihren betreffenden Regierungen oder sonstigen zustehenden Instanzen den Antrag stellen, *Spezial-Institute oder Instituts-Abteilungen für die Erforschung des Zentralnervensystems zu begründen,* soweit solche nicht vorhanden oder auf anderem Wege zu beschaffen sind. Die in den Instituten zu verfolgenden Aufgaben beziehen sich sowohl auf die Morphologie, als auf die Physiologie und Pathologie des Zentralnervensystemes, und sie umfassen zur Zeit folgende Sondergebiete:
   a. Die systematische Anatomie des menschlichen Zentralnervensystems, einschließlich der Anthropologie.
   b. Die vergleichende Anatomie.
   c. Die histologische Forschung.
   d. Die entwickelungsgeschichtliche Forschung.
   e. Die Physiologie, einschließlich der physiologischen Psychologie.
   f. Die pathologische Anatomie, experimentelle Pathologie und Teratologie.
   g. Die klinische Forschung.
2. Für die Ausarbeitung dieses Antrages wird eine *Zentralkommission* von 7 Mitgliedern ernannt, der auch in Zukunft eine leitende Tätigkeit vorbehalten bleibt.
3. Die am 5. Juni 1903 in London versammelte, vom Komitee der internationalen Association ernannte Kommission schlägt folgende Mitglieder für die Zentralkommission vor: die Herren Ehlers, Flechsig, Golgi, His, Munk, Obersteiner, Waldeyer.
4. Den Akademien der Association werden diese Namen zur Bestätigung empfohlen. Die Akademien werden gebeten, von ihrer Entscheidung baldmöglichst der Royal Society in London als jetzigem Vorort Kenntnis zu geben. Die Royal Society

bestimmt einen der Gewählten zum Präsidenten der Zentralkommission. Sie teilt den Gewählten die Bestätigung ihrer Wahl und den Namen des bezeichneten Präsidenten mit.

5. Der Präsident leitet die Geschäfte der Zentralkommission. Bezüglich der Bestreitung der Kosten bleiben weitere Entschließungen vorbehalten.

6. Die Zentralkommission wählt zunächst Mitglieder für die unter 1 a—g benannten *Forschungs-Sektionen.* Ihre Zahl soll für jede Sektion 5 nicht überschreiten.

7. Diese *Spezialkommissionen* bezeichnen, unter Betonung des zunächst Wünschbaren, die für ihr Forschungsgebiet erforderlichen Einrichtungen an den zu begründenden Hirnforschungs-Instituten. Sie senden diese Ausarbeitungen bis spätestens 1. November 1903 dem Präsidenten der Zentralkommission ein. Dabei können sie, z. B. durch Fragebogen, sich der Mitwirkung anderer geeigneter Fachleute bedienen.

8. Auf Grund der eingegangenen Berichte arbeitet die Zentralkommission den Entwurf des an die betreffenden Instanzen zu richtenden Antrages aus. Dieser Antrag wird der Versammlung der Akademien in London 1904 zur Beratung und eventuellen Beschlußfassung vorgelegt. Der angenommene und dann von den einzelnen Akademien bestätigte Antrag wird von den letzteren den zugehörigen Instanzen unter Befürwortung eingereicht.

B. Weitere Aktion der Akademien.

1. Die von den Akademien erwählte Zentralkommission bleibt bis auf weiteres bestehen. Bei Abgang eines der Mitglieder schlagen die verbleibenden den associierten Akademien einen Ersatzmann zu eventueller Bestätigung vor. Bei solchen Neuwahlen ist Wechsel der Akademien erwünscht.

2. Die Zentralkommission hat mit Unterstützung der Akademien die Annahme der Anträge auf Errichtung von Hirnforschungs-Instituten zu betreiben.

3. Sie nimmt jährlich Berichte der Institute entgegen, stellt diese zu einem übersichtlichen Gesamtberichte zusammen und sendet ihn den einzelnen Akademien ein. Diesen wird anheimgegeben, ihn in ihrer Sprache zu veröffentlichen.

4. Sie sorgt für die Verbindung der einzelnen Institute untereinander, für zeitgemäße Ausgestaltung der Arbeitspläne u. a. m.

C. Organisation der Institute.

1. Arbeitsfeld und Arbeitsweise bleiben jedem einzelnen Institute überlassen; es sollen jedoch angestrebt werden:
   a. Eine einheitliche Nomenklatur,
   b. Verwendung eines einheitlichen Maßes und Gewichtes.
2. Alljährlich statten die Institute der Zentralkommission einen Bericht über ihre Tätigkeit ab. Dabei sollen der Bestand und die Zugänge an Druckwerken, Abbildungen, Modellen und Präparaten mitgeteilt werden.
3. Die Institute sind gehalten ihre Arbeitsmaterialien und die Sammlungen ihrer Präparate einander unter sich, sowie den derselben bedürftigen Forschern nach Möglichkeit zugänglich zu machen.

London, Burlington House, den 5. Juni 1903.

Namens der Kommission:
His. v. Lenhossék. Sherrington.

Laut dem Satze A 2 obiger Vorschläge war die 7 gliedrige Zentralkommission vorzuschlagen. Herr Retzius betonte, daß es erwünscht sei, wenn die Mitglieder dieser Kommission nahe beisammenwohnen, und er schlug als Mitglieder vor: die Herren Ehlers, Munk, Waldeyer und die beiden Leipziger Delegierten. Diesem Vorschlag gegenüber wurde von den Herren Mosso und Toldt Gewicht darauf gelegt, daß die Herren Golgi und Obersteiner der Zentralkommission angehören, und ihre Vorschläge wurden von der Versammlung einstimmig angenommen. Die Wahl unterliegt der Genehmigung der Akademien. Der Präsident wird nach erfolgter Genehmigung der Kommissionswahl von der Royal Society bezeichnet. Sobald die Zentralkommission endgültig festgestellt ist, wird sie die Organisation der Sektionen vorzunehmen haben.

Vor Ende der Sitzung wurde ein von Prof. A. Forel an den Präsidenten der Royal Society gerichtetes Schreiben vorgelegt. Nach erläuternden Bemerkungen von Seiten einiger anwesender Mitglieder wurde die Sitzung der Kommission Abends 5 Uhr geschlossen.

Mit ihren Anträgen an die Akademien hat die von dem Komitee der Association niedergesetzte große Kommission die ihr gestellte Aufgabe abgeschlossen, und falls ihre Anträge von den Akademien angenommen werden, so werden die projektierte Zentralkommission und die von dieser ernannten Spezialsektionen in Tätigkeit zu treten haben.

Druckfertig erklärt 22. VI. 1903.]

Über Fouriersche Reihen mit zwei veränderlichen Größen.

Von

M. Krause.

Die Entwickelung willkürlicher Funktionen einer veränderlichen Größe in Reihen, die nach dem Cosinus und Sinus von Vielfachen des Argumentes fortschreiten, ist seit langem der Gegenstand zahlreicher und wichtiger Untersuchungen gewesen. Man kann hierbei zwei Kategorien von Arbeiten unterscheiden. Die eine beruht wesentlich auf der Dirichletschen Arbeit im ersten Bande des Repertoriums von Dove und hat die Theorie der Fourierschen Reihen zum Gegenstande. Die andere beruht auf der Riemannschen Arbeit im 13. Bande der Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und behandelt die Theorie der trigonometrischen Reihen überhaupt. Auf dem Gebiete der Funktionen *zweier* veränderlicher Größen ist nach der angegebenen Richtung hin, soweit dem Verfasser bekannt ist, nur weniges gearbeitet worden. Abgesehen von kurzen Bemerkungen[1]) ist mir nur eine Arbeit von Ascoli aus dem Jahre 1879 bekannt geworden, deren vollständiger Titel lautet: „Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica. Roma“ und die sich auf die Verallgemeinerung der Riemannschen Untersuchungen für den Fall zweier unabhängiger Größen bezieht.[2]) Im folgenden soll nun nach der anderen, der Dirichletschen Richtung hin vorgegangen werden.

---

1) Siehe Riemann: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Herausgegeben von Hattendorf. Zweite Auflage 1876. S. 94.

2) Nach Fertigstellung der Arbeit bin ich durch die Freundlichkeit von Herrn Stolz noch auf die Arbeiten aufmerksam geworden: Ascoli: Sulle serie trigonometriche a due variabili. Atti della R. Acc. dei Lincei. 3. Serie. Band 7. Arzelà: Sulle serie doppie trigono-

Die Dirichletsche Arbeit setzt es sich zum Ziel nachzuweisen, daß unter gewissen Bedingungen eine vorgelegte Funktion einer veränderlichen Größe in eine Fouriersche Reihe entwickelt werden kann.

Es ist der Zweck der nachfolgenden Untersuchungen, die analoge Aufgabe im Gebiete der Funktionen zweier veränderlicher Größen zu behandeln und damit die Lösung weitergehender Probleme vorzubereiten, wie sie in der Theorie der Funktionen einer veränderlichen Größe seitens einer Reihe von Autoren, wie Lipschitz, du Bois-Reymond, Harnack, Hölder, Kronecker, Brodén[1]) *u. a. in Betracht gezogen sind.*

Bei der Lösung der gestellten Aufgabe kann man auf mehrfachem Wege vorgehen, so wie es in der Theorie der Funktionen einer veränderlichen Größe tatsächlich geschehen ist. Bei letzterer haben sich neben der Dirichletschen Methode einige Methoden von Bedeutung gezeigt, die auf dem sogenannten zweiten Mittelwertsatz der einfachen bestimmten Integrale beruhen, und zwar geschieht das vor allem in Arbeiten von Bonnet, du Bois-Reymond, Heine, Harnack, Carl Neumann.[2]) Von großer Durchsichtigkeit ist die Darstellung von Herrn C. Neumann, da

---

metriche. Memorie della R. Acc. Bologna. Ser. 5. Tome IV 1894. (Siehe Fortschritte der Math. Band 25.) Auch diese Arbeiten verfolgen andere Ziele, als die vorliegende.

1) Lipschitz: Crelles Journal Band 63; du Bois-Reymond: Abhandlungen der Kgl. bayrischen Akademie der Wissenschaften 12 und andere Arbeiten; Harnack: Mathematische Annalen Band 19; Hölder: Berliner Sitzungsberichte 1885; Kronecker: ibidem 1885; Brodén: Mathematische Annalen Band 52.

2) Bonnet: Remarques sur quelques intégrales définies. Journal de Mathématiques. Tome 14. 1849. du Bois-Reymond: Über die allgemeinen Eigenschaften der Klasse von Doppelintegralen, zu welcher das Fouriersche Doppelintegral gehört. Crelle Band 69. Heine: Handbuch der Kugelfunktionen Band 1. 1878. Harnack: Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourierschen Reihe. Math. Annalen Band 19. Siehe auch das Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von Serret, deutsch von Harnack und zwar den zweiten Band. C. Neumann: Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Funktionen fortschreitenden Entwickelungen. Leipzig 1881. Endlich möge auf den ersten Band des Werkes von Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen. Braunschweig 1900 verwiesen werden.

an derselben außer dem zweiten Mittelwertsatz nur noch einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen gebraucht werden.

Die folgenden Betrachtungen sollen sich an die Neumannsche Darstellung anlehnen, wobei ich mir vorbehalte, bei anderer Gelegenheit auf andere Darstellungsformen zurückzukommen.

§ 1. Aufstellung von vier speziellen Fourierschen Reihen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlicher Größen.

Wir wollen uns die endliche trigonometrische Reihe vorgelegt denken:

$$(1)\qquad f(x, y) = \sum_{r=1}^{r=m-1} \sum_{s=1}^{s=n-1} a_{r,s} \sin rx \sin sy$$

und fragen uns, ob die Größen $a_{r,s}$, deren Zahl gleich $(m-1)(n-1)$ ist, so bestimmt werden können, daß die Funktion $f(x, y)$ an den Stellen:

$$x = \frac{\varrho\pi}{m}, \quad y = \frac{\sigma\pi}{n}, \quad \varrho = 1, 2, \ldots, m-1; \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n-1$$

vorgeschriebene Werte annimmt.

Wir schreiben unsere Reihe:

$$(2)\qquad f(x, y) = \sum_{r=1}^{r=m-1} f_r(y) \sin rx,$$

wobei gesetzt ist:

$$(3)\qquad f_r(y) = \sum_{s=1}^{s=n-1} a_{r,s} \sin sy,$$

dann folgt aus den entsprechenden Theorien über die Funktionen einer veränderlichen Größe, daß sicherlich die Beziehung stattfinden muß:

$$f_r(y) = \frac{2}{m} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m-1} f\left(\frac{\varrho\pi}{m}, y\right) \sin \frac{r\varrho\pi}{m}.$$

Auf die trigonometrische Reihe (3) können wir dann wieder die bekannten Schlüsse anwenden und erhalten:

$$(4)\qquad a_{r,s} = \frac{4}{mn} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m-1} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n-1} f\left(\frac{\varrho\pi}{m}, \frac{\sigma\pi}{n}\right) \sin \frac{r\varrho\pi}{m} \cdot \sin \frac{s\sigma\pi}{n}.$$

Lassen wir m und n bis in die Unendlichkeit wachsen, so erhalten wir das erste unstrenge Resultat:

Eine Funktion $f(x, y)$, die im Quadrate $0, 0; \pi, \pi$ willkürlich gegeben ist, kann innerhalb desselben durch die Reihe dargestellt werden:

$$f(x, y) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} a_{s,r} \sin rx \cdot \sin sy,$$

wobei gesetzt ist:

(5) $$a_{r,s} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(u, v) \sin ru \sin sv\, du\, dv.$$

Wie schon bemerkt, kann dieses Resultat als ein sicheres nicht bezeichnet werden, wir werden später sehen, daß dasselbe unter Umständen in der Tat falsch wird. Für die Seitenlinien des Quadrates nimmt die Reihe den Wert Null an.

An Stelle der Größen $a_{r,s}$ werden wir bisweilen die Größen $a'_{r,s}$ schreiben.

Wir legen jetzt zweitens die Funktion zu Grunde:

$$2 f(x, y) \sin y$$

und denken uns diese in eine Reihe der vorhin betrachteten Form entwickelt, d. h. gesetzt:

(6) $$2 f(x, y) \sin y = \sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} a_{r,s} \sin rx \sin sy,$$

wobei die Größen $a_{r,s}$ den Werth haben:

$$a_{r,s} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi 2 f(u, v) \sin v \cdot \sin ru \cdot \sin sv\, du\, dv.$$

Neben diesen Größen führen wir neue $a_{r,-s}$ ein, die durch die Gleichung definiert sind:

(7) $$a_{r,-s} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(u, v) \sin ru \cos sv\, du\, dv.$$

Zwischen ihnen und den Größen $a_{r,s}$ besteht dann die Beziehung:

$$a_{r,s} = a_{r,-s+1} - a_{r,-s}.$$

Setzen wir diese Werte in Gleichung (6) ein, so wird der Faktor von $\sin x$ auf der rechten Seite geschrieben werden können:

$$a_{1,-0} \sin y + a_{1,-1} \sin 2y + a_{1,-2} (\sin 3y - \sin y) \cdots$$

Wie wir sehen, kann in dieser Reihe der Faktor $\sin y$ als gemeinsamer herausgezogen werden, sodaß wir sie schreiben können:

$$2 \sin y\left(\frac{a_{1,-0}}{2} + a_{1,-1} \cos y + a_{1,-2} \cos 2y + \cdots\right).$$

In ähnlicher Weise können die Faktoren von $\sin 2x$, $\sin 3x$ etc. untersucht werden.

Wir erhalten dann das zweite unstrenge Resultat:

Eine Funktion $f(x, y)$, welche im Quadrat 0, 0; π, π willkürlich gegeben ist, kann durch die Reihe dargestellt werden:

$$f(x, y) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=0}^{s=\infty} a'_{r,-s} \sin rx \cos sy,$$

wobei gesetzt ist:

$$a'_{r,-0} = \tfrac{1}{2} a_{r,0};\ a'_{r,-s} = a_{r,-s}\ (s > 0),$$

und die Größen $a_{r,-s}$ die oben angegebene Bedeutung besitzen.

Auch hier sind die Resultate durchaus unstrenge. Für die Seiten $x = 0$ und $x = \pi$ nimmt die Reihe den Wert Null an.

Genau so ergibt sich das dritte unstrenge Resultat:

Eine Funktion $f(x, y)$, welche im Rechteck 0, 0; π, π willkürlich gegeben ist, kann innerhalb desselben durch die Reihe dargestellt werden

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} a'_{-r,s} \cos rx \sin sy,$$

wobei gesetzt ist:

$$a'_{-0,s} = \tfrac{1}{2} a_{-0,s},\ \text{im übrigen}\ a'_{-r,s} = a_{-r,s}$$

und $a_{-r,s}$ durch das Integral dargestellt wird:

$$a_{-r,s} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(u, v) \cos ru \sin sv\, du\, dv. \tag{8}$$

Endlich erhalten wir das vierte Resultat:

Eine Funktion $f(x, y)$, welche im Quadrat 0, 0; π, π willkürlich gegeben ist, kann innerhalb desselben durch die Reihe dargestellt werden:

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \sum_{s=0}^{s=\infty} a'_{-r,-s} \cos rx \cos sy,$$

wobei gesetzt ist:

$$a'_{-0,-0} = \tfrac{1}{4}a_{-0,-0}, \quad a'_{-0,-s} = \tfrac{1}{2}a_{-0,-s}, \quad a'_{-r,-0} = \tfrac{1}{2}a_{-r,-0},$$

$$\text{im übrigen } a'_{-r,-s} = a_{-r,-s}$$

und $a_{-r,-s}$ *(incl. der Grenzfälle) den Wert besitzt:*

$$(9) \qquad a_{-r,-s} = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi f(u,v)\cos ru \cos sv\,du\,dv.$$

Damit haben wir vier spezielle Fouriersche Reihen gefunden.

§ 2. Entwickelung eines Beispieles.

Es ist hiernach nicht schwer, einfache vorgelegte Funktionen, wie $x^\mu y^\nu$, $\cos px \cos qy$ etc. in trigonometrische Reihen zu entwickeln. Eine Reihe solcher Entwickelungen wird sich mit Hilfe der Multiplikation und Addition von trigonometrischen Reihen einer veränderlichen Größe darstellen lassen. Wir wollen ein Beispiel wählen, bei welchem dasselbe nicht der Fall ist.

Wir denken uns dazu das Quadrat $0, 0; \pi, \pi$ oder auch $ABCD$ durch die Linien $x = \frac{\pi}{2}$ und $y = \frac{\pi}{2}$ in vier Quadrate zerlegt, die wir durch I, II, III, IV bezeichnen wollen. Wir wollen nun für das Quadrat $ABCD$ eine Funktion $f(x,y)$ so definieren, daß sie in den Quadraten I und III gleich xy, in den Quadraten II und IV gleich $(\pi - x)(\pi - y)$ ist.

B		C
	II	IV
	I	III
A		D

Für diese so definierte Funktion wollen wir die vier Darstellungen, wie sie im vorigen Paragraphen skizziert worden sind, wirklich geben.

Wir legen den Betrachtungen die bekannten Integrale zu Grunde:

$$(1) \qquad \int u \sin mu\,du = -\frac{u\cos mu}{m} + \frac{\sin mu}{m^2},$$

$$(2) \qquad \int u \cos mu\,du = \frac{u \sin mu}{m} + \frac{\cos mu}{m^2}.$$

Wir haben vier Doppelintegrale zu betrachten. Das erste lautet:

$$(3) \qquad \frac{\pi^2}{4}a_{r,s} = \int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi f(u,v)\sin ru \sin sv\,du\,dv.$$

Wir können dasselbe zerlegen in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} v \sin svdv \int_0^{\pi} u \sin rudu + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - v) \sin svdv \int_0^{\pi} (\pi - u) \sin rudu.$$

Führen wir die Integrale aus, so erhalten wir für $a_{r,s}$ den Wert:

$$(4) \quad \frac{\pi}{4} a_{r,s} = \frac{\pi}{2sr} \cos \frac{s\pi}{2} (\cos r\pi + 1) - \frac{1}{s^2 r} \sin \frac{s\pi}{2} (\cos r\pi - 1),$$

oder also es ergibt das *erste* Resultat:

Für die vorgelegte Funktion nehmen die Koeffizienten die Formen an:

$$a_{2r,2s} = \frac{(-1)^s}{rs}, \quad \pi a_{2r-1,2s-1} = \frac{(-1)^{s-1} 8}{(2r-1)(2s-1)^2}, \quad a_{2r,2s-1} = 0,$$

$$a_{2r-1,2s} = 0.$$

Für die zweite Darstellung erhielten wir die Werte:

$$(5) \qquad a_{r,-s} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(u, v) \sin ru \cos svdudv.$$

Das Integral auf der rechten Seite kann für die vorgelegte Funktion in die beiden Integrale zerlegt werden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} v \cos svdv \int_0^{\pi} u \sin rudu + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - v) \cos svdv \int_0^{\pi} (\pi - u) \sin rudu.$$

Hieraus folgt:

$$(6) \quad \frac{\pi}{4} a_{r,-s} = -\frac{\pi}{2rs} \sin \frac{s\pi}{2} (\cos r\pi + 1)$$
$$+ \frac{1}{rs^2} \left(\cos r\pi - \cos \frac{s\pi}{2} (\cos r\pi - 1) - \cos s\pi\right),$$

oder also wir erhalten das *zweite* Resultat:

Für die vorgelegte Funktion ergeben sich die Koeffizienten $a_{r,s}$ vermöge der Formeln:

$$\pi a_{2r-1,-2s} = \frac{2}{(2r-1)s^2} \left((-1)^s - 1\right), \quad \pi a_{2r,-2s+1} = \frac{2}{r(2s-1)} \left(\pi(-1))^s + \frac{2}{2s-1}\right)$$

$$a_{2r,-2s} = 0, \quad a_{2r-1,-2s+1} = 0.$$

Für die dritte Darstellung erhielten wir die Darstellungen:

$$(7)\qquad a_{-r,s} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f(u,v)\cos ru \sin sv\,du\,dv.$$

Das Integral auf der rechten Seite kann geschrieben werden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} v \sin sv\,dv \int_0^\pi u\cos ru\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - v)\sin sv\,dv \int_0^\pi (\pi - u)\cos ru\,du.$$

Hieraus folgt:

$$(8)\qquad \frac{\pi}{4}a_{-r,s} = \cos\frac{s\pi}{2}\,\frac{1-\cos r\pi}{r^2 s},$$

oder also wir erhalten das *dritte* Resultat:

Für die vorgelegte Funktion ergeben sich die Koeffizienten $a_{-r,s}$ vermöge der Formeln:

$$\pi a_{-2r+1,2s} = \frac{4(-1)^s}{(2r-1)^2 s},\quad a_{-2r+1,2s-1} = 0,\quad a_{-2r,2s} = 0,$$

$$a_{-2r,2s-1} = 0.$$

Im vierten Falle endlich fanden wir die Darstellungen:

$$(9)\qquad a_{-r,-s} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f(u,v)\cos ru\cos sv\,du\,dv.$$

Das Doppelintegral auf der rechten Seite schreiben wir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} v\cos sv\,dv\int_0^\pi u\cos ru\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\pi - v)\cos sv\,dv\int_0^\pi (\pi - u)\cos ru\,du$$

Mit Hilfe der Auswertung dieser Integrale ergibt sich das Resultat:

$$\frac{\pi^2}{4}a_{-r,-s} = \frac{(\cos r\pi - 1)}{r^2}\left(\pi\frac{\sin\frac{s\pi}{2}}{s} + \frac{1}{s^2}(\cos s\pi - 1)\right),$$

oder also wir erhalten das *vierte* Resultat:

Für die vorgelegte Funktion ergeben sich die Größen $a_{-r,-s}$ vermöge der Formeln:

$$\pi^2 a_{-2r+1,-2s+1} = \frac{8}{(2r-1)^2(2s-1)}\left((-1)^s\pi + \frac{2}{2s-1}\right),$$

$$a_{-2r,-2s} = a_{-2r,-2s+1} = a_{-2r+1,2s} = 0.$$

Freilich sicher sind die gefundenen Resultate nicht, insbesondere steht nicht fest, welche Werte die unendlichen Reihen an den Sprungstellen annehmen.

§ 3. Aufstellung der allgemeinen Fourierschen Reihe zweier veränderlicher Größen.

Außer den soeben entwickelten vier Reihen können noch weitere spezielle aufgestellt werden. Da auf dieselben in der Folge noch ausführlich zurückgekommen werden wird, so wollen wir von der Betrachtung derselben absehen und sogleich die allgemeine Fouriersche Reihe zweier veränderlichen Größen ableiten. Wir setzen dazu:

(1) $$f(x,y) = s_1 + s_2 + s_3 + s_4,$$

wobei unter den Größen s die folgenden Ausdrücke zu verstehen sind:

$$4s_1 = f(x,y) + f(-x,y) + f(x,-y) + f(-x,-y),$$
$$4s_2 = f(x,y) - f(-x,y) - f(x,-y) + f(-x,-y),$$
$$4s_3 = f(x,y) - f(-x,y) + f(x,-y) - f(-x,-y),$$
$$4s_4 = f(x,y) + f(-x,y) - f(x\ -y) - f(-x,-y).$$

Ein jeder dieser vier Ausdrücke kann in eine jede der vier Reihen entwickelt werden, die im ersten Paragraphen skizziert worden sind. Wir treffen die folgenden Wahlen:

Wir setzen:

(2) $$s_1 = \sum\sum a'_{-r,-s} \cos rx \cos sy,$$

dann nehmen die Koeffizienten die folgenden Werte an:

$$a_{-r,-s} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^{-\pi}\int_0^{\pi} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{-\pi} + \frac{1}{\pi^2}\int_0^{-\pi}\int_0^{-\pi}$$

wobei ein jedes der vier Doppelintegrale sich auf die Funktion:

$$f(u,v) \cos ru \cos sv$$

bezieht. Die Funktion $f(x,y)$ denken wir uns willkürlich im Quadrate $-\pi, -\pi; \pi, \pi$ gegeben.

Hieraus folgt aber die einfache Darstellung:

(3) $$a_{-r,-s} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(u,v) \cos ru \cos sv \, du \, dv.$$

Für die Funktion s_2 wählen wir die Reihe:

(4) $$s_2 = \sum\sum a_{r,s} \sin rx \sin sy,$$

dann folgt in ähnlicher Weise, wie vorhin, daß wir $a_{r,s}$ setzen können gleich:

(5) $$a_{r,s} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(u,v) \sin ru \sin sv \, du \, dv.$$

Für die Funktion s_3 wählen wir die Entwickelung:

(6) $$s_3 = \sum\sum a'_{-r,s} \cos rx \sin sy.$$

Die den Größen a' entsprechenden Größen a haben den Wert:

(7) $$a_{-r,s} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(u,v) \cos ru \sin sv \, du \, dv.$$

Endlich werde s_4 in der Form dargestellt:

(8) $$s_4 = \sum\sum a'_{r,-s} \sin rx \cos sy,$$

dann ergeben sich für die entsprechenden Größen $a_{r,-s}$ die Werte:

$$a_{r,-s} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(u,v) \sin ru \cos sv \, du \, dv.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir das Resultat:

Eine Funktion, welche in dem Quadrat $-\pi, -\pi; \pi, \pi$ *willkürlich gegeben ist, kann durch die Reihe dargestellt werden:*

$$\sum_{r=0}^{r=\infty}\sum_{s=0}^{s=\infty}((a'_{r,s}\sin rx + a'_{-r,s}\cos rx)\sin sy + (a'_{r,-s}\sin rx + a'_{-r,-s}\cos rx)\cos sy),$$

wobei die Größen a' *die vorhin angegebenen Werte besitzen.*

§ 4. Normierung des Problems der Fourierschen Reihen zweier veränderlicher Größen.

Die bisherigen Betrachtungen müssen als durchaus unstrenge bezeichnet werden, aus ihnen ergibt sich aber von selbst das

eigentliche Problem der Fourierschen Reihen zweier veränderlicher Größen. In der Tat, wir gehen von der endlichen Summe aus:

$$(1)\quad S_{2m+1,2n+1} = \sum_{r=0}^{r=m} \sum_{s=0}^{s=n} (a'_{r,s} \sin rx + a'_{-r,s} \cos rx) \sin sy + (a'_{r,-s} \sin rx + a'_{-r,-s} \cos rx) \cos sy,$$

wobei die Größen a' die im ersten Paragraphen angedeuteten Werte besitzen. Dann kann der Übergang zu den unendlichen Reihen auf mehrfachem Wege vorgenommen werden.[1]) Die drei wichtigsten Übergänge, die in Betracht kommen, sind kurz durch die drei Symbole dargestellt:

$$\lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} S_{2m+1,2n+1}, \quad \lim_{n=\infty} \lim_{m=\infty} S_{2m+1,2n+1}, \quad \lim_{m=\infty,\, n=\infty} S_{2m+1,2n+1}.$$

Je nach der Art des Überganges werden auch die Koeffizienten der unendlichen Reihe sich modifizieren. In den beiden ersten Fällen erhalten wir in den Koeffizienten Ausdrücke, die von du Bois-Reymond mit dem Namen eines zweimaligen bestimmten Integrales, von Pringsheim mit dem Namen eines iterierten Integrales bezeichnet worden sind, im letzteren Falle dagegen ergeben sich Doppelintegrale im gewöhnlichen Sinne des Wortes.[2])

Lösen wir die Untersuchung von dem Ausgangspunkt, so kommen wir zu den folgenden Fragestellungen, die wohl als die wichtigsten in der Theorie der Fourierschen Reihen zweier veränderlicher Größen angesehen werden können.

Erstens: Es soll der Grenzwert bestimmt werden:

$$\lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} S_{2m+1,2n+1},$$

---

1) In Bezug auf die Theorie der unendlichen Doppelreihen werde verwiesen auf die Arbeiten von Stolz: Über unendliche Doppelreihen. Math. Ann. Band 24, sowie Pringsheim: Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen. Sitzungsberichte der Akademie zu München 1897, sowie auf das Referat desselben Verfassers über Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse in der Encyklopädie der math. Wiss. 1898.

2) In Bezug auf die Theorie der Doppelintegrale werde verwiesen auf die Arbeiten von Pringsheim in den Berichten der Münchener Akademie aus den Jahren 1898 und 1899, sowie auf eine Arbeit von Stolz im 26. Band der math. Annalen und auf den dritten Teil der Grundzüge der Differential- und Integralrechnung desselben Verfassers aus dem Jahre 1899.

wenn gesetzt ist:

$$a'_{r,s} = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin r u \, du \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(u, v) \sin s v \, dv \quad \text{etc.}$$

Zweitens: Es soll der Grenzwert bestimmt werden:

$$\lim_{n=\infty} \lim_{m=\infty} S_{2m+1,\, 2n+1},$$

wenn gesetzt ist:

$$a'_{r,s} = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin s v \, dv \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(u, v) \sin r u \, du \quad \text{etc.}$$

Drittens: Es soll der Grenzwert bestimmt werden:

$$\lim_{m=\infty,\; n=\infty} S_{2m+1,\, 2n+1},$$

wenn gesetzt ist:

$$a'_{r,s} = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(u, v) \sin r u \sin s v \, du \, dv \quad \text{etc.}$$

Unter diesen drei Aufgaben dürfte die dritte wohl als die wichtigste bezeichnet werden.

Mit ihr allein wollen wir uns im weiteren beschäftigen.

Auch bei ihr kann noch eine Teilung stattfinden. Es kann festgestellt werden, daß unter den Doppelintegralen die oberen oder die unteren oder die Doppelintegrale schlechthin verstanden werden. Als wichtigster Fall ist der letzte zu bezeichnen, auf den wir uns beschränken wollen. Indem das geschieht, werden die willkürlichen Funktionen von selbst gewissen Bedingungen unterworfen. Wir wollen diese Bedingungen noch weiter modifizieren, um zunächst die einfachsten und wichtigsten Funktionskategorien zur Erledigung zu bringen.

Es sei ein Rechteck $a, b;\ a_1, b_1$ oder auch $A_0 B_0 C_0 D_0$ vorgelegt, dessen Seiten parallel den Koordinatenachsen sind, wobei wir die Ungleichungen festsetzen wollen:

B_0 $C_0(a_1, b_1)$

$A_0(a, b)$ D_0

$$a < a_1, \qquad b < b_1.$$

Für die Punkte im Innern und auf den Seiten dieses Rechtecks sei eine Funktion $f(x, y)$ eindeutig definiert, dann wollen wir sagen, sie ist *im Rechteck stetig,* wenn kurz gesagt die Differenz:

$$f(x + h,\ y + k) - f(x, y)$$

mit h und k zu gleicher Zeit sich der Grenze Null nähert. Hierbei sollen x, y sowohl als auch $x+h$, $y+k$ Punkte im Innern oder auf den Seiten des Rechtecks bedeuten.

Ferner möge eine Funktion $f(x, y)$ im *vorgelegten Rechteck abteilungsweise stetig* heißen, wenn dieses Rechteck durch Parallelen zur x- und zur y-Achse in eine endliche Anzahl von Flächenstücken zerlegbar ist, derart, daß die Funktion in jedem einzelnen Flächenstück überall stetig ist. Ein Beispiel hierfür ist im zweiten Paragraphen gegeben worden. Dabei haben wir anzunehmen, daß die Funktion für die Begrenzungslinien, soweit sie einem bestimmten Rechteck angehören, bestimmte Werte besitzt, daß diese Werte aber für die verschiedenen Rechtecke verschiedene sein können. Hieraus folgt von selbst, daß die Funktion überall endlich sein muß.

Auf diese Funktionen allein sollen die folgenden Betrachtungen sich beziehen, für sie soll der Grenzwert:

$$\lim_{m=\infty,\ n=\infty} S_{2m+1,\,2n+1}$$

bestimmt werden, wenn die Koeffizienten in der angegebenen Weise durch Doppelintegrale dargestellt sind.

Wir können die Größe S in anderer Weise schreiben.

In der Tat, ersetzen wir die Koeffizienten durch die entsprechenden Doppelintegrale, so wird die Summe selbst gleich $\frac{1}{\pi^2}$ sein, multipliziert mit einem Doppelintegral, erstreckt über das Quadrat $-\pi, -\pi;\ \pi, \pi$. Die zu integrierende Funktion stellt sich als Produkt dar und zwar von $f(u, v)$ und den beiden Ausdrücken:

$$\tfrac{1}{2} + \cos(u-x) + \cos 2(u-x) + \cdots \cos m(u-x),$$
$$\tfrac{1}{2} + \cos(v-y) + \cos 2(v-y) + \cdots \cos n\,(v-y).$$

Erwägen wir die bekannte Relation:

$$\cos w + \cos 2w + \cdots \cos rw = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(2r+1)\frac{w}{2}}{\sin\frac{w}{2}},$$

so folgt, daß wir schreiben können:

$$(2)\qquad S_{2m+1,\,2n+1} = \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u, v)\,A_m(u-x)\,A_n(v-y)\,du\,dv,$$

wobei wir nach Herrn C. Neumann die Bezeichnung eingeführt haben:

$$(3)\qquad A_r(w) = \frac{1}{2\pi}(1 + 2\cos w + \cdots 2\cos rw).$$

Hiermit haben wir unser Problem folgendermaßen normiert:

Für die definierten Funktionen soll der Grenzwert des Ausdruckes:

$$S_{2m+1,2n+1} = \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u,v) A_m(u-x) A_n(v-y)\,du\,dv$$

für $m = \infty$, $n = \infty$ *bestimmt werden.*

§ 5.

Entwickelung eines zweiten Mittelwertsatzes für Doppelintegrale.[1])

Die reichhaltige Literatur über den zweiten Mittelwertsatz für einfache Integrale findet sich in einer Arbeit von Herrn Pringsheim in den Berichten der Akademie zu München aus dem Jahre 1900 zusammengestellt und kritisch beleuchtet vor. Ebendaselbst wird der Mittelwertsatz in der allgemeinsten Form dargestellt, die er bisher gefunden hat.

Wir wollen nun den analogen Satz für Doppelintegrale entwickeln und zwar so weit, als es für die folgende Theorie der Fourierschen Reihen notwendig ist, wobei bemerkt sei, daß eine Reihe von Verallgemeinerungen ohne Schwierigkeiten vorgenommen werden können. Im übrigen werde auf die citierte Arbeit von Herrn C. Neumann werwiesen.

1) Nach Fertigstellung der Arbeit bin ich durch die Freundlichkeit von Herrn Stolz zur Kenntnis eines Aufsatzes von Herrn Arzelà aus dem vorigen Jahre gekommen, welcher sich in den Memorie della Acc. delle Scienze dell' Istituto di Bologna befindet. In dieser interessanten Arbeit ist ein allgemeiner Mittelwertsatz für Doppelintegrale abgeleitet, welcher von den von mir gebrauchten Ungleichungen

$$f(x+\varepsilon, y+\varepsilon') - f(x+\varepsilon, y) - f(x, y+\varepsilon') + f(x,y) \gtrless 0$$

absieht und sich von großer Wichtigkeit für die Theorie der Doppelintegrale zeigen dürfte. Als allgemeinster zweiter Mittelwertsatz dürfte derselbe freilich auch nicht zu bezeichnen sein, da er u. a. das gleichzeitige Fallen resp. Steigen der Funktion $f(x, y)$ in der Richtung der positiven Achsen voraussetzt. Verfasser hofft, auf diesen Punkt bei anderer Gelegenheit zurückkommen zu können.

Es seien zwei Funktionen $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ vorgelegt, die in dem Rechteck $a, b; a_1, b_1$ oder $A_0 B_0 C_0 D_0$ abteilungsweise stetig sind.[1]) Hieraus folgt, daß unser Flächenstück durch Parallele zu den Achsen in Flächenstücke derart zerlegt werden kann, daß $f(x, y)$ in jedem stetig ist. Wir wollen nun durch weitere Parallelen zu den Achsen, durch die Linien y_β und x_α die Flächenstücke in elementare Flächenstücke $t_{\alpha\beta}$ derart zerlegen, daß die größte Schwankung für ein jedes solches Stück kleiner ist, als eine beliebig klein vorgelegte positive Größe δ beträgt. Den Wert, den die Funktion im linken unteren Eckpunkt eines jeden solchen Rechtecks annimmt, wollen wir durch $C_{\alpha\beta}$ bezeichnen, dann wird die Differenz:

$$f(x, y) - C_{\alpha\beta}$$

vom Zeichen abgesehen in den einzelnen Flächenstücken stets kleiner als δ sein.

Wir führen ferner eine Hilfsfunktion $F(x, y)$ ein, welche in den einzelnen Flächenstücken, wie sie definiert worden sind, die resp. konstanten Werte $C_{\alpha\beta}$ besitzen soll und setzen:

$$f(x, y) = F(x, y) + g(x, y)$$

Vermöge der gemachten Annahme ist dann $g(x, y)$ im ganzen Rechteck $a, b; a_1, b_1$ vom Zeichen abgesehen kleiner als δ.

Wir betrachten jetzt das Doppelintegral der Funktion:

$$f(x, y)\,\varphi(x, y)$$

erstreckt über das vorgelegte Rechteck. Wir können dasselbe in der Form darstellen:

$$(2) \qquad P = \sum\sum P_{\alpha\beta},$$

wenn wir unter $P_{\alpha\beta}$ das Doppelintegral unserer Funktion erstreckt über die Fläche des Rechtecks $x_\alpha, y_\beta; x_{\alpha+1}, y_{\beta+1}$ verstehen und die Doppelsumme in bekannter Weise nehmen. Wir wollen uns nun die Funktion $f(x, y)$ durch die Summe

$$F(x, y) + g(x, y)$$

ersetzt denken, dann wird auch P als Summe zweier Ausdrücke dargestellt werden können. Denjenigen Summanden, der sich auf die Funktion $F(x, y)$ bezieht, bezeichnen wir durch Q, dann kann geschrieben werden:

$$(3) \qquad Q = \sum\sum C_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}.$$

1) Vergl. die Definition S. 175 f.

In dieser Gleichung bedeutet $Q_{\alpha\beta}$ den Wert des Doppelintegrales der Funktion $\varphi(x, y)$ erstreckt über das Rechteck x_α, y_β; $x_{\alpha+1}$, $y_{\beta+1}$ oder also es ist:

$$(4) \qquad Q_{\alpha\beta} = \int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}} \int_{y_\beta}^{y_{\beta+1}} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Mit diesem Doppelintegral wollen wir uns zunächst beschäftigen. Wir können dasselbe zerlegen. Es ist:

$$Q_{\alpha\beta} = \int_{x_\alpha}^{a_1}\int_{y_\beta}^{b_1} - \int_{x_{\alpha+1}}^{a_1}\int_{y_\beta}^{b_1} - \int_{x_\alpha}^{a_1}\int_{y_{\beta+1}}^{b_1} + \int_{x_{\alpha+1}}^{a_1}\int_{y_{\beta+1}}^{b_1}$$

oder auch:

$$Q_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta} - J_{\alpha+1\,\beta} - J_{\alpha\,\beta+1} + J_{\alpha+1\,\beta+1},$$

wobei gesetzt ist:

$$(5) \qquad J_{\alpha\beta} = \int_{x_\alpha}^{a_1}\int_{y_\beta}^{b_1} \varphi(x, y)\, dx\, dy \quad \text{etc.}$$

Für die Grenzlagen modifizieren sich die Resultate in einfacher Weise.

Unter solchen Umständen erhalten wir für Q den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&C_{00}(J_{00} - J_{10} - J_{01} + J_{11}) + C_{01}(J_{01} - J_{11} - J_{02} + J_{12}) + \cdots C_{0q}(J_{0q} - J_{1q}) \\
&+ C_{10}(J_{10} - J_{20} - J_{11} + J_{21}) + C_{11}(J_{11} - J_{21} - J_{12} + J_{22}) + \cdots C_{1q}(J_{1q} - J_{2q}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ C_{p0}(J_{p0} - J_{p1}) \qquad + C_{p1}(J_{p1} - J_{p2}) \qquad + \cdots C_{pq} J_{pq}.
\end{aligned}$$

Auf die Bedeutung der Zahlen p und q braucht nicht näher eingegangen zu werden. Die Summe kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
&J_{00} C_{00} + J_{01}(C_{01} - C_{00}) + J_{02}(C_{02} - C_{01}) + \cdots J_{0q}(C_{0q} - C_{0q-1}) \\
&+ J_{10}(C_{10} - C_{00}) + J_{11}(C_{11} - C_{10} - C_{01} + C_{00}) + \cdots J_{1q}(C_{1q} - C_{1q-1} - C_{0q} + C_{0q-1}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ J_{p0}(C_{p0} - C_{p-10}) \qquad + \cdots J_{pq}(C_{pq} - C_{pq-1} - C_{p-1q} + C_{p-1q-1}).
\end{aligned}$$

Es ist der allgemeine Faktor von $J_{\alpha\beta}$:

$$C_{\alpha\beta} - C_{\alpha-1\,\beta} - C_{\alpha\,\beta-1} + C_{\alpha-1\,\beta-1},$$

mit Ausnahme der Faktoren in der ersten Horizontal- und Vertikalreihe.

Wir machen nun die Annahme, daß die Differenzen:

$$\begin{array}{ll} C_{\alpha 0} - C_{\alpha-1 0} & (\alpha : 1, \cdots p) \\ C_{0\beta} - C_{0\beta-1} & (\beta : 1, \ldots q) \\ C_{\alpha\beta} - C_{\alpha-1\beta} - C_{\alpha\beta-1} + C_{\alpha-1\beta-1} & \end{array}$$

entweder der Null gleich werden oder aber das Zeichen, welches sie für einen Wert von α resp. β resp. α und β besitzen, für die übrigen möglichen Werte derselben Größen beibehalten.

Dann können wir unsere Summe schreiben:

$$Q = J_{00} C_{00} + M_1 (C_{p0} - C_{00}) + M_2 (C_{0q} - C_{00}) \\ + M_3 (C_{pq} - C_{p0} - C_{0q} + C_{00}),$$

wobei M_1 einen Mittelwert der Größen $J_{\alpha 0}$, M_2 einen solchen der Größen $J_{0\beta}$ und endlich M_3 einen Mittelwert der Größen $J_{\alpha\beta}$ darstellt.

Nun haben die Größen J die Werte:

$$J_{00} = \int_a^{a_1}\int_b^{b_1}, \quad J_{\alpha 0} = \int_{x_\alpha}^{a_1}\int_b^{b_1}, \quad J_{0\beta} = \int_a^{a_1}\int_{y_\beta}^{b_1}, \quad J_{\alpha\beta} = \int_{x_\alpha}^{a_1}\int_{y_\beta}^{b_1},$$

wobei die Integration sich in allen Fällen auf die Funktion $\varphi(x, y)$ bezieht und die Punkte x_α, y_β im Innern des Rechtecks a, b; a_1, b_1 gelegen sind. Die Theorie der Doppelintegrale, die Stetigkeit derselben im vorliegenden Falle aufgefaßt als Funktion der stetigen unteren Grenzen lehrt dann, daß wir die Mittelwerte schreiben können:

$$M_1 = \int_\xi^{a_1}\int_b^{b_1}, \quad M_2 = \int_a^{a_1}\int_\eta^{b_1}, \quad M_3 = \int_{\xi_1}^{a_1}\int_{\eta_1}^{b_1},$$

wobei die Größen ξ Mittelwerte zwischen a und a_1, die Größen η Mittelwerte zwischen b und b_1 bedeuten. Der Symmetrie halber wollen wir an Stelle von J_{00} noch setzen M_0.

Damit haben wir Q in die zum endgültigen Schlusse passende Form gebracht.

Um das ursprüngliche Doppelintegral der Funktion $f\varphi$ zu untersuchen, muß jetzt noch das Doppelintegral der Funktion φg in Betracht gezogen werden. Es ist aber klar, daß dasselbe durch geeignete Wahl von δ vom Zeichen abgesehen kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig klein vorgelegte Größe δ' beträgt.

δ kann nun beliebig klein angenommen werden. Unter solchen Umständen sind wir berechtigt, das Integral, welches sich auf die Funktion $g\varphi$ bezieht, einfach fortzulassen, ferner dürfen wir an Stelle von C_{00}, C_{p0}, C_{0q}, C_{pq} der Reihe nach setzen: $f(a, b)$, $f(a_1, b)$, $f(a, b_1)$, $f(a_1, b_1)$, sodaß wir für das Integral:

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx\,dy$$

den Ausdruck erhalten:

$$M_0 f(a, b) + M_1 (f(a_1, b) - f(a, b)) + M_2 (f(a, b_1) - f(a, b)) \\ + M_3 (f(a_1, b_1) - f(a_1, b) - f(a, b_1) + f(a, b)).$$

Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Bedingungen, denen die Funktion $f(x, y)$ Genüge leisten muß, in eine passendere Form zu bringen.

Die Differenzen:

$$C_{\alpha 0} - C_{\alpha - 1 0}$$

werden bei immer kleiner werdenden Einteilungen jedenfalls Null oder das einmal feststehende Zeichen beibehalten, wenn dasselbe für die Differenzen:

$$f(x, b) - f(x - \varepsilon, b)$$

gilt. Dabei ist ε eine positive von Null verschiedene beliebig kleine Größe, die so gewählt werden muß, daß neben dem Punkte x auch der Punkt $x - \varepsilon$ auf der Linie $A_0 D_0$ gelegen sein muß.

In analoger Weise werden die Differenzen:

$$C_{0\beta} - C_{0\beta - 1}$$

die genannten Eigenschaften erfüllen, wenn die Differenzen:

$$f(a, y) - f(a, y - \varepsilon')$$

es tun. Daher ist ε' eine positive von Null verschiedene beliebig kleine Größe, die so gewählt sein muß, daß neben dem Punkte y auch der Punkt $y - \varepsilon'$ auf der Linie $A_0 B_0$ gelegen sein muß.

Endlich werden die Ungleichungen:

$$C_{\alpha\beta} - C_{\alpha-1\beta} - C_{\alpha\beta-1} + C_{\alpha-1\beta-1} \geqq 0 \text{ resp.}$$
$$C_{\alpha\beta} - C_{\alpha-1\beta} - C_{\alpha\beta-1} + C_{\alpha-1\beta-1} \leqq 0$$

erfüllt sein, wenn die Ungleichungen:

$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) - f(x, y - \varepsilon') + f(x - \varepsilon, y - \varepsilon') \geqq 0 \text{ resp.}$$

$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) - f(x, y - \varepsilon') + f(y - \varepsilon, y - \varepsilon') \leqq 0$$

beständig erfüllt sind. Dabei bedeuten ε und ε' beliebig kleine positive Größen, die so gewählt sein müssen, daß neben x, y auch die Punkte $x - \varepsilon, y$; $x, y - \varepsilon'$; $x - \varepsilon, y - \varepsilon'$ im Innern oder auf den Seiten des Rechtecks $A_0 B_0 C_0 D_0$ gelegen sind.

Wir wollen die Ausdrücke:

$$f(x, b) - f(x - \varepsilon, b), \quad f(a, y) - f(a, y - \varepsilon')$$

$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) - f(x, y - \varepsilon') + f(x - \varepsilon, y - \varepsilon')$$

resp. bezeichnen durch D_x, D_y, D_{xy}, dann erhalten wir den folgenden

Lehrsatz: Versteht man unter $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ zwei Funktionen, die im vorgelegten Rechteck $A_0 B_0 C_0 D_0$ abteilungsweise stetig sind und setzt voraus, daß die Ausdrücke D_x, D_y, D_{xy} ihr Zeichen nicht ändern — die Null eingeschlossen[1]*), so kann das Integral:*

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

durch die Summe ersetzt werden;

$$M_0 f(a, b) + M_1 (f(a_1, b) - f(a, b)) + M_2 (f(a, b_1) - f(a, b))$$
$$+ M_3 (f(a_1, b_1) - f(a_1, b) - f(a, b_1) + f(a, b)),$$

wobei unter M_0, M_1, M_2, M_3 die vorhin angegebenen Integrale zu verstehen sind.

Es möge noch mit wenigen Worten auf die verschiedenen Möglichkeiten eingegangen werden, die in diesem Satze angedeutet sind.

Nehmen wir an, daß die beiden Funktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(y)$ im vorgelegten Rechteck stets positive Werte besitzen, daß ferner stets die Ungleichheiten bestehen:

$$\psi_1(x) - \psi_1(x - \varepsilon) \geqq 0,$$
$$\psi_2(y) - \psi_2(y - \varepsilon') \geqq 0,$$

1) Es soll z. B. vorausgesetzt werden, daß D_x entweder stets $\geqq 0$, oder aber stets $\leqq 0$ bleibt. Und gleiches soll vorausgesetzt werden über D_y und D_{xy}.

so wird die Funktion:

$$f(x, y) = \psi_1(x)\psi_2(y)$$

die Ungleichungen befriedigen:

$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) \geqq 0, \qquad f(x, y) - f(x, y - \varepsilon') \geqq 0,$$
$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) - f(x, y - \varepsilon') + f(x - \varepsilon, y - \varepsilon') \geqq 0.$$

Nehmen wir zweitens an, daß

$$\psi_1(x) - \psi_1(x - \varepsilon) \leqq 0,$$
$$\psi_2(y) - \psi_2(y - \varepsilon') \leqq 0$$

sei, so folgen für $f(x, y)$ die Ungleichungen:

$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) \leqq 0, \qquad f(x, y) - f(x, y - \varepsilon') \leqq 0,$$
$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) - f(x, y - \varepsilon') + f(x - \varepsilon, y - \varepsilon') \geqq 0.$$

Drittens sei:

$$\psi_1(x) - \psi_1(x - \varepsilon) \leqq 0,$$
$$\psi_2(y) - \psi_2(y - \varepsilon') \geqq 0,$$

so folgen die Beziehungen:

$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) \leqq 0, \qquad f(x, y) - f(x, y - \varepsilon') \geqq 0,$$
$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) - f(x, y - \varepsilon') + f(x - \varepsilon, y - \varepsilon') \leqq 0.$$

In ähnlicher Weise würde der vierte Fall zu behandeln sein, in welchem:

$$\psi_1(x) - \psi_1(x - \varepsilon) \geqq 0,$$
$$\psi_2(y) - \psi_2(y - \varepsilon') \leqq 0$$

ist. Nehmen wir ferner an, daß $\psi_1(x)$ resp. $\psi_2(y)$ negative Werte annehmen kann, so ergeben sich weitere Möglichkeiten.

Wir können aber auch Funktionen von x und y in Betracht ziehen, die sich nicht als Produkt einer Funktion von x und einer Funktion von y darstellen lassen, um uns über die Mannigfaltigkeit der Fälle ins Klare zu kommen. Nehmen wir dazu die Funktion:

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y},$$

wobei wir x und y als positive Größen voraussetzen wollen, so folgt:

$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) < 0, \qquad f(x, y) - f(x, y - \varepsilon') < 0,$$
$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) - f(x, y - \varepsilon') + f(x - \varepsilon, y - \varepsilon') > 0.$$

Legen wir zweitens die Funktion zu Grunde:

$$f(x, y) = \frac{1}{x - y},$$

wobei wieder x und y zwei positive Größen sein sollen und zwar $x \lesseqgtr y$, so folgt:

$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) < 0, \qquad f(x, y) - f(x, y - \varepsilon') > 0,$$

ferner

$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) - f(x, y - \varepsilon') + f(x - \varepsilon, y - \varepsilon') > 0,$$

wenn $x - y$ negativ, dagegen:

$$f(x, y) - f(x - \varepsilon, y) - f(x, y - \varepsilon') + f(x - \varepsilon, y - \varepsilon') < 0,$$

wenn das Zeichen von $x - y$ das positive ist.

Weitere Fälle liefern die Funktionen:

$$\frac{1}{-x + y}, \qquad \frac{1}{-x - y}.$$

Der allgemeine Lehrsatz kann nun unter spezialisierenden Annahmen in andere spezielle Formen gebracht werden, von welchen wir zwei herausgreifen wollen.

Wir wollen erstens die Annahme machen, daß die Vorzeichen der drei Größen D_x, D_y, D_{xy} die nämlichen seien, dann erhalten wir den

Lehrsatz: Haben die drei Ausdrücke D_x, D_y, D_{xy} dasselbe Zeichen, die Null eingeschlossen[1]) *und gelten im übrigen die Voraussetzungen des vorigen Lehrsatzes, so ergibt sich für das Integral:*

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx\,dy$$

die Darstellung

$$f(a, b)\int_a^{a_1}\int_b^{b_1}\varphi(x, y)\,dx\,dy + (f(a_1, b_1) - f(a, b))\int_\xi^{a_1}\int_\eta^{b_1}\varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

wobei ξ und η Mittelwerte zwischen a und a_1 resp. b und b_1 bedeuten.

Zweitens wollen wir die weitere Voraussetzung treffen, daß die Größe $f(a, b)$ entweder Null sei oder aber das gemeinsame Zeichen der Ausdrücke D_x, D_y, D_{xy} besitze, so folgt der

---

1) Vergl. die Note S. 182.

Lehrsatz: Haben die Ausdrücke $f(a, b)$, D_x, D_y, D_{xy} das nämliche Zeichen, die Null eingeschlossen und gelten im übrigen die früher angegebenen Voraussetzungen, so findet die Beziehung statt:

$$\int\limits_a^{a_1}\int\limits_b^{b_1} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx\,dy = f(a_1, b_1)\int\limits_\xi^{a_1}\int\limits_\eta^{b_1}\varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

wobei ξ und η Mittelwerte zwischen a und a_1 resp. b und b_1 bedeuten.

§ 6. Summierung der allgemeinen Fourierschen Reihe zweier veränderlicher Größen.

Die Neumannsche Methode der Summierung der Fourierschen Reihe einer veränderlichen Größe beruht einerseits auf dem zweiten Mittelwertsatz für einfache Integrale, andererseits auf einigen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, insbesondere sind es die folgenden Ungleichungen, die in Betracht kommen:

I $$\left|\int\limits_a^{a_1} A_m(u)\,du\right| < 2\pi,$$

falls die Beziehungen bestehen:

$$0 \leqq a \leqq a_1 \leqq \pi,$$

II $$\left|\int\limits_a^{a_1} A_m(u)\,du\right| < \frac{2}{m\pi\sin\frac{1}{2}a},$$

falls die Beziehungen bestehen:

$$0 < a \leqq a_1 \leqq \pi.$$

Der Satz, welcher im Gebiete der Funktionen zweier veränderlicher Größen dem Mittelwertsatz der einfachen Integrale entspricht, ist abgeleitet worden, ebenso einfach können die den Ungleichungen I und II entsprechenden Beziehungen entwickelt werden.

Setzen wir den absoluten Betrag des Integrales:

$$\int\limits_a^{a_1}\int\limits_b^{b_1} A_m(u)A_n(v)\,du\,dv$$

gleich A_{mn}, so ist:

I $$A_{mn} < 4\pi^2,$$

falls die Ungleichungen bestehen:

$$0 \leqq a \leqq a_1 \leqq \pi,$$
$$0 \leqq b \leqq b_1 \leqq \pi.$$

II $$A_{mn} < \frac{4}{m \sin \frac{1}{2} a},$$

falls die Beziehungen stattfinden:

$$0 < a \leqq a_1 \leqq \pi,$$
$$0 \leqq b \leqq b_1 \leqq \pi.$$

III $$A_{mn} < \frac{4}{n \sin \frac{1}{2} b},$$

wenn die Ungleichungen bestehen:

$$0 \leqq a \leqq a_1 \leqq \pi,$$
$$0 < b \leqq b_1 \leqq \pi.$$

IV $$A_{mn} < \frac{4}{mn\pi^2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b},$$

wenn für die Größen a und b die Beziehungen existieren:

$$0 < a \leqq a_1 \leqq \pi,$$
$$0 < b \leqq b_1 \leqq \pi.$$

Als Problem der Fourierschen Reihen normierten wir das Problem, den Grenzwert von:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u, v) A_m(u - x) A_n(v - y) du dv$$

unter den gegebenen Bedingungen für $m = \infty$ und $n = \infty$ zu bestimmen. Wir wollen die Funktion f noch weiteren Bedingungen unterwerfen, indem wir annehmen, daß das Quadrat $-\pi, -\pi; \pi, \pi$ durch Parallelen zur x- und zur y-Achse in eine endliche Anzahl von Rechtecken derart geteilt werden kann, daß die Größen D_x, D_y, D_{xy} Werte besitzen, die innerhalb eines jeden solchen Rechtecks ihr Zeichen nicht ändern. Wir wollen das kurz so ausdrücken: Die Größen D_x, D_y, D_{xy} *ändern abteilungsweise ihr Zeichen nicht,* oder auch die Größen D_x, D_y, D_{xy} behalten abteilungsweise ihr Zeichen bei.

Der Einfachheit halber wollen wir uns zunächst $x = y = 0$ gesetzt denken, uns also auf die Betrachtung des Integrales beschränken:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \Lambda_m(u) \Lambda_n(v)\, du\, dv.$$

Dieselbe zerlegen wir in die Summe von vier Integralen:

$$\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\int_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}.$$

Wir wollen nun Linien $x = u_1$, $x = u_2$ etc., $y = v_1$, $y = v_2$ etc. ($u_1, u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$ der Größe nach geordnet) derart ziehen, daß das Quadrat $0, 0; \pi, \pi$ in Rechtecke geteilt wird, in welchen die Größen D_x, D_y, D_{xy} ihr Zeichen nicht ändern. Überdies ziehen wir die Linien $x = u_0$, $y = v_0$, vorausgesetzt, daß die Ungleichungen bestehen:

$$0 < u_0 < u_1, \quad 0 < v_0 < v_1.$$

Unter diesen Voraussetzungen können wir schreiben:

$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(u, v) \Lambda_m(u) \Lambda_n(v)\, du\, dv = \sum\sum T_{\alpha\beta},$$

wobei unter $T_{\alpha\beta}$ die Integrale über die einzelnen Rechtecke zu verstehen sind und die Summe über alle Rechtecke zu erstrecken ist, in die wir das Quadrat $0, 0; \pi, \pi$ geteilt haben.

Die Größen $T_{\alpha\beta}$ zerfallen in vier verschiedene Arten:

I $$\int_{0}^{u_0}\int_{0}^{v_0} f(u, v) \Lambda_m(u) \Lambda_n(v)\, du\, dv.$$

Nach dem Mittelwertsatze können wir dieses Integral schreiben:

$$f(0, 0)\int_{0}^{u_0}\int_{0}^{v_0} + (f(u_0, 0) - f(0, 0))\int_{\xi}^{u_0}\int_{0}^{v_0} + (f(0, v_0) - f(0, 0))\int_{0}^{u_0}\int_{\eta}^{v_0}$$
$$+ (f(u_0, v_0) - f(u_0, 0) - f(0, v_0) + f(0, 0))\int_{\xi_1}^{u_0}\int_{\eta_1}^{v_0},$$

wobei die Doppelintegrale sich auf die Funktionen $A_m(u)A_n(v)$ beziehen und ξ, η, ξ_1, η_1 die früher definierten Mittelwerte bedeuten.

Eine zweite Kategorie von Integralen hat die Form:

$$\text{II} \qquad \int_0^{u_0}\int_{v_\beta}^{v_{\beta+1}} f(u, v) A_m(u) A_n(v) du dv,$$

wobei v_β jedenfalls von Null verschieden ist. Nach dem Mittelwertsatze folgt, daß wir das Integral schreiben können:

$$f(0, v_\beta)\int_0^{u_0}\int_{v_\beta}^{v_{\beta+1}} + (f(u_0, v_\beta) - f(0, v_\beta))\int_\xi^{u_0}\int_{v_\beta}^{v_{\beta+1}}$$

$$+ (f(0, v_{\beta+1}) - f(0, v_\beta))\int_0^{u_0}\int_\eta^{v_{\beta+1}}$$

$$+ (f(u_0, v_{\beta+1}) - f(u_0, v_\beta) - f(0, v_{\beta+1}) + f(0, v_\beta))\int_{\xi_1}^{u_0}\int_{\eta_1}^{v_{\beta+1}},$$

wobei die Größen η und η_1 jedenfalls größer sind als Null.

Nennen wir die obere Grenze des absoluten Betrages von $f(u, v)$ im Quadrat $0, 0; \pi, \pi : M$, so folgt, daß unser Integral dem absoluten Betrage nach kleiner sein muß als:

$$\frac{36\, M}{n \sin \frac{1}{2} v_\beta},$$

also erst recht kleiner als:

$$\frac{36\, M}{n \sin \frac{1}{2} v_0}.$$

Ene dritte Kategorie von Integralen hat die Form:

$$\text{III} \qquad \int_{u_\alpha}^{u_{\alpha+1}}\int_0^{v_0} f(u, v) A_m(u) A_n(v) du dv.$$

Mit ihnen kann ähnlich verfahren werden, wie im Falle II. Ein jedes solches Integral ist dem absoluten Betrage nach kleiner als:

$$\frac{36\, M}{m \sin \frac{1}{2} v_0}.$$

Endlich hat eine vierte Kategorie von Integralen die Form:

$$\text{IV} \qquad \int\limits_{u_\alpha}^{u_{\alpha+1}} \int\limits_{v_\beta}^{v_{\beta+1}} f(u, v) \Lambda_m(u) \Lambda_n(v) du dv,$$

wobei sowohl u_α als auch v_β von Null verschieden ist. Nach dem Mittelwertsatz kann ein jedes solches Integral geschrieben werden:

$$f(u_\alpha, v_\beta) \int\limits_{u_\alpha}^{u_{\alpha+1}} \int\limits_{v_\beta}^{v_{\beta+1}} + (f(u_{\alpha+1}, v_\beta) - f(u_\alpha, v_\beta)) \int\limits_{\xi}^{u_{\alpha+1}} \int\limits_{v_\beta}^{v_{\beta+1}}$$

$$+ (f(u_\alpha, v_{\beta+1}) - f(u_\alpha, v_\beta)) \int\limits_{u_\alpha}^{u_{\alpha+1}} \int\limits_{\eta}^{v_{\beta+1}}$$

$$+ (f(u_{\alpha+1}, v_{\beta+1}) - f(u_{\alpha+1}, v_\beta) - f(u_\alpha, v_{\beta+1}) + f(u_\alpha, v_\beta)) \int\limits_{\xi_1}^{u_{\alpha+1}} \int\limits_{\eta_1}^{v_{\beta+1}},$$

wobei nunmehr die Größen ξ, η, ξ_1, η_1 von Null verschieden sind. Hieraus folgt dann, daß der absolute Betrag dieses Integrales jedenfalls kleiner ist als:

$$\frac{36 M}{\pi^2 m n \sin \frac{1}{2} u_0 \sin \frac{1}{2} v_0}.$$

Die Zahl der Integrale in einer jeden Kategorie ist eine endliche. In der ersten befindet sich ein einziges, in der zweiten möge die Anzahl μ, in der dritten ν sein, dann ist sie in der dritten gleich $\mu\nu$, und wir erhalten, daß die Summe der Integrale der drei letzten Kategorien kleiner ist als:

$$\frac{36 \mu M}{n \sin \frac{1}{2} v_0} + \frac{36 \nu M}{m \sin \frac{1}{2} u_0} + \frac{36 \mu \nu M}{\pi^2 m n \sin \frac{1}{2} u_0 \sin \frac{1}{2} v_0}.$$

Die Wahl von u_0, v_0 ist innerhalb der gegebenen Grenzen eine willkürliche. Wir können und wollen sie so klein wählen, daß die Ausdrücke:

$$f(u_0, 0) - f(0, 0), \qquad f(0, v_0) - f(0, 0),$$
$$f(u_0, v_0) - f(u_0, 0) - f(0, v_0) + f(0, 0),$$

die im ersten Integrale auftreten, vom Zeichen abgesehen, kleiner werden, als eine beliebig klein vorgelegte positive Größe beträgt.

Die Faktoren dieser Ausdrücke sind jedenfalls unter einer und derselben festen endlichen Grenze, vom Zeichen abgesehen. Wir können also u_0, v_0 so klein wählen, daß die Summe:

$$(f(u_0, 0) - f(0, 0))\int_\xi^{u_0}\int_0^{v_0} + (f(0, v_0) - f(0, 0))\int_0^{u_0}\int_\eta^{v_0}$$

$$+ (f(u_0, v_0) - f(u_0, 0) - f(0, v_0) + f(0, 0))\int_{\xi_1}^{u_0}\int_{\eta_1}^{v_0}$$

vom Zeichen abgesehen, kleiner bleibt, als eine beliebig klein vorgelegte Größe η beträgt.

Halten wir einen Wert von u_0, v_0 fest, so kann für m und n eine Grenze G derart gefunden werden, daß für alle m und n, die größer sind als G, ein jeder der drei Ausdrücke:

$$\frac{36\mu M}{n \sin\frac{1}{2}v_0}, \quad \frac{36\nu M}{m \sin\frac{1}{2}u_0}, \quad \frac{36\mu\nu M}{\pi^2 m n \sin\frac{1}{2}u_0 \sin\frac{1}{2}v_0}$$

kleiner wird als η.

Das Integral:

$$\int_0^\pi\int_0^\pi f(u, v)\,A_m(u)\,A_n(v)\,du\,dv.$$

unterscheidet sich dann von

$$f(0, 0)\int_0^{u_0}\int_0^{v_0} A_m(u)\,A_n(v)\,du\,dv$$

jedenfalls um weniger als 4η. Lassen wir nun u_0, v_0 immer kleiner und kleiner werden und demgemäß m und n in der angegebenen Weise immer größer und größer, so nähert sich der letzte Ausdruck bekanntlich dem Grenzwerte:

$$\frac{f(0, 0)}{4}.$$

Aus der Art, wie wir u_0, v_0 gewählt haben, folgt, daß wir den Grenzwert unseres Integrales genauer schreiben können:

$$\frac{f(+0, +0)}{4}.$$

Damit sind wir im wesentlichen zunächst am Ziel, denn die drei anderen Integrale, welche über die Quadrate $0, -\pi$; $\pi, 0$;

$-\pi, 0; 0, \pi; -\pi, -\pi; 0, 0$ zu erstrecken sind, können ganz ähnlich untersucht werden.

Wir erhalten dann den

Lehrsatz: Ist $f(x, y)$ im Quadrate $-\pi, -\pi; \pi, \pi$ abteilungsweise stetig und behalten die Größen D_x, D_y, D_{xy} abteilungsweise ihr Zeichen bei[1]*, so ist die Grenze des Integrales:*

$$(A) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u, v) A_m(u) A_n(v)\, du\, dv$$

für m und n gleich unendlich gleich[2]*):*

$$(B) \quad \tfrac{1}{4}(f(+0, +0) + f(+0, -0) + f(-0, +0) + f(-0, -0)).$$

Damit ist der spezielle Fall $x = 0$, $y = 0$ erledigt. Im allgemeinen Falle gestaltet sich die Betrachtung so ähnlich, daß wir von derselben füglich absehen können. Nebenbetrachtungen sind nur für die Ecken und Seiten des Quadrates $-\pi, -\pi; \pi, \pi$ erforderlich. Wir beschränken uns darauf, einen Eckpunkt, den Eckpunkt π, π gesondert zu betrachten.

Es kommen die vier Integrale in Betracht:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}, \quad -\int_0^{\pi}\int_0^{-\pi}, \quad -\int_0^{-\pi}\int_0^{\pi}, \quad \int_0^{-\pi}\int_0^{-\pi},$$

die sämtlich für die Funktion:

$$f(u, v) A_m(u - \pi) A_n(v - \pi)$$

zu bilden sind. Das erste Integral können wir schreiben:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(-u + \pi, -v + \pi)\, A_m(u)\, A_n(v)\, du\, dv,$$

der Grenzwert desselben ist also:

$$\tfrac{1}{4}(f(\pi - 0, \pi - 0).$$

---

1) Vgl. S. 182.

2) Es ist das nur eine (auch im folgenden beizubehaltende) *abgekürzte Ausdrucksweise.* Eigentlich muß es heißen: *Das Integral (A) konvergiert, falls man $m > G$ und $n > G$ sich denkt und G ins Unendliche anwachsen läßt, gegen eine feste Grenze; und diese feste Grenze hat den in (B) angegebenen Wert.* — Vergl. S. 190.

Das zweite Integral können wir schreiben:

$$\int_0^\pi\int_0^\pi f(-u+\pi,\, v-\pi)\, \Delta_m(u)\, \Delta_n(v)\, du\, dv,$$

der Grenzwert desselben ist also:

$$\tfrac{1}{4}(f(\pi-0,\, -\pi+0).$$

Analog wird der Grenzwert des dritten:

$$\tfrac{1}{4} f(-\pi+0,\, \pi-0)$$

und des vierten:

$$\tfrac{1}{4} f(-\pi+0,\, -\pi+0),$$

also wird der gesuchte Grenzwert selbst:

$$\tfrac{1}{4}(f(\pi-0,\pi-0)+f(\pi-0,-\pi+0)+f(-\pi+0,\pi-0)+f(-\pi+0,-\pi+0))$$

C_1 B C π A D_1 D π C_2 B_1 C_3

Wir fassen die Resultate zusammen im folgenden Lehrsatz: *Ist $f(x, y)$ im Quadrate $-\pi, -\pi; \pi, \pi$ abteilungsweise stetig und behalten die Größen D_x, D_y, D_{xy} abteilungsweise ihr Zeichen bei, so ist der Grenzwert des Integrales:*

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u, v)\, \Delta_m(u-x)\, \Delta_n(v-y)\, du\, dv$$

für die Eckpunkte C, C_1, C_2, C_3 gleich:

$$\tfrac{1}{4}(f(\pi-0,\pi-0)+f(-\pi+0,\pi-0)+f(\pi-0,-\pi+0)+f(-\pi+0,-\pi+0)),$$

für die übrigen Punkte der Seiten C_1C_2 und CC_3:

$$\tfrac{1}{4}(f(-\pi+0, y+0)+f(\pi-0, y+0) + f(-\pi+0, y-0) + f(\pi-0, y-0)),$$

für die übrigen Punkte der Seiten CC_1 und C_2C_3:

$$\tfrac{1}{4}(f(x+0, -\pi+0)+f(x-0, \pi-0) + f(x-0, -\pi+0) + f(x-0, \pi-0)),$$

für die Punkte im Innern des Quadrates:

$$\tfrac{1}{4}(f(x+0, y+0) + f(x-0, y+0) + f(x+0, y-0) + f(x-0, y-0)).$$

§ 7. Summierung spezieller Fourierscher Reihen.

Neben der allgemeinen Fourierschen Reihe werden noch, wie schon im ersten Paragraphen bemerkt wurde, eine Anzahl mehr

spezieller Reihen betrachtet. Es soll das etwas näher auseinandergesetzt werden. Wir nehmen dazu an, daß eine Funktion $f(x, y)$ der im vorigen Paragraphen näher skizzierten Art nur im Rechteck $-\pi, 0; \pi, \pi$ oder was dasselbe sagt im Rechteck CDD_1C_1 gegeben sei. Dann können wir dieselbe außerhalb des Rechtecks beliebig definieren. Wir wollen zwei Festsetzungen treffen:

(a) Es sei $\qquad f(x, -y) = \quad f(x, y),$

(b) Es sei $\qquad f(x, -y) = -f(x, y).$

In beiden Fällen ist im Rechteck $-\pi, -\pi; \pi, \pi$ je eine Funktion eindeutig definiert.

Wir nehmen den ersten Fall und denken uns die Funktion in eine allgemeine Fouriersche Reihe entwickelt, dann wird:

$$a_{-r,-s} = \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u, v) \cos ru \cos sv \, du \, dv,$$

oder also:

$$a_{-r,-s} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi} f(u, v) \cos ru \cos sv \, du \, dv.$$

Ganz analog nimmt $a_{r,-s}$ die Gestalt an:

$$a_{r,-s} = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(u, v) \sin ru \cos sv \, du \, dv,$$

während die übrig bleibenden Koeffizienten $a_{r,s}$ und $a_{-r,s}$ verschwinden.

Unter solchen Umständen erhalten wir den folgenden *Lehrsatz*: *Ist $f(x, y)$ im Rechteck CDC_1D_1 abteilungsweise stetig und ändern die Größen D_x, D_y, D_{xy} abteilungsweise ihr Zeichen nicht, besitzen ferner die Größen $a_{r,-s}$ und $a_{-r,-s}$ die vorhin angegebenen Werte, so nimmt die Summe:*

$$\sum_{r=0}^{r=m}\sum_{s=0}^{s=n}(a'_{r,-s} \sin rx + a'_{-r,-s} \cos rx) \cos sy$$

für m und n gleich unendlich die folgenden Grenzwerte an:

1) *für die Eckpunkte D, D_1:*

$$\tfrac{1}{2}(f(-\pi + 0, +0) + f(\pi - 0, +0)),$$

2) *für die Eckpunkte* C, C_1:

$$\tfrac{1}{2}(f(-\pi+0,\pi-0)+f(\pi-0,\pi-0)),$$

3) *für die übrigen Punkte von* DD_1:

$$\tfrac{1}{2}(f(x+0,+0)+f(x-0,+0)),$$

4) *für die übrigen Punkte von* CC_1:

$$\tfrac{1}{2}(f(x+0,\pi-0)+f(x-0,\pi-0)),$$

5) *für die übrigen Punkte von* CD *und* C_1D_1:

$$\tfrac{1}{4}(f(-\pi+0,y+0)+f(\pi-0,y+0)+f(-\pi+0,y-0)+f(\pi-0,y-0)),$$

6) *für die Punkte im Innern des Rechtecks*:

$$\tfrac{1}{4}(f(x+0,y+0)+f(x-0,y+0)+f(x+0,y-0)+f(x-0,y-0)).$$

Jetzt machen wir die zweite Annahme:

(b) $$f(x,-y)=-f(x,y).$$

Dann folgt ganz analog wie vorhin:

$$a_{r,s}=\frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi} f(u,v)\sin ru\cos sv\,du\,dv,$$

$$a_{-r,s}=\frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi} f(u,v)\cos ru\sin sv\,du\,dv,$$

während die übrigen Koeffizienten verschwinden.

Unter solchen Umständen erhalten wir den folgenden:

Lehrsatz: Ist $f(x,y)$ *im Rechteck* CDC_1D_1 *abteilungsweise stetig und ändern die Größen* D_x, D_y, D_{xy} *abteilungsweise ihr Zeichen nicht, besitzen ferner die Größen* $a_{r,s}$ *und* $a_{-r,s}$ *die soeben angegebenen Werte, so nimmt die Summe*:

$$\sum_{r=0}^{r=m}\sum_{s=1}^{s=n}(a'_{r,s}\sin rx+a'_{-r,s}\cos rx)\sin sy$$

für m *und* n *gleich unendlich die folgenden Grenzwerte an:*

1) *Für die Seiten* CC_1 *und* DD_1 *den Wert Null,*

2) *Für die übrigen Punkte der Seiten* CD *und* C_1D_1 *die Werte*:

$$\tfrac{1}{4}(f(-\pi+0,y+0)+f(\pi-0,y+0)+f(-\pi+0,y-0)+f(\pi-0,y-0)),$$

3) *Für die Punkte im Innern des Rechtecks die Werte*:

$$\tfrac{1}{4}(f(x+0,y+0)+f(x-0,y+0)+f(x+0,y-0)+f(x-0,y-0)).$$

Ganz analog wäre zu verfahren, wenn die Funktion nur im Rechteck CBB_1C_3 gegeben wäre. Es würde dann nur eine Vertauschung von x und y statt zu finden haben.

Wir wollen jetzt endlich annehmen, daß die Funktion nur im Quadrat $0, 0; \pi, \pi$ oder was dasselbe sagt $ABCD$ gegeben sei. Außerhalb desselben, für die übrigen Punkte des Quadrates $CC_1C_2C_3$ können wir sie dann beliebig definieren. Wir machen vier Annahmen:

(a) $$f(x, -y) = f(x, y),$$
$$f(-x, y) = f(x, y);$$

(b) $$f(x, -y) = -f(x, y),$$
$$f(-x, y) = -f(x, y);$$

(c) $$f(x, -y) = -f(x, y),$$
$$f(-x, y) = f(x, y);$$

(d) $$f(x, -y) = f(x, y),$$
$$f(-x, y) = -f(x, y).$$

In allen vier Fällen ist je eine Funktion im Quadrat $CC_1C_2C_3$ eindeutig definiert.

Im Falle (a) zeigt es sich, daß der Koeffizient $a_{-r,-s}$ die Form annimmt:

$$a_{-r,-s} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f(u, v)\cos ru \cos sv\,du\,dv,$$

während die übrigen Koeffizienten verschwinden.

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Ist $f(x, y)$ im Quadrat $ABCD$ abteilungsweise stetig und ändern die Größen D_x, D_y, D_{xy} abteilungsweise ihr Zeichen nicht, besitzen ferner die Größen $a_{-r,-s}$ die soeben angegebenen Werte, so nimmt die Summe:

$$\sum_{r=0}^{r=m}\sum_{s=0}^{s=n}{}' a_{-r,s}\cos rx \cos sy$$

für m und n gleich unendlich die folgenden Grenzwerte an:

1) *Für den Punkt A den Wert* $f(+0, +0)$,
2) „ „ „ B „ „ $f(+0, \pi-0)$,
3) „ „ „ C „ „ $f(\pi-0, \pi-0)$,
4) „ „ „ D „ „ $f(\pi-0, +0)$,

5) *für die übrigen Punkte der Seite AB:*

$$\tfrac{1}{2}(f(+0, y+0) + f(+0, y-0)),$$

6) *für die übrigen Punkte der Seite AD:*

$$\tfrac{1}{2}(f(x+0, +0) + f(x-0, +0)),$$

7) *für die übrigen Punkte der Seite CD:*

$$\tfrac{1}{2}(f(\pi-0, y+0) + f(\pi-0, y-0)),$$

8) *für die übrigen Punkte der Seite BC:*

$$\tfrac{1}{2}(f(x+0, \pi-0) + f(x-0, \pi-0)),$$

9) *für die Punkte im Innern des Quadrates ABCD:*

$$\tfrac{1}{4}(f(x+0, y+0) + f(x-0, y-0) + f(x+0, y-0) + (f(x-0, y-0)).$$

Damit ist der Fall (a) erledigt.

Wir nehmen jetzt den Fall (b). Für diesen Fall wird:

$$a_{r,s} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f(u, v) \sin ru \sin sv\, du\, dv,$$

während die übrigen Koeffizienten verschwinden.

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Ist $f(x, y)$ im Quadrate ABCD abteilungsweise stetig und ändern die Größen D_x, D_y, D_{xy} abteilungsweise ihr Zeichen nicht, besitzen ferner die Größen $a_{r,s}$ die soeben angegebenen Werte, so nimmt die Summe:

$$\sum_{r=1}^{r=m}\sum_{s=1}^{s=n} a_{r,s} \sin rx \sin sy$$

für m und n gleich unendlich auf den Seiten des Quadrates den Grenzwert Null an, während sie im Innern den Wert besitzt:

$$\tfrac{1}{4}(f(x+0, y+0) + f(x-0, y+0) + f(x+0, y-0) + f(x-0, y-0)).$$

Im Falle (c) wird der Wert von $a_{-r,s}$ gleich:

$$a_{-r,s} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f(u, v) \cos ru \sin sv\, du\, dv,$$

während die übrigen Koeffizienten verschwinden. Er ergibt sich infolgedessen der

Lehrsatz: Ist $f(x, y)$ im Quadrate $ABCD$ abteilungsweise stetig und ändern die Größen D_x, D_y, D_{xy} abteilungsweise ihr Zeichen nicht, besitzen ferner die Größen $a_{-r,s}$ die soeben angegebenen Werte, so nimmt die Summe:

$$\sum_{r=0}^{r=m}\sum_{s=1}^{s=n} a'_{-r,s} \cos rx \sin sy$$

für m und n gleich unendlich die Grenzwerte an:

1) *Für die Seiten AD und BC den Wert Null,*

2) *für die übrigen Punkte der Seite AB:*

$$\tfrac{1}{2}(f(+0, y+0) + f(+0, y-0)),$$

3) *für die übrigen Punkte der Seite CD;*

$$\tfrac{1}{2}(f(\pi-0, y+0) + f(\pi-0, y-0)),$$

4) *für die Punkte im Innern des Quadrates:*

$$\tfrac{1}{4}(f(x+0, y+0) + f(x-0, y-0) + f(x+0, y-0) + f(x-0, y-0)).$$

Der Fall (d) ist ganz analog zu behandeln.

Damit sind auch die speziellen Fälle zu Ende geführt.

Druckfertig erklärt 15. VII. 1908.]

Über einen Versuch, eine Einwirkung ultravioletten Lichts auf den elektrischen Widerstand der Metalle zu finden.

Von

Karl Bädeker.

Auf Veranlassung von Herrn Prof. Wiener unternahm ich es zu untersuchen, ob sich bei Bestrahlung mit ultraviolettem Licht der elektrische Widerstand einer dünnen Metallschicht ändert, um dadurch zu erkennen, inwieweit es sich bei der entladenden Wirkung solchen Lichts auf Metalloberflächen um eine Wirkung auf die elektrischen Eigenschaften des Metalls selbst handeln könnte.

Da ein meßbarer Effekt in dieser Richtung, wie vorausgeschickt sei, *nicht* gefunden wurde, so kann sich dieser Bericht auf eine Beschreibung der Experimente beschränken, ohne die theoretische Möglichkeit der gesuchten Erscheinung zu diskutieren.

Als ultraviolette Lichtquelle diente die 1—2 cm lange Funkenstrecke eines sehr großen Induktoriums zwischen Aluminiumelektroden. Ihr sehr lebhaftes Licht fiel aus möglichst kurzer Entfernung (ca. 4 cm) entweder direkt oder noch durch eine Quarzkugel konzentriert auf die zu untersuchenden Metallschichten, die als durchsichtig dünner Spiegel auf einer Glasunterlage ausgebreitet waren. Diese Metallspiegel bildeten dann einen Zweig einer möglichst empfindlich gemachten (s. u.) Wheatstoneschen Brückenkombination. Sie waren in der Stromrichtung etwa 2 cm lang und quer dazu 1 cm breit; sie wurden stets in ihrer ganzen Ausdehnung bestrahlt. Die Stromzuführung geschah durch aufgesetzte Quecksilbertropfen. Benutzt wurden Platinspiegel von ca. 50 Ohm Widerstand, die auf Glas eingebrannt waren, und ein Spiegel aus Antimon, von 37 Ohm, der als Niederschlag aus einer SbH_3-Flamme auf Glas hergestellt war.

Die sehr merkbare Wirkung der Erwärmung bei der Bestrahlung ließ sich zunächst mit Erfolg durch einen mit dem Wasserstrahlgebläse auf den Spiegel aufgeblasenen Luftstrom beseitigen, oder wenigstens soweit zurückhalten, daß das Galvanometer in der Brücke nur noch eine ganz geringfügige Bewegung zeigte. Jede Wirkung des ultravioletten Lichts sollte nun — und zwar wohl unabhängig von speziellen Vorstellungen darüber — momentan erfolgen, sich also von dieser Wärmewirkung sicher unterscheiden lassen. Um sie zu erkennen, wurde eine dünne Glasplatte, die zu Beginn des Versuchs das ultraviolette Licht abblendete, plötzlich weggezogen, während das Spiel der Funkenstrecke immer in gleicher Weise fortging. Weder bei den Platinspiegeln noch bei dem Antimonspiegel blieb nun ein meßbarer Effekt übrig.

Zum Schluß wurde durch Widerstandsveränderung eines andern Zweigs der Kombination konstatiert, daß eine plötzliche Widerstandsänderung von $5 \cdot 10^{-6}$ des normalen Wertes der Beobachtung nicht entgangen wäre, daß also der gesuchte Effekt unter $^5/_{10000}\,\%$ liegen müßte, wenn er überhaupt vorhanden ist.

Herrn Prof. Wiener sei an dieser Stelle noch der herzlichste Dank für seine freundliche Hilfe bei der Ausführung des beschriebenen Versuches ausgesprochen.

Druckfertig erklärt 7. VIII. 1903.]

SITZUNG VOM 6. JULI 1903.

Der Vorsitzende erinnert an den Verlust des auswärtigen Mitgliedes Geheimrat Dr. Karl Gegenbaur in Heidelberg. Ein an die Witwe ergangenes Beileidschreiben ist von dieser brieflich verdankt worden. Die Bitte des Herrn Dr. Lipps um Erlaubnis zur Benutzung des Fechner-Archives wird bewilligt. Die phil.-hist. Klasse stellt den Antrag, daß sich die math.-phys. Klasse an der Eingabe eines Gesuches an den Herrn Reichskanzler betr. die Schaffung eines wissenschaftl. Postens in Kairo unterschriftlich beteiligen möge. Wird angenommen.

Bei der Geburtstagsfeier S. M. des Königs am 1. August d. J. wird Herr Credner einen Vortrag halten.

Die Herren Prof. Des Coudres und Dr. Feddersen sollen als ordentl. Mitglieder in der nächsten Gesamtsitzung präsentiert werden.

Der Vorschlag eines außerordentl. Mitgliedes durch die Herren Credner und Zirkel wird in der nächsten Sitzung zur Abstimmung kommen.

Es wird die Jahresrechnung für 1902 vorgelegt, sowie die Rechnungen über die Göttinger-, die Härtel- und die Mendestiftung.

Vorträge halten:

Herr Scheibner: Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen, als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie.

Herr O. Fischer: der Gang des Menschen. 5. Teil. Die Kinematik des Beinschwingens.

Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen, als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie.

Von

W. Scheibner.

Auf Grund älterer Vorlesungsaufzeichnungen sollen im Folgenden einige Eigenschaften der linearen Substitutionen, nebst Anwendungen auf die Invariantentheorie der ganzen Funktionen, die Auflösung algebraischer Gleichungen und die Reduktion

elliptischer Differentiale entwickelt werden. Der Verfasser ist dabei weniger von der Absicht ausgegangen, noch unbekannte Sätze oder neue Methoden abzuleiten, sondern wünscht vornehmlich durch die gegebene Darstellung das wissenschaftliche Interesse des Lesers für die betreffenden Gebiete zu wecken und ihm zu einem eingehenderen Studium den Weg zu bahnen. Immerhin glaubt er hoffen zu dürfen, daß trotz des vielfach elementaren Charakters die Arbeit nicht ohne Interesse auch für den erfahrenen Mathematiker sein werde. Der Beurteilung der Fachmänner muß es überlassen bleiben, ob die Vermeidung der symbolischen Methoden, sowie der homogenen Formen, zur Erleichterung des Verständnisses für den Anfänger beizutragen geeignet sein möchte.

I. Die lineare Transformation ganzer Funktionen.

1.

Das der neueren Zeit angehörige Studium der invarianten Eigenschaften der Funktionen ist rasch von hervorragender Wichtigkeit für Analysis und Geometrie geworden. Gleichwohl sind verwandte Betrachtungen den Mathematikern längst geläufig gewesen. Man kann z. B. die Aufgabe der Integralrechnung als ein Problem der Invariantentheorie definieren, denn ein System Differentialgleichungen integrieren heißt nichts anderes, als diejenigen Funktionen aufsuchen, welche konstant, also invariant bleiben, während die Variabeln sich den Bedingungen der Aufgabe gemäß beliebig ändern dürfen.

Sollen z. B. gegebenenfalls die Differentialgleichungen erfüllt werden:

$$dx : dy : dz = x(y^2 - z^2) : y(z^2 - x^2) : z(x^2 - y^2),$$

so bleiben zwei von einander unabhängige Funktionen

$$xyz \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + z^2$$

invariant, welche Werte die Variabeln $x\,y\,z$ auch sonst annehmen mögen. Wenn die Differentialrechnung sich mit den Gesetzen der Veränderlichkeit beschäftigt, so hat im Gegensatz hierzu die Integralrechnung zu untersuchen, was inmitten dieser Variabilität unveränderlich bleibt.

Analoge Probleme bieten sich auf elementarerem Gebiete in der Theorie der ganzen Funktionen, z. B. bei ihrer linearen Transformation: man kann fragen, was bei der dadurch bedingten

Veränderung konstant bleibt. Geometrisch liefert die Transformation der Koordinaten invariante Ausdrücke für die orthogonale Substitution, wenn man bedenkt, daß die Werte

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{oder} \quad r r_1 \cos\varphi = x x_1 + y y_1 + z z_1$$

unabhängig sind von der Richtung des zu Grunde liegenden Koordinatensystems, ebenso wie die bekannten Formeln

$$4\Delta^2 = (y z_1 - z y_1)^2 + (z x_1 - x z_1)^2 + (x y_1 - y x_1)^2$$

und

$$6\Pi = \mathrm{S}x(y_1 z_2 - z_1 y_2) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Diese Ausdrücke bleiben demnach invariant, wenn man die Koordinaten $x\,y\,z\,\ldots$ durch lineare Ausdrücke von der Form

$$ax + by + cz\,, \quad a'x + b'y + c'z\,, \quad a''x + b''y + c''z\,, \; \ldots$$

ersetzt, wobei die neun Koeffizienten den bekannten Bedingungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1\,, \quad aa' + bb' + cc' = 0 \text{ u. s. w.}$$

unterworfen sind.

Als die Ersten, welche in den Jahren 1841—45 auf die Wichtigkeit der einschlagenden Transformationssätze hingewiesen haben, sind neben den Engländern Boole und Cayley, die Deutschen Eisenstein und Hesse zu nennen.[1]) In Betreff des weiteren Ausbaues namentlich der *algebraischen* Invariantentheorie mögen hier nur die Namen Cayley, Hermite, Aronhold[2]),

---

1) Boole, Researches on the theory of analytical Transformations. Cambridge Mathem. Journal Bd. II, 1841. — Boole, Exposition of a general theory of linear transformations (Bd. III u. IV, 1843). — Cayley, On the theory of linear transformations (ibid. Bd. IV, 1845). — Cayley, Sur deux formules données par Mss. Eisenstein et Hesse (Crelles Journal Bd. 29, S. 54). — Eisenstein, Allgemeine Auflösung der Gleichungen von den vier ersten Graden (Crelle Bd. 27, S. 81, 1844). Über eine merkwürdige identische Gleichung (S. 105). Über Ausdrücke, welche bei der Auflösung der kubischen Gleichungen erscheinen (S. 319). — Hesse, Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen (Crelle, Bd. 28, S. 68, 1844).

2) Für die Invariantentheorie der ganzen homogenen Funktionen dürfen wir die Abhandlung von Aronhold *Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie* (Crelles Journal Bd. 62, S. 281—345)

Sylvester. Clebsch, Gordan, Brioschi . . angeführt werden, um das Interesse zu bezeichnen, welches die hervorragendsten Mathematiker dem Gegenstande gewidmet haben. Auch an zusammenfassenden Lehrbüchern fehlt es nicht, wie von Clebsch, Salmon-Fiedler, Faà di Bruno-Nöther, Gordan-Kerschensteiner u. A. In den letzten zwanzig Jahren aber hat die *allgemeine* Invariantentheorie auf den verschiedensten Gebieten Anwendung und ungeahnte Ausdehnung gefunden.

2.

Bevor wir uns zur elementaren Darstellung einiger Fundamentalsätze der Invariantentheorie wenden, wollen wir noch an einige Eigenschaften der linearen Transformationen erinnern, auf welche schon Möbius seine Theorie der *kollinearen*, der *affinen* und der *Kreisverwandtschaft* gegründet hat.

Bei der *kollinearen* Substitution

$$x = \frac{ax' + by' + c}{a_0 x' + b_0 y' + c_0}, \quad y = \frac{a' x' + b' y' + c'}{a_0 x' + b_0 y' + c_0}$$

entspricht jedem Punkte xy der Ebene ein zugeordneter oder *kollinear* verwandter $x'y'$. Aus den Elementen der projektiven Geometrie ist die Invarianz des Möbiusschen Doppelverhältnisses (*ratio bisectionalis*) zwischen je vier in einer Geraden liegenden Punkten bekannt, wie auch leicht auf dem Wege der analytischen Rechnung gefunden wird. Wir schreiben zu diesem Behufe

$$\begin{aligned} \xi x &= ax' + by' + c, & \xi_1 x_1 &= ax_1' + by_1' + c \\ \xi y &= a'x' + b'y' + c, & &\text{u. s. w.,} \\ \xi &= a_0 x' + b_0 y' + c_0, \end{aligned}$$

wo die Koeffizienten um einen beliebigen gemeinsamen Faktor unbestimmt bleiben. Setzt man ferner

$$\lambda = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} A &= b'c_0 - b_0 c', & B &= b_0 c - c_0 b, & C &= bc' - cb', \\ A' &= c'a_0 - c_0 a', & B' &= c_0 a - a_0 c, & C' &= ca' - ac', \\ A_0 &= a'b_0 - a_0 b', & B_0 &= a_0 b - b_0 a, & C_0 &= ab' - ba', \end{aligned}$$

als besonders wichtig bezeichnen, denn obgleich Aronholds Untersuchungen 40—50 Jahre zurückliegen, so sind sie doch in ihren Folgerungen noch keineswegs erschöpft worden.

dann wird

$$\xi' x' = Ax + By + C, \qquad \lambda^2 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A_0 & B_0 & C_0 \end{vmatrix}, \qquad \lambda a = B'C_0 - B_0 C',$$
$$\xi' y' = A'x + B'y + C', \qquad \lambda a' = C'A_0 - C_0 A',$$
$$\xi' = A_0 x + B_0 y + C_0, \qquad \lambda b = B_0 C - C_0 B,$$

u. s. w.

Wählt man nun in der beliebig gelegten x-Achse die Punkte 0, x_1, x_2 und x, denen vermöge der kollinearen Substitution resp. die Punkte $x'_0 y'_0$, $x'_1 y'_1$, $x'_2 y'_2$ und $x'y'$ entsprechen sollen, so liegen die letzteren nicht bloß sämtlich in der Geraden $a'x' + b'y' + c' = 0$, sondern ihr Doppelverhältnis hat den Wert

$$\frac{x_1(x - x_2)}{x_2(x - x_1)} = \frac{\xi_1 x_1 (\xi_2 \cdot \xi x - \xi \cdot \xi_2 x_2)}{\xi_2 x_2 (\xi_1 \cdot \xi x - \xi \cdot \xi_1 x_1)}$$
$$= \frac{x'_0 - x'_1}{x'_0 - x'_2} \cdot \frac{x' - x'_2}{x' - x'_1},$$

wie sich nach Elimination der Koordinaten y' ohne Schwierigkeit ergibt. Wir können also sagen, daß die Funktion

$$X = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x - x_2}{x - x_1}$$

eine Invariante der betreffenden kollinearen Substitution bedeutet. Da nun die gewählten Punkte in einer beliebigen Geraden liegen können, so darf man allgemein das Doppelverhältnis

$$P = \frac{p_0 - p_1}{p_0 - p_2} \cdot \frac{p - p_2}{p - p_1}$$

für je vier einer Geraden angehörige Punkte $p_0\, p_1\, p_2$ und p als kollinear invariant ansehen. Außerdem ist bekannt, daß eine beliebige Vertauschung der vier Punkte untereinander nur zu den sechs Werten

$$P, \quad \frac{1}{P}, \quad 1 - P, \quad \frac{1}{1-P}, \quad \frac{P}{P-1} \quad \text{und} \quad \frac{P-1}{P}$$

führt, welche gleichzeitig invariant sind.

Ferner betrachten wir die lineare Substitution der *affinen* Verwandtschaft:

$$x = ax' + by' + c, \quad y = a'x' + b'y' + c',$$

welche als ein spezieller Fall der kollinearen Substitution für $\xi = 1$ erscheint, und von der schon Möbius gezeigt hat, daß *neben* dem Doppelverhältnis von je vier Punkten in einer Geraden

auch die entsprechenden Flächenteile oder Figuren ihrem Inhalte nach invariant bleiben. Wenigstens ergibt sich dies, wenn die Determinante $ab' - ba' = \pm 1$ ist weil die Gleichung

$$xy_1 - yx_1 = (ab' - ba')(x'y_1' - y'x_1')$$

gilt, sobald man den Koordinatenursprung nach dem Nullpunkte verlegt, und weil der Inhalt jedes Flächenteils in Dreiecke von der Form $\frac{1}{2}(xy_1 - yx_1)$ zerfällt gedacht werden kann. Hat $ab' - ba'$ einen von der Einheit verschiedenen Wert, so folgt statt der Gleichheit nur die Proportionalität der entsprechenden Figuren: den Fall $ab' - ba' = 0$ dürfen wir dabei ausschließen, weil alsdann $\frac{y-c'}{x-c} = const.$ sein würde, also die Punkte xy nur in einer bestimmten Geraden liegen könnten, während im Übrigen die Punkte $x'y'$ ins Unendliche rücken.

3.

Von besonderem Interesse ist noch die Untersuchung der *allgemeinen* linearen Substitution von der Form

$$apq + bp + cq + d = 0 \quad \text{oder} \quad p = -\frac{cq+d}{aq+b}, \quad q = -\frac{bp+d}{ap+c},$$

wenn die vorkommenden Größen beliebige komplexe Werte annehmen dürfen. Es ist leicht zu sehen, daß für

$$p = x + yi, \quad q = x' + y'i, \quad a = \alpha + \alpha' i, \quad b = \beta + \beta' i, \quad \text{u. s. w.}$$

durch Zerfällung in den reellen und den imaginären Teil die Gleichungen hervorgehen:

$$\begin{aligned}
\xi x - \eta y &= -\gamma x' + \gamma' y' - \delta, & \xi &= \alpha x' - \alpha' y' + \beta, \\
\xi y + \eta x &= -\gamma' x' - \gamma y' - \delta', & \eta &= \alpha' x' + \alpha y' + \beta', \\
\xi' x' - \eta' y' &= -\beta x + \beta' y - \delta, & \xi' &= \alpha x - \alpha' y + \gamma, \\
\xi' y' + \eta' x' &= -\beta' x - \beta y - \delta', & \eta' &= \alpha' x + \alpha y + \gamma'.
\end{aligned}$$

Für $p = x + yi$ bezeichne p den Punkt xy und $p' = x - yi$ den konjugierten Wert. Sollen nun die beliebigen komplexen Punkte $p = p_0, p_1, p_2$ in die beliebigen Punkte $q = q_0, q_1, q_2$ durch die lineare Substitution übergeführt werden, so hat man

$$p = \frac{\mathrm{S}\, p_1 p_2 (q_2 - q_1)(q - q_0)}{\mathrm{S}\, p_0 (q_1 - q_2)(q - q_0)} \quad \text{oder} \quad q = \frac{\mathrm{S}\, q_1 q_2 (p_2 - p_1)(p - p_0)}{\mathrm{S}\, q_0 (p_1 - p_2)(p - p_0)}$$

zu setzen, wobei

$$\mathrm{S}\, q_0(p_1 - p_2)(p - p_0) \times \mathrm{S}\, p_0(q_1 - q_2)(q - q_0) = \Pi\,(p_1 - p_2)(q_1 - q_2).$$

Die Summen und Produkte beziehen sich auf die cyklische Vertauschung der Indices 0 1 2. Man verifiziert auch leicht die Formeln

$$p - p_0 = \frac{(p_0 - p_1)(p_0 - p_2)(q_2 - q_1)(q - q_0)}{\mathrm{S}\, p_0(q_1 - q_2)(q - q_0)}$$

$$\text{oder} \quad q - q_0 = \frac{(q_0 - q_1)(q_0 - q_2)(p_2 - p_1)(p - p_0)}{\mathrm{S}\, q_0(p_1 - p_2)(p - p_0)},$$

und durch Vertauschung der Indices:

$$p - p_1 = \frac{(p_0 - p_1)(p_1 - p_2)(q_0 - q_2)(q - q_1)}{\mathrm{S}\, p_0(q_1 - q_2)(q - q_0)}$$

$$\text{und} \quad p - p_2 = \frac{(p_0 - p_2)(p_1 - p_2)(q_0 - q_1)(q - q_2)}{\mathrm{S}\, p_0(q_1 - q_2)(q - q_0)}.$$

Durch Division erhält man sofort

$$\frac{p_0 - p_1}{p_0 - p_2} \cdot \frac{p - p_2}{p - p_1} = \frac{q_0 - q_1}{q_0 - q_2} \cdot \frac{q - q_2}{q - q_1}$$

oder die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(p_1 - p_2)(p - p_0) : (p_2 - p_0)(p - p_1) : (p_0 - p_1)(p - p_2) =$$
$$= (q_1 - q_2)(q - q_0) : (q_2 - q_0)(q - q_1) : (q_0 - q_1)(q - q_2).$$

Die Funktion

$$P = \frac{p_0 - p_1}{p_0 - p_2} \cdot \frac{p - p_2}{p - p_1}$$

ist folglich eine *Invariante* der allgemeinen linearen Substitution, und man darf jetzt die Invarianz der *komplexen* Doppelverhältnisse zwischen *vier beliebigen Punkten der Ebene* in Anspruch nehmen.

Die geometrische Bedeutung des Satzes in Bezug auf das zugehörige Viereck $p\,p_0\,p_1\,p_2$ springt in die Augen: schreibt man

$$\frac{p - p_1}{p - p_2} = r e^{\varphi i}, \qquad \frac{p_0 - p_1}{p_0 - p_2} = r_0 e^{\varphi_0 i},$$

so ist φ der der Seite $\overline{p_1 p_2}$ gegenüberstehende Winkel im Dreieck $p\,p_1\,p_2$ und φ_0 der betreffende Winkel im Dreieck $p_0\,p_1\,p_2$, während

$$r = \frac{\overline{p\,p_1}}{\overline{p\,p_2}}, \qquad r_0 = \frac{\overline{p_0\,p_1}}{\overline{p_0\,p_2}},$$

mithin wird

$$P = \frac{r_0}{r}\, e^{(\varphi_0 - \varphi) i}.$$

Daraus folgt, daß der Wert von P reell ist, sobald die vier Punkte auf einem Kreise liegen, weil im Kreisviereck $\varphi = \varphi_0$ wird. Diese Eigenschaft bleibt mithin den transformierten Vierecken erhalten und begründet die von Möbius eingeführte *Kreisverwandtschaft.*

Daß diese Verwandtschaft aus der linearen Substitution entspringt, ergibt sich leicht auch auf folgendem direkten Wege. Wenn p und s beliebige komplexe Werte bedeuten, so ist

$$r = \operatorname{mod}(p - s) = |p - s|$$

für variable p die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser r und dem Mittelpunkte s.[1]) Sei nun

$$p - s = \frac{\alpha q + \beta}{\gamma q + \delta}$$

eine beliebige lineare Substitution, so zeigt eine leichte Rechnung, daß

$$r\,|\gamma q + \delta| = |\alpha q + \beta|$$

die Gleichung eines Kreises $\varrho = |q - \sigma|$ wird, dessen Halbmesser

$$\varrho = r\left|\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma\gamma' r^2 - \alpha\alpha'}\right| \quad \text{und Mittelpunkt} \quad \sigma = \frac{\alpha'\beta - \gamma'\delta r^2}{\gamma\gamma' r^2 - \alpha\alpha'},$$

wo die accentuierten Größen die konjugierten Werte bezeichnen.

Soll der Kreis $r = |p - s|$ durch die Punkte $p_0 p_1 p_2$ gehen, so hat man

$$r = \left|\frac{(p_1 - p_2)(p_2 - p_0)(p_0 - p_1)}{\mathrm{S}(p_1 - p_2)\,p_0'}\right|, \qquad s = \frac{\mathrm{S}(p_1 - p_2)\,p_0\,p_0'}{\mathrm{S}(p_1 - p_2)\,p_0'},$$

mithin auch

$$\varrho = \left|\frac{(q_1 - q_2)(q_2 - q_0)(q_0 - q_1)}{\mathrm{S}(q_1 - q_2)\,q_0'}\right|, \qquad \sigma = \frac{\mathrm{S}(q_1 - q_2)\,q_0\,q_0'}{\mathrm{S}(q_1 - q_2)\,q_0'}.$$

1) Für eine *Ellipse* mit den Brennpunkten f und f_1 und der großen Achse A wird analog

$$|p - f| + |p - f_1| = A,$$

während die Formel $|f - f_1| = Ae$ die Exzentrizität liefert. Sei ferner f der Brennpunkt, s der Scheitel und p ein Punkt einer *Parabel* mit dem Parameter $\varpi = 2\,|f - s|$, so erhält man

$$|p - s|^2 + 4\,|f - s|^2 = \{|p - f| + |f - s|\}^2.$$

Für $p = x + yi$, $s = 0$ und $f = \frac{1}{2}\varpi$ geht die auf die Achse bezogene Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = 2\varpi x$ hervor. Die *Hyperbel* endlich unterscheidet sich von der Ellipse nur durch das Vorzeichen von $|p - f|$, wenn f und p dem nämlichen Hyperbelzweige angehören.

4.

Nach vorstehendem Exkurse gehen wir über zur Ableitung der bei der linearen Transformation der ganzen Funktionen auftretenden Invarianten.

Seien f und g ganze Funktionen $m$ten resp. $n$ten Grades von der Form

$$\overset{m}{f}(x) = a_0 x^m + \widehat{m}_1 a_1 x^{m-1} + \widehat{m}_2 a_2 x^{m-2} \cdots + a_m = a_0 \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$$

$$\overset{n}{g}(x) = b_0 x^n + \widehat{n}_1 b_1 x^{n-1} + \widehat{n}_2 b_2 x^{n-2} \cdots + b_n = b_0 \prod_{k=1}^{n} (x - y_k)$$

mit den Koeffizienten a und b und den Wurzeln x_i und y_k, während

$$\widehat{m}_i = \frac{m \cdot m-1 \ldots m-i+1}{1 \cdot 2 \ldots i}$$

den $i$ten Binomialkoeffizienten von m bezeichnen soll. Führt man hier die lineare Substitution ein:

$$x = \frac{\delta \xi + \delta_1}{\delta_2 \xi + \delta_3}, \quad \text{folglich} \quad \xi = \frac{\delta_3 x - \delta_1}{\delta - \delta_2 x}, \quad \frac{dx}{\delta - \delta_2 x} = \frac{d\xi}{\delta_2 \xi + \delta_3},$$

mit der Substitutionsdeterminante

$$\varepsilon = \delta \delta_3 - \delta_1 \delta_2 = (\delta_2 \xi + \delta_3)(\delta - \delta_2 x) = \varrho \cdot \sigma,$$

so gilt natürlich auch hier der Satz von der Invarianz des Doppelverhältnisses

$$\frac{x - x'}{x - x''} \cdot \frac{x_0 - x''}{x_0 - x'} = \frac{\xi - \xi'}{\xi - \xi''} \cdot \frac{\xi_0 - \xi''}{\xi_0 - \xi'},$$

wie sich am direktesten aus den Gleichungen

$$\varrho \varrho'(x - x') = \varepsilon(\xi - \xi'), \qquad \varrho_0 \varrho''(x_0 - x'') = \varepsilon(\xi_0 - \xi''),$$
$$\varrho \varrho''(x - x'') = \varepsilon(\xi - \xi''), \qquad \varrho_0 \varrho'(x_0 - x') = \varepsilon(\xi_0 - \xi')$$

ergibt. Man kann dafür auch schreiben

$$\varrho'(x' - x'') = \sigma''(\xi' - \xi'') \quad \text{oder} \quad \varrho''(x' - x'') = \sigma'(\xi' - \xi''),$$

wo die Bezeichnung leicht verständlich sein wird.

Weiter folgt wegen $\varrho = \delta_2 \xi + \delta_3$:

$$\varrho^m \overset{m}{f}(x) = \overset{m}{\varphi}(\xi), \quad \varrho^n \overset{n}{g}(x) = \overset{n}{\chi}(\xi), \quad dx = \varepsilon \frac{d\xi}{\varrho^2},$$

und analog für $\sigma = \delta - \delta_2 x$:

$$\sigma^m \varphi\xi = \varepsilon^m f x, \quad \sigma^n \chi\xi = \varepsilon^n g x \quad \text{nebst} \quad d\xi = \varepsilon \frac{dx}{\sigma^2}.$$

Hier bedeuten

$$\varphi\xi = \alpha_0 \xi^m + \widehat{m}_1 \alpha_1 \xi^{m-1} \ldots \quad \text{und} \quad \chi\xi = \beta_0 \xi^n + \widehat{n}_1 \beta_1 \xi^{n-1} \ldots$$

ganze Funktionen von ξ mit den Koeffizienten α und β.

Sind die Koeffizienten a_i der Einheit gleich, so wird

$$f x = (x + 1)^m, \quad \text{folglich} \quad \alpha_i = (\delta + \delta_2)^{m-i} (\delta_1 + \delta_3)^i,$$

auch kann man bemerken, daß gleichzeitig

$$x = 0, \quad \xi = -\frac{\delta_1}{\delta}, \quad \varrho = \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \sigma = \delta;$$

$$\xi = 0, \quad x = \frac{\delta_1}{\delta_3}, \quad \varrho = \delta_3, \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{\delta_3};$$

$$x = \infty, \quad \xi = -\frac{\delta_3}{\delta_2}, \quad \varrho = 0, \quad \sigma = \infty, \quad \varrho x = -\frac{\varepsilon}{\delta_2}, \quad \frac{\sigma}{x} = -\delta_2;$$

$$\xi = \infty, \quad x = \frac{\delta}{\delta_2}, \quad \varrho = \infty, \quad \sigma = 0, \quad \sigma\xi = \frac{\varepsilon}{\delta_2}, \quad \frac{\varrho}{\xi} = \delta_2.$$

Da ferner ε nicht verschwindet — denn in diesem Falle würde x aufhören variabel zu sein — und die Koeffizienten δ mit einem beliebigen Faktor multipliziert werden können, so darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon = \pm 1$ annehmen, doch wollen wir vorläufig ε willkürlich lassen.

Bei der Differentiation der aufgestellten Gleichungen soll der $i$te Differentialquotient

$$f^{(i)} = m \cdot m - 1 \ldots m - i + 1 \cdot f_{(i)}, \quad g^{(i)} = n \cdot n - 1 \ldots n - i + 1 \cdot g_{(i)},$$

u. s. w. geschrieben werden, wodurch

$$\frac{1}{i!} f^{(i)} = \widehat{m}_i f_{(i)}, \quad f'_{(i)} = (m - i) f_{(i+1)}, \quad f_{(i)}(x) = \overset{m-i}{f}(x),$$

mithin

$$f_{(i)}(0) = a_{m-i}, \quad \varphi_{(i)}(0) = \alpha_{m-i}.$$

α_{m-i} geht aus α_i durch Vertauschung von δ mit δ_1 und δ_2 mit δ_3, folglich auch von ε mit $-\varepsilon$ hervor, wie sich sogleich ergibt, wenn man $\frac{1}{\xi}$ statt ξ setzt. Für $f = (x + 1)^m$ wird $f_{(i)} = (x + 1)^{m-i}$.

Zur Bestimmung von α_i kann man sich der folgenden Vorschrift bedienen. Man bilde das Produkt

$$(\delta + \delta_2)^{m-i} (\delta_1 + \delta_3)^i,$$

dessen einzelne Glieder die Form haben

$$D\delta^e \delta_1^{e_1} \delta_2^{e_2} \delta_3^{e_3}, \quad \text{wo } e + e_2 = m - i, \quad e_1 + e_3 = i,$$

und wähle daraus diejenigen Terme, in denen $e_2 + e_3 = k$, mit der Summe Δ_k, dann wird

$$\alpha_i = \mathop{\mathrm{S}}_{k=0}^{m} a_k \Delta_k.$$

So findet man

$$\alpha_0 = a_0 \delta^m + m a_1 \delta^{m-1} \delta_2 \cdots + m a_{m-1} \delta \delta_2^{m-1} + a_m \delta_2^m = \delta_2^m f\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right)$$

$$\alpha_1 = a_0 \delta^{m-1} \delta_1 + a_1 \delta^{m-2} (m \delta_1 \delta_2 + \varepsilon) \cdots$$
$$+ a_{m-1} \delta_2^{m-2} (m \delta \delta_3 - \varepsilon) + a_m \delta_2^{m-1} \delta_3$$

. . . .

$$\alpha_{m-1} = a_0 \delta \delta_1^{m-1} + a_1 \delta_1^{m-2} (m \delta \delta_3 - \varepsilon) \cdots$$
$$+ a_{m-1} \delta_1^{m-2} (m \delta_1 \delta_2 + \varepsilon) + a_m \delta_2 \delta_3^{m-1}$$

$$\alpha_m = a_0 \delta_1^m + m a_1 \delta_1^{m-1} \delta_3 \cdots + m a_{m-1} \delta_1 \delta_3^{m-1} + a_m \delta_3^m = \delta_3^m f\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right).$$

Bedenkt man nun, daß die Gleichung $\varrho^m f(x a) = f(\xi \alpha)$ geschrieben werden kann:

$$\sigma^m f(\xi, \alpha) = \varepsilon^m f(x, a) = f(x, a \varepsilon^m),$$

während der Übergang von x und ϱ zu ξ und σ einer Vertauschung von $\delta\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3$ mit $\delta_3\ -\delta_1\ -\delta_2\ \delta$ entspricht, so folgt aus

$\alpha = F(a\ \delta\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3)$ die Gleichung $a \varepsilon^m = F(\alpha\ \delta_3\ -\delta_1\ -\delta_2\ \delta)$.

Man kann folglich setzen

$$\varepsilon^m a_0 = (-1)^m \delta_2^m f\left(-\frac{\delta_3}{\delta_2}, \alpha\right) = \alpha_0 \delta_3^m - m \alpha_1 \delta_3^{m-1} \delta_2 \pm \cdots$$

$$\varepsilon^m a_m = \delta^m f\left(-\frac{\delta_1}{\delta}, \alpha\right) = (-1)^m \left\{ \alpha_0 \delta_1^m - m \alpha_1 \delta_1^{m-1} \delta \pm \cdots \right\}$$

u. s. w.

Eine leichte Rechnung ergibt ferner die Werte

$$\varphi_{,} = \delta_2 \varrho^{m-1} f + \varepsilon \varrho^{m-2} f_{,},$$
$$\varphi_{,,} = \delta_2^2 \varrho^{m-2} f + 2 \delta_2 \varepsilon \varrho^{m-3} f_{,} + \varepsilon^2 \varrho^{m-4} f_{,,},$$

und allgemein, so lange i nicht m resp. n übersteigt:

$$\varphi_{(i)} = \delta_2^i \varrho^{m-i} f + \widehat{i_1} \varepsilon \delta_2^{i-1} \varrho^{m-i-1} f_{,} + \widehat{i_2} \varepsilon^2 \delta_2^{i-2} \varrho^{m-i-2} f_{,,} \cdots + \varepsilon^i \varrho^{m-2i} f_{(i)}$$

$$\chi_{(i)} = \delta_2^i \varrho^{n-i} g + \widehat{i_1} \varepsilon \delta_2^{i-1} \varrho^{n-i-1} g_{,} + \widehat{i_2} \varepsilon^2 \delta_2^{i-2} \varrho^{n-i-2} g_{,,} \cdots + \varepsilon^i \varrho^{n-2i} g_{(i)}.$$

Man kann auch schreiben

$$\varphi = \varrho^m f, \qquad \varepsilon^m f = \sigma^m \varphi$$

$$\varphi_{,} = \varrho^{m-1}\{\sigma f_{,} + \delta_2 f\}, \qquad \varepsilon^m f_{,} = \sigma^{m-1}\{\varrho\varphi_{,} - \delta_2\varphi\}$$

$$\varphi_{,,} = \varrho^{m-2}\{\sigma^2 f_{,,} + 2\delta_2\sigma f_{,} + \delta_2^2 f\}, \qquad \varepsilon^m f_{,,} = \sigma^{m-2}\{\varrho^2\varphi_{,,} - 2\delta_2\varrho\varphi_{,} + \delta_2^2\varphi\}$$

u. s. w. Aus vorstehenden Formeln erhält man für $\xi = 0$:

$$\varphi_{(i)}(0) = \alpha_{m-i} = \delta_3^{m-2i}\left\{\delta_2^i\delta_3^i f\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right) + \widehat{i_1}\,\varepsilon\,\delta_2^{i-1}\delta_3^{i-1} f_{,}\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)\cdots + \varepsilon^i f_{(i)}\left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)\right\}$$

und durch Vertauschung von δ und δ_1, δ_2 und δ_3:

$$\varphi_{m-i}(0) = \alpha_i = \delta_2^{m-2i}\left\{\delta_2^i\delta_3^i f\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right) - \widehat{i_1}\,\varepsilon\,\delta_2^{i-1}\delta_3^{i-1} f_{,}\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right)\cdots + (-1)^i\varepsilon^i f_{(i)}\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right)\right\}.$$

5.

So lange die Funktionen f und g oder deren Koeffizienten a und b von einander völlig unabhängig sind, gilt das Gleiche von den transformierten Funktionen φ und χ. Im entgegengesetzten Falle aber kann man sich die Aufgabe stellen, die Koeffizienten b dergestalt als rationale Funktionen der a zu bestimmen, daß χ aus φ ebenso hervorgeht, wie g aus f, mit anderen Worten, daß die Koeffizienten β in χ durch die nämlichen Funktionen der α in φ ausgedrückt werden. Um hierbei nicht auf selbstverständliche Fälle, wie $g = f^2$ u. dergl. beschränkt zu sein, wollen wir die Aufgabe für $\varepsilon = 1$ behandeln, oder bestimmter ausgedrückt, eine gewisse Potenz der Substitutionsdeterminante als Faktor zulassen; ferner sollen die Koeffizienten b als *homogene ganze* Funktionen der a bestimmt werden.

Ein einfaches Beispiel liefern die Funktionen

$$\overset{3}{f}(x) = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3$$

$$\overset{2}{g}(x) = (a_1^2 - a_0a_2)x^2 + (a_1a_2 - a_0a_3)x + a_2^2 - a_1a_3 = b_0x^2 + 2b_1x + b_2.$$

Denn man erhält durch eine leichte Rechnung:

$$\alpha_0 = a_0\delta^3 + 3a_1\delta^2\delta_2 + 3a_2\delta\delta_2^2 + a_3\delta_2^3$$

$$\alpha_1 = a_0\delta^2\delta_1 + a_1\delta(3\delta_1\delta_2 + \varepsilon) + a_2\delta_2(3\delta\delta_3 - \varepsilon) + a_3\delta_2^2\delta_3$$

$$\alpha_2 = a_0\delta\delta_1^2 + a_1\delta_1(3\delta\delta_3 - \varepsilon) + a_2\delta_3(3\delta_1\delta_2 + \varepsilon) + a_3\delta_2\delta_3^2$$

$$\alpha_3 = a_0\delta_1^3 + 3a_1\delta_1^2\delta_3 + 3a_2\delta_1\delta_3^2 + a_3\delta_3^3,$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 = \beta_0, \quad \alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3 = 2\beta_1, \quad \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3 =$$

wenn

$$\varrho^3 f x = \alpha_0 \xi^3 + 3\alpha_1 \xi^2 + 3\alpha_2 \xi + \alpha_3 = \varphi\xi$$

und

$$\varepsilon^2 \varrho^2 g x = (\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2)\xi^2 + (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3)\xi + \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3$$
$$= \beta_0\xi^2 + 2\beta_1\xi + \beta_2 = \chi\xi$$

gesetzt werden.

Wenn vermöge der Substitution

$$\varrho x = \delta\xi + \delta_1, \quad \varrho = \delta_2\xi + \delta_3, \quad \varepsilon = \delta\delta_3 - \delta_1\delta_2$$

aus den Gleichungen

$$\varrho^m f(x\, a) = \varphi\xi = f(\xi\, \alpha), \quad \varepsilon^p \varrho^n g(x\, b) = \chi\xi = g(\xi\, \beta)$$

durch Einführung der Koeffizienten a und α eine Gleichung hervorgeht von der Form

$$\varepsilon^p \varrho^n g(x, \overset{\mu}{a}) = \chi\xi = g(\xi, \overset{\mu}{\alpha}),$$

die Koeffizienten $\beta = F(\alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_m) = \overset{\mu}{\alpha}$ also ebenso durch die α, wie die $b = F(a_0\, a_1 \ldots a_m) = \overset{\mu}{a}$ durch die a ausgedrückt werden, so nennt man g eine **Kovariante** der Funktion oder Form f. Sind die Funktionen F homogene Ausdrücke ihrer Argumente von der μten Dimension, so heißt g eine Kovariante von der μten *Dimension*, vom $n$ten *Grade* und mit dem *Gewichte* p. Läßt man in der Gleichung $\varepsilon^p \varrho^n g(x\, b) = g(\xi\, \beta)$ die Variabeln x oder ξ verschwinden oder unendlich werden, so ergeben sich die Relationen

$$\varepsilon^{p+n} b_0 = \beta_0\delta_3^n - \bar{n}_1\beta_1\delta_3^{n-1}\delta_2 + \bar{n}_2\beta_2\delta_3^{n-2}\delta_2^2 \mp \cdots$$
$$\varepsilon^{p+n} b_n = (-1)^n(\beta_0\delta_1^n - \bar{n}_1\beta_1\delta_1^{n-1}\delta + \bar{n}_2\beta_2\delta_1^{n-2}\delta^2 \mp \cdots)$$
$$\beta_0 = \varepsilon^p(b_0\delta^n + \bar{n}_1 b_1\delta^{n-1}\delta_2 + \bar{n}_2 b_2\delta^{n-2}\delta_2^2 + \cdots)$$
$$\beta_n = \varepsilon^p(b_0\delta_1^n + \bar{n}_1 b_1\delta_1^{n-1}\delta_3 + \bar{n}_2 b_2\delta_1^{n-2}\delta_3^2 + \cdots).$$

Durch Differentiation aber erhält man wegen Hinzutritts des Faktors ε^p

$$\chi_{\prime} = \delta_2\varepsilon^p\varrho^{n-1}g + \varepsilon^{p+1}\varrho^{n-2}g_{\prime}.$$

Im vorstehenden Beispiel ist g eine Kovariante von der zweiten Dimension und dem zweiten Grade mit dem Gewichte $p = 2$. Für $f = g$ wird f seine eigene Kovariante $m$ten Grades,

von der ersten Dimension und dem Gewichte $p = 0$. Im Allgemeinen wird das Gewicht[1])

$$p = \tfrac{1}{2}(m\mu - n),$$

denn da die α von der Dimension m in Bezug auf die Koeffizienten δ sind und die β von der Dimension $2p + n$, so hat man $2p + n = m\mu$. Folglich wird in Bezug auf den Modul 2 $m\mu \equiv n$, und es muß bei jeder Kovariante oder Invariante für m ungerade der Grad $n \equiv \mu$ und für m gerade $n \equiv 0 \mod 2$ sein. Oder mit anderen Worten: eine Kovariante von f ist nur dann von ungeradem Grade, wenn m und μ gleichzeitig ungerade sind.

Kovarianten nullten Grades heißen ***Invarianten,*** weil sie von der Variablen x unabhängig sind. Für $n = 0$,

$$gx = g0 = G = F(a_0 a_1 \ldots a_m)$$

wird neben $\varrho^m fx = \varphi\xi$ die Invariante G von der Dimension μ und dem Gewichte $p = \frac{1}{2}m\mu$ die Gleichung erfüllen:

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}m\mu} G = \chi\xi = \chi 0 = F(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_m).$$

Ferner heißt analogerweise h eine *simultane Kovariante* der beiden Formen f und g, vom Grade l und dem Gewichte q, wenn für

$$\varrho^m f(x\,a) = \varphi\xi = f(\xi\,\alpha), \quad \varrho^n g(x\,b) = \chi\xi = g(\xi\,\beta),$$
$$\varepsilon^q \varrho^l h(x\,c) = \psi\xi = h(\xi\,\gamma)$$

die Koeffizienten c ebenso von den a und b, wie die γ von α und β abhängen. Sind die c homogene Ausdrücke von der Dimension μ in Bezug auf a, ν in Bezug auf b, so erhält man das Gewicht

$$q = \tfrac{1}{2}(m\mu + n\nu - l)$$

und für $h = h(x, \overset{\mu}{a}, \overset{\nu}{b})$ wird $\psi = h(\xi, \alpha, \beta) = \varepsilon^q \varrho^l h(x, a, b)$.

Selbstverständlich gehören die Kovarianten von f oder g allein auch zu den simultanen Kovarianten beider Funktionen, aber nicht umgekehrt.

---

1) Von anderen Autoren wird p als der *Index* und statt dessen die Größe $\frac{1}{2}(m\mu + n)$ als das Gewicht der Kovariante bezeichnet, auch finden sich die Benennungen Grad und Dimension (oder Ordnung) vertauscht. Vergl. z. B. SALMON-FIEDLER Algebra, Art. 146, FAÀ DI BRUNO-WALTER Binäre Formen, S. 103. Die jetzt allgemein adoptierten Benennungen *Invariante*, *Kovariante* und *Diskriminante* rühren von SYLVESTER her.

6.

Als Beispiel für eine simultane Invariante von f und g mit dem Gewichte $q = \frac{1}{2}(m\mu + n\nu)$ entwickeln wir die sogenannte *Resultante* der beiden Funktionen, deren Verschwinden der Elimination der Variablen x aus den Gleichungen $f = g = 0$ entspricht.

Wenn die Funktionen fx und gy eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so wird $x_i = y_k$ und $\prod_{ik}(x_i - y_k) = 0$. Das Produkt $\prod_{ik}$ ist eine ganze symmetrische Funktion der Wurzeln von f und g, so daß nach den Prinzipien der Algebra

$$a_0^n b_0^m \prod_{ik} = F(a_0\, a_1 \dots a_m\, b_0\, b_1 \dots b_n)$$

durch eine ganze homogene Funktion der Koeffizienten a und b von den Dimensionen $\mu = n$ und $\nu = m$ ausgedrückt wird. Diese führt den Namen der *Resultante*

$$R(f\,g) = (-1)^{mn} R(g\,f)$$

und bleibt — eventuell abgesehen von einem zu bestimmenden Faktor — *invariant* bei einer linearen Transformation der Variablen x, weil wenn $R' = R(\varphi\chi)$ den Wert der Resultante nach der Transformation darstellt, beide Gleichungen $R = 0$ und $R' = 0$ die Bedingung für ein gleichzeitiges Verschwinden von f und g enthalten.

Man findet sogleich durch direkte Rechnung

$$\varepsilon(x_i - y_k) = (\delta - \delta_2 x_i)(\delta - \delta_2 y_k)(\xi_i - \eta_k),$$

folglich

$$\varepsilon^{mn} \prod_{ik}(x_i - y_k) = \prod_i(\delta - \delta_2 x_i)^n \prod_k(\delta - \delta_2 y_k)^m \prod_{ik}(\xi_i - \eta_k).$$

Nun hatten wir für $\xi = \infty$, $x = \frac{\delta}{\delta_2}$, $\sigma = 0$, $\sigma\xi = \frac{\varepsilon}{\delta_2}$, mithin gibt die Gleichung $\sigma^m \varphi\xi = \varepsilon^m fx$:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\delta_2}\right)^m \alpha_0 = \varepsilon^m f\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right) \quad \text{oder} \quad \alpha_0 = a_0 \prod_i(\delta - \delta_2 x_i) = a_0 \prod \sigma_i$$

und analog

$$\beta_0 = b_0 \prod_k(\delta - \delta_2 y_k).$$

Die Substitution dieser Werte liefert

$$\varepsilon^{mn} a_0^n b_0^m \prod_{ik}(x_i - y_k) = \alpha_0^n \beta_0^m \prod_{ik}(\xi_i - \eta_k)$$

oder

$$\varepsilon^{mn} R(f\,g) = R(\varphi\chi),$$

d. h. die Resultante R ist eine Invariante vom Gewicht $q = mn$.

Bei dieser Ableitung ist vorausgesetzt, daß R *simultane* Invariante der beiden Funktionen f und g sei. Sind jedoch die Koeffizienten b in g durch die Koeffizienten a in f bestimmt, so wird die Eliminationsresultante allein von den a abhängig und kann nur als Invariante von f bestimmt werden. Dieser Fall tritt z. B. ein für

$$g = f_{,} = \frac{1}{m} f', \quad n = m - 1,$$

wobei $R(ff_{,})$ durch a_0 teilbar und erst nach Abtrennung dieses Faktors eine Invariante von f wird. Wir schreiben jetzt

$$D(f) = \frac{1}{a_0} R(ff_{,}) = a_0^{2m-2} \prod\nolimits_{ik} (x_i - y_k) = \frac{1}{m^m} a_0^{2m-2} \prod\nolimits_{ik}' (x_i - x_k)$$

und nennen $D(f)$ die *Diskriminante* der Funktion f. Hier durchläuft in $\prod_{ik}$ i die Werte von 1 bis m, k von 1 bis $m-1$, während in $\prod_{ik}'$ i und k zwei *verschiedene* Werte von 1 bis m bedeuten, wodurch gleichfalls $m(m-1)$ Faktoren entstehen. Da von diesen je zwei einander entgegengesetzt sind, so wird für $\frac{m \cdot m-1}{2}$ verschiedene Werte*paare* $i > k$, wie durch $\prod^*$ bezeichnet werden soll:

$$D_m(f) = (-1)^{\frac{m \cdot m-1}{2}} \frac{1}{m^m} a_0^{2m-2} \prod\nolimits_{ik}^* (x_i - x_k)^2.$$

Obgleich die Gleichungen $f' y_k = 0$ und $f x_k = 0$ im Allgemeinen verschiedene Wurzeln haben, so wird doch bekanntlich für $x_i = x_k$ auch $x_k = y_k$, so daß $\prod \prod'$ und $\prod^*$ gleichzeitig verschwinden. In der Tat erhält man wegen

$$f'(x_i) = a_0 \prod\nolimits_k' (x_i - x_k) = m f_{,}(x_i)$$

$$a_0^m \prod\nolimits_{ik}' (x_i - x_k) = m^m \prod\nolimits_i f_{,}(x_i) = m^m a_0^m \prod\nolimits_{ik}^* (x_i - x_k).$$

Auch überzeugt man sich leicht, daß die Diskriminante $D_m(f)$ eine *Invariante* vom Gewicht $p = m(m-1)$ und der Dimension $\mu = 2(m-1)$ darstellt, wenn man wieder ausgeht von der Gleichung

$$\varepsilon(x_i - x_k) = \sigma_i \sigma_k (\xi_i - \xi_k), \quad \varepsilon^{m(m-1)} \prod\nolimits_{ik}' (x_i - x_k) = \prod\nolimits_{ik}' \sigma_i \sigma_k (\xi_i - \xi_k).$$

Hier ist offenbar

$$\Pi'_{ik}\sigma_i\sigma_k = \Pi_i \sigma_i^{m-1} \Pi_k \sigma_k^{m-1} = (\Pi \sigma_i)^{2m-2},$$

folglich wegen

$$\alpha_0 = a_0 \Pi_i \sigma_i, \quad \varepsilon^{m(m-1)} D(f) = D(\varphi),$$

q. e. d.

Es mögen hier noch beispielsweise die Werte der Diskriminanten für $m = 2, 3, 4$ angeführt werden. Man erhält bei Benutzung der Potenzsummen

$$s_k = \mathrm{S}_i x_i^k, \quad S_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \Pi^*_{ik}(x_i - x_k)^2$$

für $m = 2$:

$$D_2(f) = -\tfrac{1}{4} a_0^2 \Pi^*_{ik}(x_i - x_k)^2 = \tfrac{1}{4} a_0^2 (s_1^2 - 2 s_2)$$
$$= -\Delta = a_0 a_2 - a_1 a_1;$$

für $m = 3$:

$$D_3(f) = -\tfrac{1}{27} a_0^4 \Pi^*_{ik}(x_i - x_k)^2$$
$$= \tfrac{1}{162} a_0^4 \{ s_1^6 - 9 s_1^4 s_2 + 21 s_1^2 s_2^2 - 3 s_2^3 + 8 s_1^3 s_3 - 36 s_1 s_2 s_3 + 18 s_3^2 \}$$
$$= J = (a_1 a_2 - a_0 a_3)^2 - 4(a_1 a_1 - a_0 a_2)(a_2 a_2 - a_1 a_3)$$
$$= 4 a_0 a_2^3 - 3 a_1^2 a_2^2 + a_0^2 a_3^2 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3 + 4 a_1^3 a_3;$$

für $m = 4$:

$$D_4(f) = \tfrac{1}{256} a_0^6 \Pi^*_{ik}(x_i - x_k)^2 = G^3 - 27 H^2,$$

wo ihrerseits G und H die Invarianten zweiter und dritter Dimension bedeuten:

$$G = \tfrac{1}{48} a_0^2 \{ s_1^4 - 8 s_1^2 s_2 + 7 s_2^2 + 12 s_1 s_3 - 12 s_4 \}$$
$$= 3 a_2 a_2 - 4 a_1 a_3 + a_0 a_4,$$

$$H = \frac{1}{48 \cdot 72} a_0^3 \{ s_1^6 - 12 s_1^4 s_2 + 39 s_1^2 s_2^2 - 34 s_2^3 + 12 s_1^3 s_3 -$$
$$- 36 s_1 s_2 s_3 - 24 s_3^2 - 18 s_1^2 s_4 + 72 s_2 s_4 \}$$

$$= a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Zwischen den Invarianten $\Delta\, G\, H$ und J besteht die identische Relation:

$$\Delta G + a_0 H + J = 0.$$

7.

Als ganze Funktion der Koeffizienten von f läßt sich jede Kovariante oder Invariante g auch durch eine ganze symmetrische Funktion der Wurzeln x_i darstellen. Diese Funktionen können aber nur von den *Differenzen* $x - x_i$ und $x_j - x_k$ abhängen, weil die Substitution

$$x = \xi + \delta_1, \quad \varepsilon = 1, \quad \varrho = 1, \quad gx = g\xi$$

liefert, also eine Änderung von x um eine Konstante ohne Einfluß bleibt. Mithin darf man setzen

$$g(x\overset{\mu}{a}) = a_0^\mu \sum \{ \prod_i (x - x_i)^{k_i} \prod_{jk}^{*} (x_j - x_k)^{l_{jk}} \},$$

wenn $\sum$ eine symmetrische Summe und $\prod^*$ das Produkt der $\frac{m \cdot m-1}{2}$ Wurzeldifferenzen bedeutet, so daß die Summe $\sum$ sich auf Produkte von $\frac{m \cdot m+1}{2}$ Faktoren erstreckt.

Fragt man, auf welchen Grad in Bezug auf eine Wurzel x_i jeder Term der symmetrischen Summe steige, so hat man aus dem Produkt $\prod^*$ die $m - 1$ Faktoren auszuwählen, für welche j oder k gleich i wird. Sei nun $l_i = \underset{k \neq i}{\mathrm{S}}\, l_{ik}$ die Summe der entsprechenden Exponenten, so erhält man für den Exponenten von x_i den Wert $k_i + l_i$, und es läßt sich leicht zeigen, daß dieser *von i unabhängig* sein muß, wenn die Gleichung

$$\varepsilon^p \varrho^n g(x\overset{\mu}{a}) = g(\xi\alpha) = \alpha_0^\mu \sum \{ \prod_i (\xi - \xi_i)^k \prod_{jk}^{*} (\xi_j - \xi_k)^{l_{jk}} \}$$

bestehen soll. In der Tat ergibt die Substitution

$$\varrho\varrho_i(x - x_i) = \varepsilon(\xi - \xi_i) \quad \text{und} \quad \varrho_j\varrho_k(x_j - x_k) = \varepsilon(\xi_j - \xi_k)$$

nebst

$$\alpha_0 = a_0 \prod \sigma_i \quad \text{oder} \quad \varepsilon^m a_0 = \alpha_0 \prod \varrho_i$$

$$\varepsilon^p \varrho^n g(xa) = \varepsilon^{p - m\mu + \mathrm{S}k_i + \mathrm{S}l_{jk}} \varrho^{n - \mathrm{S}k_i} \prod_i \varrho_i^{\mu - k_i} \prod_{jk}^{*} (\varrho_j\varrho_k)^{-l_{jk}} \times g(\xi\alpha).$$

Folglich wird nicht allein $\mathrm{S}k_i = n$, sondern auch

$$\mathrm{S}\, l_{jk} = p \quad \text{und} \quad \mu = k_i + l_i, \quad \text{weil}$$

$$\prod_{jk}^{*} (\varrho_j\varrho_k)^{l_{jk}} = \prod_i \varrho_i^{l_i} \quad \text{nebst } \mathrm{S}\, l_i = 2\,\mathrm{S}\, l_{jk} = 2p,$$

nachdem wir durch l_i den Exponenten von ϱ_i in $\prod^*$ bezeichnet haben. Es wird also von der symmetrischen Summe für $g(x\overset{n}{}\overset{\mu}{a})$

erfordert, daß jeder Term derselben in Bezug auf jede Wurzel x_i der Funktion $\overset{m}{f}(x)$ vom Grade μ sei.[1])

Selbstverständlich liefert ein Aggregat solcher symmetrischen Summen gleichfalls eine Kovariante von f, wenn Grad und Dimension, also auch das *Gewicht* der Einzelsummen übereinstimmen. Wir dürfen noch bemerken, daß für eine Invariante in dem allgemeinen Glied der symmetrischen Summe der Faktor Π_i fehlt, also $k_i = 0$, $l_i = \mu$ werden, sowie daß die Kovariante g durch $f^{k'}$ teilbar wird, wenn k' den kleinsten der Exponenten k_i bedeutet. Schreibt man also $k_i - k'$ für k_i, so bleibt die symmetrische Summe kovariant und sinkt auf den Grad $n - k'm$, Dimension $\mu - k'$, während das Gewicht p unverändert bleibt.

8.

Setzt man bei einer Kovariante g von f

$$b_k = \mathrm{S}\,\mathfrak{k}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m},$$

so ist nicht allein

$$\overset{m}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}\, k_i = \mu\,, \quad \text{sondern auch} \quad \overset{m}{\underset{0}{\mathrm{S}}}\, i k_i = p + k\,.$$

In der Tat erhält man für

$$x = \delta\xi\,, \quad \varepsilon = \delta\,, \quad \varrho = 1\,, \quad fx = \varphi\xi\,, \quad \delta^p g x = \chi\xi\,,$$

$$\alpha_i = \delta^{m-i} a_i\,, \quad \beta_i = \delta^{n+p-k} b_k = \mathrm{S}\,\mathfrak{k}\, \alpha_0^{k_0} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_m^{k_m}$$
$$= \delta^{m\mu - \mathrm{S}\, i k_i} b_k$$

oder

$$\mathrm{S}\, i k_i = m\mu - n - p + k = p + k\,.$$

---

1) Durch Vertauschung von m und μ entsteht der sogenannte Sylvester-Hermitesche *Reziprozitätssatz*, nach welchem jeder Kovariante $g(\overset{n\,\mu}{xa})$ von $\overset{m}{f}(x)$ eine Kovariante $g(\overset{n\,m}{xa})$ von $\overset{\mu}{f}(x)$ entspricht, während n und p unverändert bleiben. Folglich besitzt eine Form $m$ten Grades ebenso viele Kovarianten μter Dimension, wie eine Form μten Grades Kovarianten $m$ter Dimension: da die entsprechenden Kovarianten zugleich vom nämlichen Grade und Gewichte sind, so müssen speziell auch die Invarianten als solche einander entsprechen. Wegen des Beweises müssen wir auf die Abhandlungen von Sylvester und Hermite in Bd. 8 u. 9 des Cambridge and Dublin Mathemat. Journal verweisen.

Man schließt daraus, daß

$$\mathop{\mathrm{S}}_{i=0}^{m} a_i \frac{\partial b_k}{\partial a_i} = \mu b_k \quad \text{und} \quad \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{m} i a_i \frac{\partial b_k}{\partial a_i} = (p + k) b_k$$

und durch Verbindung beider Gleichungen:

$$\mathrm{S}\,(m - i) a_i \frac{\partial b_k}{\partial a_i} = (p + n - k) b_k.^{1)}$$

Ebenso wird für

$$c_k = \mathrm{S}\,\mathfrak{k}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} b_0^{l_0} b_1^{l_1} \ldots b_n^{l_n}$$

$$\mathrm{S}\,k_i = \mu, \quad \mathrm{S}\,l_i = \nu, \quad \mathrm{S}\,i k_i + \mathrm{S}\,i l_i = q + k$$

gefunden, nebst den Differentialrelationen

$$\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{m} i a_i \frac{\partial c_k}{\partial a_i} + \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n} i b_i \frac{\partial c_k}{\partial b_i} = (q + k)\, c_k \tag{A}$$

$$\mathrm{S}\,(m - i)\, a_i \frac{\partial c_k}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,(n - i)\, b_i \frac{\partial c_k}{\partial b_i} = (q + l - k)\, c_k. \tag{B}$$

Für

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad \delta = \delta_3 = 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = 1, \quad \varepsilon = -1, \quad \varrho = \xi$$

ist

$$\xi^m f x = \varphi \xi, \quad (-1)^p \xi^n g x = \chi \xi, \quad \alpha_i = a_{m-i}, \quad \beta_i = (-1)^p b_{n-i},$$

folglich geht

$$b_{n-k} = (-1)^p\, \mathrm{S}\,\mathfrak{k}\, a_0^{k_m} a_1^{k_{m-1}} \ldots a_m^{k_0}$$

aus b_k durch Umkehr der Reihenfolge der Exponenten k_i (oder der Koeffizienten a) unter Hinzutritt des Faktors $(-1)^p$ hervor. Entsprechend erhält man

$$c_{l-k} = (-1)^q\, \mathrm{S}\,\mathfrak{k}\, a_0^{k_m} a_1^{k_{m-1}} \ldots a_m^{k_0} b_0^{l_n} b_1^{l_{n-1}} \ldots b_n^{l_0}.$$

---

1) Weiter kann man anmerken, daß in Bezug auf den Modul 2

$$\mathrm{S}\,(2i + 1) k_{2i+1} \equiv \mathrm{S}\,k_{2i+1} \equiv p + k$$

mithin

$$\mathrm{S}\,k_{2i} = p + k + \mu, \quad \text{sodaß für} \quad k \equiv n \equiv m\mu \bmod 2$$

in den betreffenden Gliedern der Kovariante, wenn m ungerade, $\mathrm{S}\,k_{2i} \equiv p$ und wenn m gerade, $\mathrm{S}\,k_{2i+1} \equiv p$ sein muß. Für $k \equiv n + 1$ tritt $p + 1$ an die Stelle von p.

Summiert man jetzt die für $(q+k)c_k$ und $(q+l-k)c_k$ gefundenen Ausdrücke (A) und (B) in Bezug auf k unter Hinzufügung des Faktors $\frac{\partial h}{\partial c_k} = \bar{l}_k x^{l-k}$, so erhält man die Formeln

$$(1) \quad qh + \underset{k}{\mathrm{S}}\, k\bar{l}_k c_k x^{l-k} = (q+l)h - xh' = \mathrm{S}\, i a_i \frac{\partial h}{\partial a_i} + \mathrm{S}\, i b_i \frac{\partial h}{\partial l_i}$$

nebst

$$(2) \qquad qh + xh' = \mathrm{S}\,(m-i)\, a_i \frac{\partial h}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,(n-i)\, b_i \frac{\partial h}{\partial b_i}.$$

Für eine Kovariante g von f allein wird einfacher

$$(p+n)g - x\frac{\partial g}{\partial x} = \mathrm{S}\, i a_i \frac{\partial g}{\partial a_i}$$

$$pg + x\frac{\partial g}{\partial x} = \mathrm{S}\,(m-i)\, a_i \frac{\partial g}{\partial a_i}.$$

Den vorstehenden Gleichungen stehen ähnliche zur Seite, welche sich durch folgende Betrachtungen ergeben. Gibt man x ein Inkrement dx, so wächst fx um $f'x dx$, folglich

$$a_i \text{ um } da_i = i a_{i-1} dx, \quad b_i \text{ um } db_i = i b_{i-1} dx,$$

mithin

$$c_k \text{ um } dc_k = k c_{k-1} dx = \left\{ \mathrm{S}\, i a_{i-1} \frac{\partial c_k}{\partial a_i} + \mathrm{S}\, i b_{i-1} \frac{\partial c_k}{\partial b_i} \right\} dx$$

oder

$$(\mathrm{C}) \qquad k c_{k-1} = \mathrm{S}\, i a_{i-1} \frac{\partial c_k}{\partial a_i} + \mathrm{S}\, i b_{i-1} \frac{\partial c_k}{\partial b_i}.$$

Diese Gleichung kann als eine identische Gleichung zwischen den Koeffizienten a und b angesehen werden, welche auch erfüllt werden muß, wenn man a_{m-i} und b_{n-i} statt a_i und b_i schreibt. Dadurch geht aber c_k in $(-1)^q c_{l-k}$ über, sodaß

$$k c_{l-k+1} = \mathrm{S}\, i a_{m-i+1} \frac{\partial c_{l-k}}{\partial a_{m-i}} + \mathrm{S}\, i b_{n-i+1} \frac{\partial c_{l-k}}{\partial b_{n-i}}$$

oder

$$(\mathrm{D}) \qquad (l-k) c_{k+1} = \mathrm{S}\,(m-i)\, a_{i+1} \frac{\partial c_k}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,(n-i)\, b_{i+1} \frac{d c_k}{\partial b_i}.$$

Die Gleichungen (C) und (D) zeigen, wie aus *einem* Koeffizienten c_k der Kovariante alle übrigen gefunden werden.

Multipliziert man wieder (C) und (D) mit $\frac{\partial h}{\partial c_k} = \bar{l}_k x^{l-k}$, so folgt durch Summation nach k wegen

$$h' = \frac{\partial h}{\partial x} = \mathrm{S}\,(l-k)\,\hat{l}_k\,c_k\,x^{l-k-1} = \mathrm{S}\,k\,\hat{l}_k\,c_{k-1}\,x^{l-k}$$

$$x(lh - xh') = \mathrm{S}\,(l-k)\,\hat{l}_k\,c_{k+1}\,x^{l-k} = \mathrm{S}\,k\,\hat{l}_k\,c_k\,x^{l-k+1}:$$

$$\mathrm{S}\,k\,c_{k-1}\frac{\partial h}{\partial c_k} = h' = \mathrm{S}\,i\,a_{i-1}\frac{\partial h}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,i\,b_{i-1}\frac{\partial h}{\partial b_i}, \qquad (3)$$

$$\mathrm{S}\,(l-k)\,c_{k+1}\frac{\partial h}{\partial c_k} = x(lh - xh') = \qquad (4)$$
$$= \mathrm{S}\,(m-i)\,a_{i+1}\frac{\partial h}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,(n-i)\,b_{i+1}\frac{\partial h}{\partial b_i}$$

nebst

$$lxh = \mathrm{S}\,\{\,i a_{i-1}x^2 + (m-i)a_{i+1}\}\frac{\partial h}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,\{\,i b_{i-1}x^2 + (n-i)b_{i+1}\}\frac{\partial h}{\partial b_i},$$

$$0 = 2qh + \mathrm{S}\,\{\,i a_{i-1}x - m a_i + (m-i)\,a_{i+1}\frac{1}{x}\}\frac{\partial h}{\partial a_i} +$$
$$+ \mathrm{S}\,\{\,i b_{i-1}x - n b_i + (n-i)\,b_{i+1}\frac{1}{x}\}\frac{\partial h}{\partial b_i}.$$

Schließlich kann man für $h = x^l\mathfrak{h}$, $1 = x\mathfrak{x}$ auch schreiben:

$$lxh - x^2\frac{\partial h}{\partial x} = x^l\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{x}}$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{x}} = \mathrm{S}\,(m-i)\,a_{i+1}\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,(n-i)\,b_{i+1}\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial b_i},$$

wo

$$\mathfrak{h} = c_0 + \hat{l}_1 c_1 \mathfrak{x} + \hat{l}_2 c_2 \mathfrak{x}^2 \cdots + c_l \mathfrak{x}^l.$$

9.

Der Ausdruck einer beliebigen (simultanen) Kovariante h von f und g kann mit Hilfe ihres Wertes für $x = 0$ gebildet werden. Hierzu setze man in den Gleichungen

$$\varphi\xi = \varrho^m f, \quad \chi\xi = \varrho^n g \quad \text{und} \quad \psi\xi = \varepsilon^q \varrho^l h$$

$x = \xi + \mathfrak{x}$, wodurch $\delta = 1$, $\delta_1 = \mathfrak{x}$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 1$, $\varepsilon = 1$, $\varrho = 1$ werden, so ergibt sich für $\mathfrak{f} = f\mathfrak{x}$ u. s. w.

$$\varphi\xi = f(\mathfrak{x} + \xi) = \mathfrak{f} + \hat{m}_1\mathfrak{f}_{,}\xi + \hat{m}_2\mathfrak{f}_{,,}\xi^2 \cdots + \mathfrak{f}_{(m)}\xi^m$$

$$\chi\xi = \mathfrak{g} + \hat{n}_1\mathfrak{g}_{,}\xi + \hat{n}_2\mathfrak{g}_{,,}\xi^2 \ldots \qquad \psi\xi = \mathfrak{h} + \hat{l}_1 h_{,}\xi + \hat{l}_2\mathfrak{h}_{,,}\xi^2 \ldots$$

Da nun die Koeffizienten in ψ ebenso von denen in φ und χ abhängen, wie die c von den a und b, so erhält man der Gleichung

$$c_l = h(0) = \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\,a_0^{k_0}a_1^{k_1}\ldots a_m^{k_m}b_0^{l_0}b_1^{l_1}\ldots b_n^{l_n}$$

entsprechend

$$\mathfrak{h} = \psi(0) = \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{f}_{(m)}^{k_0}\mathfrak{f}_{(m-1)}^{k_1}\cdots\mathfrak{f}^{k_m}\mathfrak{g}_{(n)}^{l_0}\mathfrak{g}_{(n-1)}^{l_1}\cdots\mathfrak{g}^{l_n},$$

oder wenn x statt $\mathfrak{x}$ geschrieben wird:

$$h(x) = \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, f^{k_m} f_1^{k_{m-1}} \ldots f_{(m)}^{k_0}\, g^{l_n} g_1^{l_{n-1}} \ldots g_{(n)}^{l_0}.$$

Ist g Kovariante von f allein, so gelten selbstverständlich die einfacheren Formeln

$$g(0) = b_n = \mathrm{S}\,\mathfrak{n}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}$$
$$g(x) = \mathrm{S}\,\mathfrak{n}\, f^{k_m} f_1^{k_{m-1}} \ldots f_{(m)}^{k_0}.$$

Die gefundenen Ausdrücke lehren, daß sich *jede* Kovariante oder Invariante von $f\,g \ldots$ als ganze Funktion der Differentialquotienten $f_{(i)}\, g_{(i)} \ldots$ darstellen läßt, und zwar beträgt die Ordnung ϖ der Differentiationen

$$\varpi = \mathrm{S}\,(m-i)k_i + \mathrm{S}\,(n-i)\,l_i = m\mu + n\nu - q - l = q,$$

ist also dem Gewichte gleich. Der Grad der einzelnen Glieder der Summe dagegen wird

$$\mathrm{S}\, i k_i + \mathrm{S}\, i l_i = q + l.$$

Da nun h vom $l$ten Grade sein soll, so müssen die numerischen Koeffizienten $\mathfrak{l}$ der ganzen Funktion so beschaffen sein, daß sich die q höchsten Potenzen von x wegheben. Die beregte Eigenschaft, daß der Grad der ganzen Funktionen von $f g$ und ihren Differentialquotienten sich um ebenso viele Einheiten erniedrigt, als die Ordnung der Differentiationen, oder was Dasselbe ist, als das Gewicht der Kovariante beträgt, hätte man bei der Definition einer Kovariante als Ausgangspunkt nehmen können.[1])

---

1) Selbstverständlich kann man auch von dem Ausdrucke für

$$c_0 = \mathrm{S}\,\mathfrak{o}\, a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m}\, b_0^{l_0} b_1^{l_1} \ldots b_n^{l_n}$$

ausgehen und

$$c_l = (-1)^q\, \mathrm{S}\,\mathfrak{o}\, a_0^{k_m} a_1^{k_{m-1}} \ldots a_m^{k_0}\, b_0^{l_n} b_1^{l_{n-1}} \ldots b_n^{l_0}$$

setzen, wodurch

$$h(x) = (-1)^n\, \mathrm{S}\,\mathfrak{o}\, f^{k_0} f_1^{k_1} \ldots f_{(m)}^{k_m}\, g^{l_0} g_1^{l_1} \ldots g_{(n)}^{l_n}$$

hervorgeht. Hier wird

$$\varpi = \mathrm{S}\, i k_i + \mathrm{S}\, i l_i = q,$$

während der Grad der einzelnen Glieder

$$\mathrm{S}\,(m-i)\,k_i + \mathrm{S}\,(n-i)\,l_i = m\mu + n\nu - q = q + l$$

erhalten wird, also mit den oben abgeleiteten Resultaten in vollem Einklang.

In dem Summenausdruck für h hat x^{l+q} den Koeffizienten

$$\mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, a_0^{\mathrm{S}\,k_i} b_0^{\mathrm{S}\,l_i} = a_0^\mu b_0^\nu \mathrm{S}\,\mathfrak{l},$$

folglich ergibt sich die Gleichung

$$\mathrm{S}\,\mathfrak{l} = 0,$$

ausgenommen den Fall $q = 0$ oder $k_m = \mu$, $l_n = \nu$, d. i. $hx = f^\mu g^\nu$. Wenn für $q > 1$ auch der Koeffizient von x^{l+q-1} verschwinden soll, so erhält man die Bedingung

$$0 = \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, a_0^{\mu-1} b_0^{\nu-1} (a_1 b_0 \mathrm{S}\, i k_i + a_0 b_1 \mathrm{S}\, i l_i).$$

Ist nun h Kovariante von f allein, so wird

$$\mathrm{S}\, i k_i = q + l, \quad \mathrm{S}\, i l_i = 0,$$

mithin bleibt alsdann das Verschwinden von $\mathrm{S}\,\mathfrak{l}$ die ausreichende Bedingung, woraus zu schließen, daß das Gewicht q der Kovariante einer ganzen Funktion überhaupt nicht der Einheit gleich sein kann. Wir werden bald zeigen, daß nicht bloß die Summe $\mathrm{S}\,\mathfrak{l}$ der Koeffizienten in c_l, sondern allgemeiner $\mathrm{S}\,\mathfrak{k}$ in c_k verschwindet. Man kann ferner bemerken, daß die Funktion $(a_0 x + a_1)^m$ außer sich selbst gar keine Kovariante besitzt, weil

für $f = (a_0 x + a_1)^m$, $a_i = a_0^{m-i} a_1^i$ und $f_{(i)} = a_0^i (a_0 x + a_1)^{m-i}$,

also h wegen $\mathrm{S}\,\mathfrak{l} = 0$ identisch verschwindet.

Wenn $h_1 h_2 \ldots$ verschiedene Kovarianten bezeichnen, zwischen deren Nullwerten eine algebraische Gleichung stattfindet, so besteht dieselbe Gleichung auch für variable Werte von x. Denn jede identische Gleichung zwischen den Koeffizienten a und b bleibt identisch, wenn man $f_{(i)}$ und $g_{(i)}$ statt a_{m-i} und b_{n-i} schreibt. Aus gleichem Grunde kann man aus der Gleichung (D) des vor. Art., welche für $k = l$

$$0 = \mathrm{S}\,(m-i)\, a_{i+1} \frac{\partial h(0)}{\partial a_i} + \mathrm{S}\,(n-i)\, b_{i+1} \frac{\partial h(0)}{\partial b_i}$$

ergibt, durch Einführung von $f_{(i)}$ und $g_{(i)}$ die weitere Gleichung ableiten

$$0 = \mathrm{S}\, i f_{(i-1)} \frac{\partial h}{\partial f_{(i)}} + \mathrm{S}\, i g_{(i-1)} \frac{\partial h}{\partial g_{(i)}}.$$

Diese Relationen können zur Bestimmung der Koeffizienten $\mathfrak{l}$ im Ausdruck von h benutzt werden.

10.

Für die Bildung von Kovarianten mögen hier noch einige Vorschriften von allgemeinerer Natur entwickelt werden, welche häufig Anwendung finden. Wenn g eine Kovariante von f (Gewicht $p = \frac{1}{2}(m\mu - n)$) und h eine Kovariante oder Invariante von g (Gewicht $q = \frac{1}{2}(n\nu - l)$) bedeutet, so wird auch h Kovariante oder Invariante von f, wobei das Gewicht $r = \nu p + q$ und die Dimension $\mu + \nu$ hervorgeht. Dies folgt sogleich aus den Gleichungen

$$\varrho^m f(xa) = f(\xi\alpha), \quad \varepsilon^p \varrho^n g(xb) = g(\xi\beta) \quad \text{oder} \quad \varepsilon^p \varrho^n g(x\overset{\mu}{a}) = g(\xi\overset{\mu}{\alpha})$$

$$\varrho^n g(xb) = g(\xi\beta'), \quad \varepsilon^q \varrho^l h(xc) = h(x\gamma') = \varepsilon^q \varrho^l h(x\overset{\nu}{b}) = h(\xi\overset{\nu}{\beta'})$$

$$\varepsilon^{\nu p + q} \varrho^l h(xc) = h(\xi\gamma) = \varepsilon^r \varrho^l h(x\overset{\mu\nu}{a}) = h(\xi\overset{\mu\nu}{\alpha}).$$

Denn da γ' von β' ebenso abhängt, wie c von b (nämlich durch Ausdrücke von der νten Dimension), und $\beta = \varepsilon^p \beta'$ von α, wie b von a, so hängt auch $\gamma = \varepsilon^{\nu p} \gamma'$ von α ebenso ab, wie c von a.

Ebenso wird jede Kovariante h eines Produktes $fg = \mathfrak{p}$ simultane Kovariante der beiden Faktoren f und g vom Gewicht $q = \frac{1}{2}(m + n - l)$, wie die Gleichungen

$$\varrho^m f(xa) = f(\xi\alpha) = \varphi, \quad \varrho^n g(xb) = g(\xi\beta) = \chi, \quad \varepsilon^q \varrho^l h(xc) = h(\xi\gamma)$$

zeigen. Denn da durch Multiplikation

$$\varrho^{m+n} fg = \varphi\chi \quad \text{oder} \quad \varrho^{m+n} \mathfrak{p}(xd) = \mathfrak{p}(\xi\delta)$$

erhalten wird, und γ von δ ebenso abhängen soll, wie c von d, so muß neben δ auch γ von α und β ebenso abhängen wie d und c von a und b.

Ein einfaches Verfahren, um zu zwei Funktionen f und g eine Kovariante h abzuleiten, beruht auf dem von Gordan und Clebsch sogenannten *Überschiebungsprozesse*:

$$h = \frac{1}{m} f' g - \frac{1}{n} f g' = f_, g - f g_, = [fg],$$

denn mittelst

$$\varphi_, = \delta_2 \varrho^{m-1} f + \varepsilon \varrho^{m-2} f_, \quad \text{und} \quad \chi_, = \delta_2 \varrho^{n-1} g + \varepsilon \varrho^{n-2} g_,$$

erhält man sofort

$$\varepsilon \varrho^{m+n-2} h = \varphi_, \chi - \varphi \chi_, = [\varphi\chi] = h(\xi\alpha\beta).$$

Damit ist eine simultane Kovariante h vom Grade $m + n - 2$ und dem Gewichte $q = 1$ bestimmt, während die beiden Funktionen

f und g als von einander unabhängig vorausgesetzt werden. Die Koeffizienten in h sind dann bilineare homogene Funktionen der a und b.

Sollte jedoch g selbst als Kovariante von f (oder von noch weiteren Funktionen f_k) mit dem Gewicht $p = \frac{1}{2}(m\mu + m_k\mu_k - n)$ gegeben sein, so ist h als Kovariante der nämlichen Funktionen zu bezeichnen, deren Gewicht durch den Hinzutritt des Faktors ε^p in den Gleichungen für g und $g_,$ auf $q = p + 1$ steigt. In der Tat ergibt sich in Bezug auf die Koeffizienten von f die Dimension $\lambda = \mu + 1$, folglich wegen $l = m + n - 2$

$$q = \tfrac{1}{2}(m\lambda + m_k\mu_k - l) = p + 1.$$

Man überzeugt sich ferner auf demselben Wege, daß die Überschiebung zweier *beliebigen* Kovarianten $[g\mathfrak{g}] = h$ stets wieder eine Kovariante h von f liefert, indem

$$\varepsilon^{p + \mathfrak{p} + 1}\varrho^{n + \mathfrak{n} - 2}h(xa) = h(\xi\alpha)$$

von der Dimension $\mu + \mathfrak{u}$ hervorgeht. Wir bemerken zu gelegentlichem Gebrauche die Identitäten

$$f[gh] + g[hf] + h[fg] = 0,$$
$$[fj][gh] + [gj][hf] + [hj][fg] = 0.$$

Als weitere Verallgemeinerung hat man die *Kovariante der k-ten Überschiebung*

$$[fg]_k = f_{(k)}g - \bar{k}_1 f_{(k-1)}g_, + \bar{k}_2 f_{(k-2)}g_{,,} \cdots \pm fg_k = (-1)^k[gf]_k$$

eingeführt, wobei weder $f_{(k)}$ noch $g_{(k)}$ einen verschwindenden Nenner bekommen, also k weder m noch n übersteigen darf. Auch hier findet man

$$[\varphi\chi]_k = \varepsilon^k\varrho^{m+n-2k}[fg]_k = \varepsilon^k\varrho^{m+n-2k}h,$$

also ist h eine — von Clebsch als *einfach* bezeichnete — Kovariante von f und g vom Grade $m + n - 2k$, mit dem Gewichte $q = k$ und mit bilinearen Koeffizienten. Ist dagegen g selbst Kovariante vom Gewicht p, so erhöhen sich Dimension und Gewicht auf $\lambda = \mu + 1$ und $q = p + k$. Für $k = 0$ ist $h = fg$, was man als *nullte* Überschiebung bezeichnen kann.

Um ein naheliegendes Beispiel zu geben, setzen wir einfach $g = f$, $p = 0$, wodurch die Kovariante

$$[ff]_k = ff_{(k)} - \bar{k}_1 f_, f_{(k-1)} + \bar{k}_2 f_{,,} f_{(k-2)} \mp \cdots$$

hervorgeht, welcher Ausdruck allerdings für *ungerade* Werte von k identisch verschwindet, aber für *gerade* k auf den $2(m-k)$ten Grad steigt, mit dem Gewichte k und der zweiten Dimension. Für $k=m$ *gerade* liefert

$$[ff]_m = f f_{(m)} - \widehat{m}_1 f_{,} f_{(m-1)} + \widehat{m}_2 f_{,,} f_{(m-2)} \mp \cdots$$
$$= \frac{1}{m!}\{f f^{(m)} - f' f^{(m-1)} + f'' f^{(m-2)} \mp \cdots\}$$

den Ausdruck einer *Invariante* $2G$ vom Gewicht m und der zweiten Dimension, während die Variable x ganz herausgegangen ist. Mithin erhält man für $x=0$:

$$2G = a_0 a_m - \widehat{m}_1 a_1 a_{m-1} + \widehat{m}_2 a_2 a_{m-2} \mp \text{ etc.}$$

II.

Selbstverständlich gestatten die hisher angestellten Betrachtungen über Kovarianten oder Invarianten ganzer Funktionen Verallgemeinerungen nach mehrfacher Richtung, namentlich bei Vermehrung der Anzahl der Variabeln.[1]) Wir beschränken uns jedoch in dieser Beziehung auf die Erwähnung des einfachsten, auf die lineare Transformation beliebig vieler Variabeln bezüglichen Falles. Die elementare Auflösung eines Systems linearer Gleichungen von der Form

$$\underset{i}{\mathrm{S}}\, a_i^k x_i = y_k \quad \text{gibt} \quad R x_i = \underset{k}{\mathrm{S}}\, A_i^k y_k,$$

wo

$$R = |a_i^k| = \mathrm{S}\, a_i^k A_i^k$$

1) Um gewissen Sätzen und Ableitungen formell eine größere Übersichtlichkeit und Eleganz zu verleihen, hat man homogene Ausdrücke mittelst Einführung einer neuen Variablen y zu Grunde gelegt, also statt der Funktion fx die *binäre Form* $f(xy)$ als Ausgangspunkt gewählt. So erhält man z. B. für

$$f = a_0 x^m + \widehat{m}_1 a_1 x^{m-1} y + \widehat{m}_2 a_2 x^{m-2} y^2 \cdots + a_m y^m$$
$$= \frac{1}{m}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad g = \frac{1}{n}\left(x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$
$$h = [fg] = \frac{y}{mn}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{y}{mn}\frac{\partial(fg)}{\partial(xy)},$$

sodaß die Kovariante h, nach Weglassung des Faktors $y = \delta_2\xi + \delta_3 = \varrho$, mit der Funktionaldeterminante der Funktionen f und g nach x und y übereinkommt.

die Determinante des Systems bezeichnet. Führt man nun die lineare Transformation

$$x_i = \mathop{\mathrm{S}}_k \delta_i^k \xi_k \quad \text{aus, wodurch} \quad y_k = \mathop{\mathrm{S}}_i \alpha_i^k \xi_i$$

hervorgehen mag, so folgt

$$\mathsf{P}\,\xi_i = \mathop{\mathrm{S}}_k \mathsf{A}_i^k y_k\,,$$

und hier ist nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie

$$\mathsf{P} = \varepsilon R\,, \quad \text{wenn} \quad \varepsilon = |\,\delta_i^k\,|$$

die Determinante der linearen Substitution bedeutet, d. h. R ist eine Invariante der linearen Funktionen $y_k = f x_i$ vom Gewicht 1.

Es ist bereits bemerkt worden, daß ein Aggregat von Kovarianten nur dann kovariant bleibt, wenn die Summanden das nämliche Gewicht besitzen. Da das Produkt zweier (oder mehrerer) Kovarianten $h h_1 = h_2$ offenbar eine Kovariante liefert, deren Gewicht durch die Summe der Gewichte der Faktoren gegeben ist (und umgekehrt wird, wenn h_1 und h_2 Kovarianten sind, auch der Quotient $h = \frac{h_2}{h_1}$ eine solche), so können wir den Satz aussprechen: Bildet man eine ganze, mit unabhängigen (numerischen) Koeffizienten versehene Funktion verschiedener Kovarianten, so entsteht nur dann eine Kovariante, wenn die Gewichte der einzelnen Terme die nämlichen sind. Auch dürfen wir der Einfachheit halber annehmen, daß jene Funktion in Bezug auf die Koeffizienten *homogen* (und folglich in ihren einzelnen Termen auch von gleicher Dimension) sei, da entgegengesetzten Falles die homogenen Gruppen der ganzen Funktion auch getrennt als Kovarianten auftreten. Betrachten wir z. B. den Ausdruck

$$h = \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{k} \alpha_i [f g_i]_i\,,$$

und sei für die Kovarianten g_i

$$\mu = \lambda - 1\,, \quad n = l - m + 2i\,, \quad p = q - i\,,$$

so ist h eine Kovariante von f, Dimension λ, Grad l, Gewicht q.

Da die Anzahl aller zu gegebenen Funktionen gehörigen Kovarianten offenbar unerschöpflich ist, so fragt es sich, wie viel *unabhängige* Kovarianten existieren, zwischen denen keine algebraische Gleichung stattfindet. Daß deren Anzahl nur beschränkt

sein kann, erhellt schon aus dem Umstande, daß die Anzahl der eingehenden Argumente eine begrenzte ist, und z. B. in $f(xa)$ nur $m+2$ beträgt. Wenn diese aus der hinreichenden Anzahl von Kovarianten eliminiert werden, so gehen algebraische Gleichungen zwischen den Kovarianten hervor. Dasselbe gilt im Falle simultaner Kovarianten von der Elimination der Argumente der übrigen Formen. Die analoge Schlußweise läßt sich auf die Darstellung der Kovarianten durch Differentialquotienten in der Form

$$h = \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, f^{k_m} f_{,}^{k_{m-1}} \ldots f_{(m)}^{k_0}\, g^{l_n}\, g_{,}^{l_{n-1}} \ldots g_{(n)}^{l_0}$$

anwenden. Mittelst $m+n$ Kovarianten h müssen sich jedenfalls die $m+n$ Größen $f_{(i)}$ und $g_{(i)}$ eliminieren lassen, so daß abgesehen von f und g die Anzahl der unabhängigen Kovarianten $m+n$ nicht übersteigen kann. Im Folgenden wird sich jedoch ergeben, daß ein *vollständiges System unabhängiger Kovarianten*, abgesehen wiederum von den Funktionen f und g selbst, nur aus $m+n-1$ (simultanen) Kovarianten besteht, während bei *einer* Form fx sich alle Kovarianten algebraisch durch $m-1$ (resp. m) unabhängige Kovarianten ausdrücken lassen. Sofern diese algebraischen Ausdrücke *rational* sind, nennt man die unabhängigen Kovarianten des betreffenden Systems *associiert*. Man hat aber weiter nachgewiesen, daß sich durch Hinzunahme einer endlichen Anzahl weiterer Kovarianten sogenannte vollständige Systeme *irreduktibler* Kovarianten bilden lassen, welche die Eigenschaft besitzen, daß *jede* Kovariante sich als *ganze* Funktion der irreduktibeln Kovarianten ausdrücken läßt. Auf die betreffende *Theorie von der Endlichkeit der irreduktibeln Formensysteme*, welche von Gordan, Mertens, Hilbert u. A. begründet worden ist, und eigentümliche Schwierigkeiten bietet, werden wir jedoch hier nicht näher eingehen.

12.

Zur Aufstellung eines vollständigen Systems *associierter* Kovarianten führt der Hermitesche Fundamentalsatz[1]), zu welchem man durch die folgenden Betrachtungen gelangt.

---

1) Crelles Journal Bd. 52, S. 23, mit der Bemerkung „*Voici ce qu'il m'a été donné de trouver après de longues méditations sur ce sujet.*“

Für eine Kovariante hx kann man mittelst des Nullwertes $h(0)$ einen ähnlichen Ausdruck wie Art. 9 ableiten, wenn man in den Gleichungen

$$\varphi\xi = \varrho^m f, \quad \chi\xi = \varrho^n g \quad \text{und} \quad \psi\xi = \varepsilon^q \varrho^l h(xab) = h(\xi\alpha\beta),$$

welche für $\varrho x = \delta\xi + \delta_1$ identisch werden,

$$\delta = \mathfrak{x}, \quad \delta_1 = \mathfrak{x}\mathfrak{f}_, - \mathfrak{f}, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = \mathfrak{f}_,, \quad \text{mithin} \quad \varrho = \xi + \mathfrak{f}_,, \quad \varepsilon = \mathfrak{f}$$

substituiert. Dann tritt an die Stelle von x

$$\frac{\delta\xi + \delta_1}{\delta_2\xi + \delta_3} = \mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{f}}{\xi + \mathfrak{f}_,}$$

und man erhält durch die Entwickelung nach den Potenzen von ξ, wenn man zugleich x für $\mathfrak{x}$ schreibt:

$$(x+f_,)^m f\left(x - \frac{f}{\xi + f_,}\right) = \varphi\xi = f(\xi + f_,)^m - \widehat{m}_1 f f_,(\xi + f_,)^{m-1} \pm \cdots \pm f^m f_{(m)}$$
$$= f\{\xi^m + \widehat{m}_2 f_2 \xi^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3 \xi^{m-3} \ldots + f_m\},$$

$$(\xi + f_,)^n g\left(x - \frac{f}{\xi + f_,}\right) = \chi\xi = g(\xi + f_,)^n - \widehat{n}_1 f g_,(\xi + f)^{n-1} \pm \cdots \pm f^n g_{(n)}$$
$$= g\xi^n + \widehat{n}_1 \mathfrak{g}_1 \xi^{n-1} + \widehat{n}\, \mathfrak{g}_2 \xi^{n-2} \cdots + \mathfrak{g}_n,$$

$$f^q(\xi + f_,)^l h\left(x - \frac{f}{\xi + f_,}\right) = \psi\xi = f^q\{h\xi^l + \widehat{l}_1 \mathfrak{h}_1 \xi^{l-1} + \widehat{l}_2 \mathfrak{h}_2 \xi^{l-2} \cdots + \mathfrak{h}_l\}.$$

Hier ist

$$f_2 = -f_, f_, + f f_{,,} = -[f f_,],$$

$$f_3 = -2f_,^3 + 3 f f_, f_{,,} - f^2 f_{,,,} = 2[f f_2]$$

$$f_4 = -3 f_,^4 + 6 f f_,^2 f_{,,} - 4 f^2 f_, f_{,,,} + f^3 f_{,,,,}, \ldots$$

$$f_i = -(i-1) f_,^i + \widehat{i}_2 f f_,^{i-2} f_{,,} - \widehat{i}_3 f^2 f_,^{i-3} f_{,,,} \cdots + (-1)^i f^{i-1} f_{(i)}.$$

Da die Summe der Koeffizienten 0 ist, so überzeugt man sich leicht, daß für $f_{(i)} = (x+1)^{m-i}$ oder $a_i = 1$ die sämtlichen f_i verschwinden. Ferner erhält man

$$\mathfrak{g}_1 = f_, g - f g_, = [fg], \quad \mathfrak{g}_2 = f_,^2 g - 2 f f_, g_, + f^2 g_{,,}, \ldots$$

$$\mathfrak{g}_i = f_,^i g - \widehat{i}_1 f f_,^{i-1} g_, + \widehat{i}_2 f^2 f_,^{i-2} g_{,,} - \widehat{i}_3 f^3 f_,^{i-3} g_{,,,} \cdots + (-1)^i f^i g_{(i)}$$

$$\mathfrak{h}_i = f_,^i h - \widehat{i}_1 f f_,^{i-1} h_, + \widehat{i}_2 f^2 f_,^{i-2} h_{,,} - \widehat{i}_3 f^3 f_,^{i-3} h_{,,,} \cdots + (-1)^i f^i h_{(i)}$$

Auch ist ohne Weiteres klar, daß man in der vorstehenden Ableitung die Funktionen f und g mit einander vertauschen, also die entsprechenden Ausdrücke von $\mathfrak{f}_i$ und g_i bilden kann. Bedenkt man nun, daß jetzt

$$\alpha_i = f f_i, \quad \alpha_0 = f, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_i = \mathfrak{g}_i, \quad \gamma_i = f^q \mathfrak{h}_i,$$

so geht den Gleichungen

$$h(0) = c_l = \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, a_0^{k_0} \ldots a_m^{k_m} b_0^{l_0} \ldots b_n^{l_n}$$

$$c_0 = (-1)^q\, \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, a_0^{k_m} \ldots a_m^{k_0} b_0^{l_n} \ldots b_n^{l_0}$$

$$f^q h = \gamma_0 = (-1)^q\, \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, \alpha_0^{k_m} \ldots \alpha_m^{k_0} \beta_0^{l_n} \ldots \beta_n^{l_0}$$

wegen $\mathrm{S}\, k_i = \mu$ parallel die Formel:

$$(-1)^q f^{q-\mu} h(x) = \underset{k_{m-1}=0}{\mathrm{S}} \mathfrak{l}\, f_2^{k_{m-2}} f_3^{k_{m-3}} \ldots f_m^{k_0} g^{l_n} \mathfrak{g}_1^{l_{n-1}} \mathfrak{g}_2^{l_{n-2}} \ldots \mathfrak{g}_n^{l_0},$$

wenn in der Summe bloß diejenigen Glieder mitgenommen werden, für welche k_{m-1} *verschwindet.*

Vergleicht man damit den früher gefundenen Ausdruck

$$h(x) = \mathrm{S}\,\mathfrak{l}\, f^{k_m} f_{,}^{k_{m-1}} f_{,,}^{k_{m-2}} \ldots f_{(m)}^{k_0} g^{l_n} g_{,}^{l_{n-1}} g_{,,}^{l_{n-2}} \ldots g_{(n)}^{l_0},$$

so darf man den Satz aussprechen:

„wenn eine Kovariante h als Funktion der Differentialquotienten $f_{(i)}\, g_{(i)}$ .. gegeben ist, und man schreibt 1 statt f, 0 statt $f_{,}$ und im übrigen f_i statt $f_{(i)}$, $\mathfrak{g}_i$ statt $g_{(i)}$, so erhält man den Wert von $(-1)^q f^{q-\mu} h(x)$ ausgedrückt durch die Größen f_i und $\mathfrak{g}_i$."

Hier kann $hx = h0 = H$ auch eine simultane *Invariante* von f und g bedeuten. Für eine Kovariante g von f dagegen und $b_n = \mathrm{S}\,\mathfrak{n}\, a_0^{k_0} \ldots a_m^{k_m}$ wird einfacher

$$(-1)^p f^{p-\mu} gx = \underset{k_{m-1}=0}{\mathrm{S}} \mathfrak{n}\, f_2^{k_{m-2}} \ldots f_m^{k_0}$$

neben

$$gx = \mathrm{S}\,\mathfrak{n}\, f^{k_m} f_{,}^{k_{m-1}} \ldots f_{(m)}^{k_0},$$

sowie für eine Invariante $gx = g0 = G$ die entsprechende Gleichung gilt

$$(-1)^{\frac{1}{2}m\mu} f^{\frac{1}{2}(m-2)\mu}\, G = \underset{k_{m-1}=0}{\mathrm{S}} \mathfrak{n}\, f_2^{k_{m-2}} f_3^{k_{m-3}} \ldots f_m^{k_0}.$$

Da für $f = (x+1)^m$ die Werte f_i verschwinden, so ergibt sich mit Ausnahme des Falles $gx = f^\mu$, für $a_i = 1$: $gx = 0$ nebst $b_i = 0$ oder $\mathrm{S}\,\mathfrak{k} = 0$. und analog erhält man für $a_i = b_i = 1$: $hx = c_l = 0$ nebst

$$\mathrm{S}\,\mathfrak{l} = 0.$$

Diese Gleichungen bilden die Ergänzung zu der früher gefundenen Formel $\mathrm{S}\,\mathfrak{l} = 0$ und gelten für beliebige Kovarianten und Invarianten mit Ausschluß von $hx = f^\mu g^\nu$.

Wir bemerken noch, daß in dem Hermiteschen Ausdruck für hx sich keine Glieder fortheben, denn der Grad auf beiden Seiten ist

$$l + m(q - \mu) = \varpi.$$

In der Tat ist f_i vom Grade $(m - 2)i$, $\mathfrak{g}_i$ vom Grade $(m - 2)i + n$, also

$$\varpi = (m-2)\{\mathrm{S}(m-i)k_i + \mathrm{S}(n-i)l_i\} + n\mathrm{S}l_i = (m-2)q + n\nu = m(q-\mu) + l.$$

Alle Kovarianten, für welche $q = \mu$, lassen sich folglich als *ganze* Funktionen der $m + n$ Größen $f_2 f_3 \ldots f_m\, g\, \mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_n$ darstellen. Nur für $h = f^\mu$ ist $q < \mu$, es bleiben also die Fälle $q > \mu$ zu betrachten. Für $f = 0$ ergibt sich alsdann unter Berücksichtigung der Werte von

$$f_i = -(i - 1)f_{,}^{i}, \quad \mathfrak{g}_i = g f_{,}^{i},$$

sowie unter Weglassung der Faktoren $(-1)^\mu g^\nu f_{,}^{q}$, die Gleichung

$$0 = \underset{k_{m-1}=0}{\mathrm{S}} (-1)^{k_m}\,\mathfrak{l}\,(m-1)^{k_0}(m-2)^{k_1} \ldots 2^{k_{m-3}}.$$

13.

Der für die Kovariante hx gefundene Ausdruck durch f_i und g_i zeigt, daß wie bereits Art. 11 angedeutet wurde, nicht mehr als $m + n + 1$ (also abgesehen von f und g nur $m+n-1$) unabhängige Kovarianten existieren können, weil sich vermittelst derselben die $m + n + 1$ Größen f_i und g_i eliminieren lassen, wodurch eine algebraische Gleichung zwischen den Kovarianten hervorgeht. Der Hauptvorteil der von Hermite entdeckten Darstellung besteht nun darin, daß die Größen $f f_2 \ldots f_m\, g\, \mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_n$ sämtlich selbst Kovarianten sind, so daß mittelst der gegebenen Formel, der Definition des Art. 11 entsprechend, *jede* Kovariante und Invariante als *rationale* Funktion von $m + n + 1$ *associierten Kovarianten* ausgedrückt wird. Zugleich sind diese associierten Kovarianten so beschaffen, daß die rationale Funktion aus einer *ganzen* Funktion mit dem Nenner $f^{q-\mu}$ besteht, der für $l = (m - 2)\mu + n\nu$ von selbst wegfällt. Es versteht sich ferner, daß die rechte Seite der Hermiteschen Gleichung für ganz *beliebige* Werte von $\mathfrak{l}$, k_i und l_i eine Kovariante darstellt, wenigstens

wenn die einzelnen Produkte des Summenausdrucks gleiches Gewicht und gleiche Dimension besitzen.

Um nachzuweisen, daß die Funktionen f_i und g_i Kovarianten sind, wollen wir in den Gleichungen für $\varphi\xi$ und $\chi\xi$ x um Δx und ξ um $\Delta\xi$ wachsen lassen, wodurch

$$\varphi(\xi + \Delta\xi) = (\varrho + \delta_2\Delta\xi)^m f(x + \Delta x)$$
$$\chi(\xi + \Delta\xi) = (\varrho + \delta_2\Delta\xi)^n g(x + \Delta x)$$

nebst

$$\Delta\xi = \frac{\varrho^2\Delta x}{\varepsilon - \delta_2\varrho\Delta x} \quad \text{und} \quad \varrho + \delta_2\Delta\xi = \frac{\varepsilon\Delta\xi}{\varrho\Delta x}$$

hervorgeht. Setzt man hier

$$\Delta x = -\frac{f}{z + f_,},$$

so erhält man wegen

$$\delta_2\varrho^{m-1} f + \varepsilon\varrho^{m-2} f_, = \varphi_,:$$
$$\Delta\xi = -\frac{\varphi}{\zeta + \varphi_,}, \quad \zeta = \varepsilon\varrho^{m-2} z,$$

ferner

$$\left(\frac{\varepsilon\Delta\xi}{\varrho\Delta x}\right)^m f\left(x - \frac{f}{z + f_,}\right) = \varphi\left(\xi - \frac{\varphi}{\zeta + \varphi_,}\right)$$

oder

$$(\zeta + \varphi_,)^m \varphi\left(\xi - \frac{\varphi}{\zeta + \varphi_,}\right) = \varepsilon^m \varrho^{m(m-1)} (z + f_,)^m f\left(x - \frac{f}{z + f_,}\right)$$

nebst

$$(\zeta + \varphi_,)^n \chi\left(\xi - \frac{\varphi}{\zeta + \varphi_,}\right) = \varepsilon^n \varrho^{n(m-1)} (z + f_,)^n g\left(x - \frac{f}{z + f_,}\right).$$

Hier hängen auf der rechten Seite die ganzen Funktionen

$$(z + f_,)^m f\left(x - \frac{f}{z + f_,}\right) = F(xaz) \quad \text{und} \quad (z + f_,)^n g\left(x - \frac{f}{z + f_,}\right) = G(xaz)$$

ebenso von $x\,a\,z$ ab, wie die linken Seiten von $\xi\,\alpha\,\zeta$.

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichungen nach den Potenzen von z resp. ζ, so findet man

$$\varphi\{\zeta^m + \widehat{m}_2\varphi_2\zeta^{m-2} + \widehat{m}_3\varphi_3\zeta^{m-3}\ldots\} =$$
$$= \varepsilon^m\varrho^{m(m-1)} f\{z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3 z^{m-3}\ldots\}$$

$$\chi\zeta^n + \widehat{n}_1\chi_1\zeta^{n-1} + \widehat{n}_2\chi_2\zeta^{n-2}\ldots =$$
$$= \varepsilon^n\varrho^{n(m-1)}\{g z^n + \widehat{n}_1 g_1 z^{n-1} + \widehat{n}_2 g_2 z^{n-2}\ldots\}$$

folglich

$$\varphi\varphi_i\zeta^{m-i} = \varepsilon^m\varrho^{m(m-1)} f f_i z^{m-i},$$
$$\chi_i\zeta^{n-i} = \varepsilon^n\varrho^{n(m-1)} g_i z^{n-i},$$

sowie

$$\varphi_i(\xi) = \varepsilon^i \varrho^{i(m-2)} f_i(x) = f_i(\xi\,\alpha)$$
$$\chi_i(\xi) = \varepsilon^i \varrho^{i(m-2)+n} \mathfrak{g}_i(x) = \mathfrak{g}_i(\xi\,\alpha),$$

d. h. f_i ist Kovariante vom Grade $i(m-2)$, Gewicht i, Dimension $\mu = i$ und $\mathfrak{g}_i$ ist Kovariante vom Grade $i(m-2)+n$, Gewicht i, Dimensionen $\mu = i$, $\nu = 1$. Analoges würde von den associierten Kovarianten $\mathfrak{f}_i$ und g_i gelten.

14.

Als Beispiel für den Hermiteschen Satz wollen wir die Kovariante

$$[f f]_{2i} = 2 h_{2i}$$

benutzen, welche für gerade Werte des Index $2i$ zwischen 2 und m den Grad $2m - 4i$, die Dimension 2 und das Gewicht $2i$ besitzt. Die Gleichung

$$h_{2i} = f f_{(2i)} - \widehat{2i}_1 f_{,} f_{(2i-1)} + \widehat{2i}_2 f_{,,} f_{(2i-2)} \cdots + (-1)^i \frac{2i \cdot 2i-1 \ldots i+1}{1 \cdot 2 \ldots i} \frac{1}{2} f_{(i)} f_{(i)}$$

liefert sogleich wegen $q - \mu = 2i - 2$

$$f^{2i-2} h_{2i} = f_{2i} + \widehat{2i}_2 f_2 f_{2i-2} - \widehat{2i}_3 f_3 f_{2i-3} \cdots + (-1)^i \widehat{2i}_i \frac{1}{2} f_i f_i.$$

Schreibt man ferner

$$h_{2i+1} = 2[f h_{2i}],$$

so erhält man für ungerade Werte des Index $2i+1$ zwischen 3 und m eine Kovariante vom Grad $l = 3m - 4i - 2$, Dimension $\mu = 3$ und Gewicht $q = 2i + 1$. Da

$$h_{2i+1} = \frac{2}{m} f' h_{2i} - \frac{1}{m-2i} f h'_{2i}$$

und

$$\frac{1}{m-2i} h'_{2i} = f f_{(2i+1)} - (2i-1) f_{,} f_{(2i)} + \frac{2i \cdot 2i-3}{1 \cdot 2} f_{,,} f_{(2i-1)} - $$
$$- \frac{2i \cdot 2i-1 \cdot 2i-5}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_{,,,} f_{(2i-2)} \cdots + (-1)^i \frac{2i \cdot 2i-1 \cdots i+2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdots i} f_{(i)} f_{(i+1)},$$

so ergibt sich

$$f^{2i-2} h_{2i+1} = f_{2i+1} + \frac{2i \cdot 2i-3}{1 \cdot 2} f_2 f_{2i-1} - $$
$$- \frac{2i \cdot 2i-1 \cdot 2i-5}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_3 f_{2i-2} \cdots + (-1)^i \frac{2i \cdot 2i-1 \cdots i+2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdots i} f_i f_{i+1}.$$

Wenn wir auf die Inkongruenz in der Indexbezeichnung der Funktionen $f_2 f_3 \ldots f_m$ einerseits und $h_2 h_3 \ldots h_m$ andererseits hinweisen, so dürfen wir ein etwaiges Mißverständnis wohl nicht befürchten. Im Übrigen hat man

$$h_2 = f_2 = f f_{\prime\prime} - f_{\prime} f_{\prime}, \quad l = 2m - 4, \quad \mu = q = 2,$$
$$h_3 = f_3 = - f^2 f_{\prime\prime\prime} + 3 f f_{\prime} f_{\prime\prime} - 2 f_{\prime}^3, \quad l = 3m - 6, \quad \mu = q = 3,$$

also

$$h_2(0) = a_m a_{m-2} - a_{m-1}^2,$$
$$h_3(0) = - a_m^2 a_{m-3} + 3 a_m a_{m-1} a_{m-2} - 2 a_{m-1}^3.$$

Für $m = 3$, also $fx = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + \cdots$ erhält man die Art. 5 angeführte Kovariante

$$\overset{2}{g}(x) = - h_2 = (a_1^2 - a_0 a_2) x^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) x + (a_2^2 - a_1 a_3)$$

nebst

$$\overset{3}{g}(x) = - h_3 = (3 a_0 a_1 a_2 - 2 a_1^3 - a_0^2 a_3) x^3 + 3 (2 a_0 a_2^2 - a_1^2 a_2 - a_0 a_1 a_3) x^2$$
$$+ (a_1 a_2^2 + a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3) x + (2 a_2^3 + a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3),$$

wo beziehungsweise

$$n = p = \mu = 2 \quad \text{und} \quad n = p = \mu = 3.$$

Schon Clebsch und Gundelfinger haben bemerkt, daß die Kovarianten f_i und $\mathfrak{g}_i$ durch einfachere associierte Systeme ersetzt werden können. Als solche bieten sich an Stelle der f_i die h_i dar, denn wir sahen, daß h_i das Gewicht i und den Grad $\mu m - 2i$ besitzt, während für i gerade die Dimension $\mu = 2$ und für i ungerade $\mu = 3$ wird. Es sind also gegenüber f_i Grad und Dimension erniedrigt. Zugleich werden die f_i durch *ganze* Funktionen der h_i ausgedrückt. Denn da nach dem Früheren

$$h_2 = f_2, \qquad h_3 = f_3$$
$$f^2 h_4 = f_4 + 3 f_2 f_2, \qquad f^2 h_5 = f_5 + 2 f_2 f_3$$
$$f^4 h_6 = f_6 + 15 f_2 f_4 - 10 f_3 f_3, \qquad f^4 h_7 = f_7 + 9 f_2 f_5 - 5 f_3 f_4$$
$$f^6 h_8 = f_8 + 28 f_2 f_6 - 56 f_3 f_5 + 35 f_4 f_4$$
$$f^6 h_9 = f_9 + 20 f_2 f_7 - 28 f_3 f_6 + 14 f_4 f_5$$
$$f^8 h_{10} = f_{10} + 45 f_2 f_8 - 120 f_3 f_7 + 210 f_4 f_6 - 126 f_5 f_5$$
$$f^8 h_{11} = f_{11} + 35 f_2 f_9 - 75 f_3 f_8 + 90 f_4 f_7 - 42 f_5 f_6$$

u. s. w., so erhält man durch Auflösung dieser Gleichungen:

$$f_2 = h_2\,, \qquad f_3 = h_3\,,$$
$$f_4 = f^2 h_4 - 3 h_2^2\,, \qquad f_5 = f^2 h_5 - 2 h_2 h_3\,,$$
$$f_6 = f^4 h_6 - 15 f^2 h_2 h_4 + 10 h_3^2 + 45 h_2^3\,,$$
$$f_7 = f^4 h_7 - 9 f^2 h_2 h_5 + 5 f^2 h_3 h_4 + 3 h_2^2 h_3\,,$$
$$f_8 = f^6 h_8 - 28 f^4 h_2 h_6 + 56 f^2 h_3 h_5 - 35 f^4 h_4^2 + 630 f^2 h_2^2 h_4 - \\ - 392 h_2 h_3^2 - 1575 h_2^4$$
$$f_9 = f^6 h_9 - 20 f^4 h_2 h_7 + 28 f^4 h_3 h_6 - 14 f^4 h_4 h_5 + 222 f^2 h_2^2 h_5 - \\ - 492 f^2 h_2 h_3 h_4 + 280 h_3^3 + 1116 h_2^3 h_3$$

u. s. w.

Analog können die simultanen Kovarianten $\mathfrak{g}_i$ ersetzt werden durch die Überschiebungskovarianten bilinearer Dimension:

$$j_i = [f g]_i = (-1)^i \left\{ f g_{(i)} - \hat{i}_1 f_{\prime} g_{(i-1)} + \hat{i}_2 f_{\prime\prime} g_{(i-2)} \mp \cdots \right\},$$

oder wegen

$$l = m + n - 2i, \quad \mu = \nu = 1, \quad q = i:$$

$$f^{i-1} j_i = \mathfrak{g}_i + \hat{i}_2 f_2 \mathfrak{g}_{i-2} - \hat{i}_3 f_3 \mathfrak{g}_{i-3} \pm \cdots$$

Wir setzen voraus, daß i die Werte von 1 bis n annimmt, während $n \leqq m$ m nicht übersteigt. Für $m < n$ würde man

$$(-1)^q g^{q-\nu} h x = \underset{l_{n-1}=0}{\mathrm{S}} \; \mathrm{I}\, \mathfrak{f}^{k_m} \mathfrak{f}_1^{k_{m-1}} \ldots \mathfrak{f}_m^{k_0} g_2^{l_{n-2}} g_3^{l_{n-3}} \ldots g_n^{l_0}$$

zu bilden haben. Für $x = 0$ ergibt sich

$$j_i(0) = (-1)^i \left\{ a_m b_{n-i} - \hat{i}_1 a_{m-1} b_{n-i+1} + \hat{i}_2 a_{m-2} b_{n-i+2} \mp \cdots \right\},$$

dagegen für $f x = 0$ und $i > 1$, wodurch $f_i = -(i-1) f_{\prime}^i$, $\mathfrak{g}_i = g f_{\prime}^i$:

$$0 = 1 - \hat{i}_2 + 2\hat{i}_3 - 3\hat{i}_4 \pm \cdots + (-1)^{i-1} \left\{ (i-3)\hat{i}_2 - (i-2)\hat{i}_1 + (i-1) \right\},$$

wie leicht direkt zu verifizieren.

Man erhält jetzt die Gleichungen

$$j_1 = \mathfrak{g}_1\,, \qquad f j_2 = \mathfrak{g}_2 + f_2 g\,,$$
$$f^2 j_3 = \mathfrak{g}_3 + 3 f_2 \mathfrak{g}_1 - f_3 g\,, \qquad f^3 j_4 = \mathfrak{g}_4 + 6 f_2 \mathfrak{g}_2 - 4 f_3 \mathfrak{g}_1 + f_4 g$$

u. s. w., mithin nach Substitution der Werte von f_i:

$$\mathfrak{g}_1 = j_1\,, \qquad \mathfrak{g}_2 = f j_2 - g h_2\,,$$
$$\mathfrak{g}_3 = f^2 j_3 - 3 h_2 j_1 + g h_3\,,$$
$$\mathfrak{g}_4 = f^3 j_4 - 6 f h_2 j_2 + 4 h_3 j_1 - f^2 g h_4 + 9 g h_2^2\,,$$
$$\mathfrak{g}_5 = f^4 j_5 - 10 f_2 \mathfrak{g}_3 + 10 f_3 \mathfrak{g}_2 - 5 f_4 \mathfrak{g}_1 + f_5 g$$
$$= f^4 j_5 - 10 f^2 h_2 j_3 + 10 f h_3 j_2 - 5 f^2 h_4 j_1 + 45 h_2^2 j_1 + \\ + f^2 g h_5 - 22 g h_2 h_3 \text{ u. s. w.}$$

15.

Wir haben bisher die Kovarianten $h x$ als simultane Kovarianten der beiden Funktionen f und g betrachtet. Wenn eine simultane Kovariante eines Systems von noch mehr Formen gegeben ist, so lassen sich die bisherigen Entwickelungen ohne Schwierigkeit auf diesen Fall ausdehnen. Von besonderem Interesse ist dagegen der Fall $g = f$, in welchem abgesehen von f die Funktionen $f_2 f_3 \dots f_m$ oder $h_2 h_3 \dots h_m$ das ganze System unabhängiger associierter Kovarianten umfassen.

Die im Art. 12 gefundene Gleichung

$$(z + f_{,})^m f\left(x - \frac{f}{z + f_{,}}\right) = f\left\{z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3 z^{m-3} + \cdots\right\}$$

kann für

$$y = x - \frac{f}{z + f_{,}} \quad \text{oder} \quad z = \frac{f}{x - y} - f_{,}$$

geschrieben werden

$$f^{m-1} x f y = (x - y)^m \left\{z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \text{ etc.}\right\}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die ganzen Funktionen $m$ten Grades

$$z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \cdots \quad \text{und} \quad f y = a_0 y^m + \cdots$$

gleichzeitig verschwinden, daß also die Wurzeln beider Funktionen im engsten Zusammenhange stehen. Für $f y = 0$ wird

$$z = \frac{f x - f y}{x - y} - f_{,} \quad \text{eine Wurzel der Gleichung}$$

$$z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3 z^{m-3} + \cdots + f_m = 0,$$

in der die Variable x offenbar ganz beliebig gewählt, also auch gleich Null oder Unendlich gesetzt werden kann.

Für $x = 0$ wird z. B.

$$a_m^{m-1} f y = (-1)^m y^m \left\{z^m + \widehat{m}_2 f_2^0 z^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3^0 z^{m-3} \dots\right\},$$

wo

$$z = -a_{m-1} - \frac{a_m}{y} \quad \text{und}$$

$$f_i^0 = -(i-1)\, a_{m-1}^i + \widehat{i}_2 a_m a_{m-1}^{i-2} a_{m-2} \cdots + (-1)^i a_m^{i-1} a_{m-i}.$$

Analog ergibt sich für $x = \infty$, wenn man vorher durch $x^{m(m-1)}$ dividiert und

$$\frac{z}{x^{m-2}} = \zeta, \quad \text{sowie} \quad \frac{f_i}{x^{i(m-2)}} = \varphi_i \quad \text{setzt:}$$

$$a_0^{m-1} f y = \zeta^m + \widehat{m}_2 \varphi_2 \zeta^{m-2} + \widehat{m}_3 \varphi_3 \zeta^{m-3} + \cdots,$$

und hier wird für wachsende Werte von x

$$\zeta = a_0 y + a_1 ,$$

während

$$\varphi_i = a_0^{i-1} a_i - \widehat{i}_1 a_0^{i-2} a_1 a_{i-1} + \widehat{i}_2 a_0^{i-3} a_1^2 a_{i-2} \cdots + (-1)^i \{ \widehat{i}_2 a_0 a_1^{i-2} a_2 - (i-1) a_1^i \}$$

den Koeffizienten der höchsten Potenz von x in f_i bedeutet.

Nach dem Früheren hat man ferner den Satz, daß *jede beliebige* Kovariante gx von f mit dem Gewicht p und der Dimension μ aus dem Werte

$$gx = F(f_{(m)} f_{(m-1)} \ldots f, f) \quad \text{oder} \quad g0 = b_n = F(a_0 a_1 \ldots a_{m-1} a_m)$$

durch den Ausdruck hervorgeht

$$(-1)^p f^{p-\mu} gx = F(f_m f_{m-1} \ldots f_2 \, 0 \, 1),$$

wo die associierten Kovarianten f_i als Koeffizienten der sogenannten *kanonischen* (Cayley) oder *typischen* (Clebsch) Gleichung für z definiert sind. Diese zuerst wohl von Hermite in Betracht gezogene Gleichung[1]) hat für $fy = 0$ die Wurzeln

$$z = (a_0 y + a_1) x^{m-2} + (a_0 y^2 + \widehat{m}_1 a_1 y + \widehat{m-1}_1 a_2) x^{m-3} + + (a_0 y^3 + \widehat{m}_1 a_1 y^2 + \widehat{m}_2 a_2 y + \widehat{m-1}_2 a_3) x^{m-4} + \cdots \text{ bis } + (a_0 y^{m-2} + \widehat{m}_1 a_1 y^{m-3} \cdots + m_3 a_{m-3} y + \widehat{m-1}_2 a_{m-2}) x - a_{m-1} - \frac{a_m}{y}$$

nebst

$$a_0 y^{m-1} + \widehat{m}_1 a_1 y^{m-2} \cdots + \widehat{m}_2 a_{m-2} y + \widehat{m-1}_1 a_{m-1} = - a_{m-1} - \frac{a_m}{y}$$

$$a_0 y^{m-2} + \widehat{m}_1 a_1 y^{m-3} \cdots + \widehat{m}_3 a_{m-3} y + \widehat{m-1}_2 a_{m-2} = - \left\{ (m-1) a_{m-2} + m \frac{a_{m-1}}{y} + \frac{a_m}{y^2} \right\},$$

während für beliebige Werte von x und y:

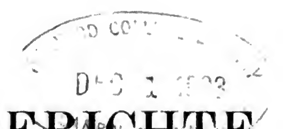
$$(x-y) z = (a_0 x^{m-1} + \widehat{m-1}_1 a_1 x^{m-2} + \widehat{m-1}_2 a_2 x^{m-3} \cdots + \widehat{m-1}_1 a_{m-2} x + a_{m-1}) y + (a_1 x^{m-1} + \widehat{m-1}_1 a_2 x^{m-2} + \widehat{m-1}_2 a_3 x^{m-3} \cdots + \widehat{m-1}_1 a_{m-1} x + a_m).$$

1) Crelles Journal Bd. 52, S. 27.

Druckfertig erklärt 26. VIII. 1903.]

INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.



BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

FÜNFUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1903.

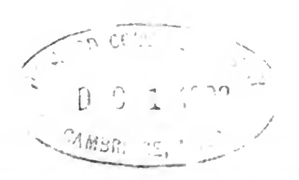
V.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1903.

Einzelpreis 1 Mark 50 Pfg.



ALLGEMEINE ÖFFENTLICHE SITZUNG VOM 1. AUGUST 1903.

Vorträge:

Herr H. Credner: „Der vogtländische Erdbebenschwarm vom 13. Februar bis 9. Mai 1903 und seine Registrierung durch das Wiechertsche Pendelseismometer in Leipzig".

Herr Franz Etzold: „Bericht über die von Wiecherts astatischem Pendelseismometer in Leipzig vom 1. Januar bis 30. Juni 1903 registrierten Fernbeben und Pulsationen".

SITZUNG DER KLASSE VOM 1. AUGUST 1903.

Ernennung des Herrn Prof. Dr. Johannes Felix zum außerordentlichen Mitglied der Klasse.

Vorträge:

Herr C. Neumann teilt einen Aufsatz von Herrn Prof. M. Krause mit: „Über Mittelwertsätze im Gebiete der Doppelsummen und Doppelintegrale".

Derselbe spricht: „Über eine gewisse Gattung von Kugelflächen-Integralen".

Herr Hölder teilt einen Aufsatz von Herrn Young (Cambridge) mit: „Zur Lehre von den nicht abgeschlossenen Punktmengen".

Über Mittelwertsätze im Gebiete der Doppelsummen und Doppelintegrale.

Von

M. Krause.

In einer Arbeit über die Fourierschen Reihen mit zwei veränderlichen Größen, welche sich in diesen Berichten findet[1]), habe ich auf einige zweite Mittelwertsätze für Doppelintegrale hingewiesen. Zugleich bemerkte ich, daß ich durch Herrn O. Stolz auf eine Arbeit von Herrn Arzelà aus dem vorigen

1) Sitzung vom 8. Juni d. J.

Jahre aufmerksam gemacht worden bin, die sich in den Memorie della R. Accad. delle scienze dell' Istituto di Bologna befindet und auch zweite Mittelwertsätze für Doppelintegrale enthält, die aber von den meinigen verschieden sind.[1]) Es ist der Zweck der vorliegenden Betrachtungen, auf die verschiedenen Arten von zweiten Mittelwertsätzen, die in der Theorie der zweifachen Integrale möglich sind, etwas näher einzugehen und zwar unter Beschränkung auf die eigentlichen zweifachen Integrale. Es zeigt sich hier eine größere Anzahl solcher Sätze, wie in der Theorie der einfachen Integrale, wo ja im wesentlichen nur eine Kategorie vorhanden ist. Um diesen Umstand klar hervortreten zu lassen, werden zuerst die endlichen Doppelsummen untersucht. Je nach der Art der Zusammenfassung der Glieder ergeben sich für diese Doppelsummen verschiedene Arten von Mittelwertsätzen. Aus diesen Fällen werden zwei herausgegriffen, die von besonderer Bedeutung sind, und zu Ende geführt. Durch Spezialisierung der Glieder der Doppelsumme und durch einen Grenzübergang kommt man dann zu zwei verschiedenen Kategorien von zweiten Mittelwertsätzen für eigentliche Doppelintegrale. *Die erste enthält Sätze von der Art, wie sie von mir in der citierten Arbeit angegeben worden sind, die zweite Sätze von der Art, wie sie zuerst Herr Arzelà aufgestellt hat.* Die Untersuchungen unterscheiden sich im letzten Falle von denen von Herrn Arzelà u. a. in folgender Weise. Einerseits sind die Untersuchungen von Herrn Arzelà insofern weitreichender als die meinen, als die Funktion $f(x, y)$ nicht der Beschränkung der Stetigkeit unterliegt. Ich habe letztere gewählt, um den elementaren Charakter der Ableitungen zu wahren und die Methode in möglichst klarer Weise hervortreten zu lassen. Andererseits sind die Untersuchungen von Herrn Arzelà nicht so weitreichend als die meinigen, als Herr Arzelà annimmt, daß die Funktion $f(x, y)$ in der Richtung der positiven Achsen entweder gleichzeitig fällt oder steigt, während bei mir noch zwei weitere Annahmen hinzutreten.

§ 1.

Aufstellung einer ersten Kategorie von Mittelwertsätzen für Doppelsummen.

Versteht man unter q_{rs} fest bestimmte endliche Größen, bei welchen r der Reihe nach die Werte $0, 1, \cdots m$, s der Reihe

1) Siehe Seite 169 meiner Arbeit.

nach die Werte 0, 1, $\cdots n$ durchlaufen kann, so mögen mit ihrer Hilfe die Doppelsummen gebildet werden:

$$\begin{array}{l} q_{00} + q_{01} + \cdots q_{0s} \\ + q_{10} + q_{11} + \cdots q_{1s} \\ \qquad\cdots \\ + q_{r0} + q_{r1} + \cdots q_{rs}. \end{array}$$

Wir bezeichnen diese Summen durch $J^{(1)}_{rs}$. Die obere Grenze derselben für die definierten Werte von r und s sei $H^{(1)}$, die untere $G^{(1)}$. Aus der Definition der Größen J folgt dann, daß wir die Größen q_{rs} in der Form schreiben können:

$$q_{rs} = J^{(1)}_{rs} - J^{(1)}_{r-1\,s} - J^{(1)}_{r\,s-1} + J^{(1)}_{r-1\,s-1}.$$

Für die Fälle $r = 0$ resp. $s = 0$ modifizieren sich diese Resultate in leichter Weise.

Es seien ferner die Größen c_{rs} weitere fest bestimmte Größen für die definierten Werte von r und s, dann bilden wir mit ihrer und mit Hilfe der Größen q die weitere Doppelsumme:

$$\begin{array}{l} c_{00}q_{00} + c_{01}q_{01} + \cdots c_{0n}q_{0n} \\ + c_{10}q_{10} + c_{11}q_{11} + \cdots c_{1n}q_{1n} \\ \qquad\cdots \\ + c_{m0}q_{m0} + c_{m1}q_{m1} + \cdots c_{mn}q_{mn}, \end{array}$$

die wir durch S_{mn} bezeichnen. *Um die Betrachtung dieser Summe handelt es sich.* Dieselbe kann geschrieben werden:

$$\begin{array}{l} c_{00}J^{(1)}_{00} + c_{01}(J^{(1)}_{01} - J^{(1)}_{00}) + \cdots c_{0n}(J^{(1)}_{0n} - J^{(1)}_{0\,n-1}) \\ + c_{10}(J^{(1)}_{10} - J^{(1)}_{00}) + c_{11}(J^{(1)}_{11} - J^{(1)}_{01} - J^{(1)}_{10} + J^{(1)}_{00}) + \cdots c_{1n}(J^{(1)}_{1n} - J^{(1)}_{0n} - J^{(1)}_{1\,n-1} + J^{(1)}_{0\,n-1}) \\ \qquad\cdots \\ + c_{m0}(J^{(1)}_{m0} - J^{(1)}_{m-1\,0}) + \cdots c_{mn}(J^{(1)}_{mn} - J^{(1)}_{m-1\,n} - J^{(1)}_{m\,n-1} + J^{(1)}_{m-1\,n-1}), \end{array}$$

oder anders geordnet:

$$\begin{array}{l} J^{(1)}_{00}(c_{00} - c_{01} - c_{10} + c_{11}) + J^{(1)}_{01}(c_{01} - c_{02} - c_{11} + c_{12}) + \cdots + J^{(1)}_{0n}(c_{0n} - c_{1n}) \\ + J^{(1)}_{10}(c_{10} - c_{11} - c_{20} + c_{21}) + J^{(1)}_{11}(c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22}) + \cdots + J^{(1)}_{1n}(c_{1n} - c_{2n}) \\ \qquad\cdots \\ + J^{(1)}_{m0}(c_{m0} - c_{m1}) + \cdots + J^{(1)}_{m\,n-1}(c_{m\,n-1} - c_{mn}) + J^{(1)}_{mn}c_{mn}. \end{array}$$

Nehmen wir nun an, daß die vier Ausdrücke:

$$\begin{array}{l} c_{\alpha\beta} - c_{\alpha\,\beta+1} - c_{\alpha+1\,\beta} + c_{\alpha+1\,\beta+1}, \\ c_{m\beta} - c_{m\,\beta+1}, \quad c_{\alpha n} - c_{\alpha+1\,n}, \quad c_{mn}, \end{array}$$

die wir unter D_1 zusammenfassen wollen für alle α und β, die den Ungleichungen Genüge leisten:

$$0 \leqq \alpha < m, \quad 0 \leqq \beta < n,$$

dasselbe Zeichen besitzen, die Null eingeschlossen, so folgt, daß wir unsere Summe S_{mn} in der Form schreiben können:

$$M^{(1)} c_{00},$$

wenn unter $M^{(1)}$ ein Mittelwert zwischen $G^{(1)}$ und $H^{(1)}$ verstanden wird, d. h. ein Mittelwert der Größen $J_{rs}^{(1)}$, wenn r und s die vorhin angegebenen Werte durchlaufen.

Wir können aber einen Schritt weiter gehen. Wir wollen annehmen, daß die Zeichen der unter D_1 zusammengefaßten Ausdrücke zwar teilweise von einander verschieden sind, aber ein jedes für sich ungeändert bleibt, wenn α resp. β die genannten Werte durchläuft.

Verstehen wir dann unter $M_1^{(1)}$ die Größe $J_{mn}^{(1)}$,

„ $M_2^{(1)}$ einen Mittelwert von $J_{\alpha n}^{(1)}$,

„ $M_3^{(1)}$ „ „ „ $J_{m\beta}^{(1)}$,

„ $M_4^{(1)}$ „ „ „ $J_{\alpha\beta}^{(1)}$,

so folgt der

Lehrsatz: Ändern die unter D_1 zusammengefaßten Ausdrücke für die angegebenen Werte von α und β ihr Zeichen nicht, so kann der Wert der Doppelsumme S_{mn} geschrieben werden:

$$M_1^{(1)} c_{mn} + M_2^{(1)}(c_{0n} - c_{mn}) + M_3^{(1)}(c_{m0} - c_{mn}) + M_4^{(1)}(c_{00} - c_{0n} - c_{m0} + c_{mn}).$$

Der Satz kann mehrfach spezialisiert werden. Nehmen wir insbesondere an, daß das Zeichen aller unter D_1 zusammengefaßter Ausdrücke dasselbe ist, so folgt:

$$S_{mn} = M^{(1)} c_{00},$$

wie schon vorhin bemerkt wurde.

Es ist der entwickelte Satz ein Mittelwertsatz für Doppelsummen.

Wir können noch mehrere Sätze derselben Art angeben. Wir setzen dazu die Größe $J_{rs}^{(2)}$ gleich:

$$\begin{array}{llll} q_{rs} & + q_{rs+1} & + \cdots & q_{rn} \\ + q_{r+1s} & & + \cdots & q_{r+1n} \\ & \cdots & & \\ + q_{ms} & & + \cdots & q_{mn}, \end{array}$$

dann können die Größen q_{rs} geschrieben werden:

$$q_{rs} = J_{rs}^{(2)} - J_{r+1s}^{(2)} - J_{rs+1}^{(2)} + J_{r+1s+1}^{(2)}$$

mit Ausnahme von $r = m$ und $s = n$, und unsere Summe S_{mn} nimmt die Form an:

$$\begin{aligned} & c_{00}(J_{00}^{(2)} - J_{10}^{(2)} - J_{01}^{(2)} + J_{11}^{(2)}) + \cdots c_{0n}(J_{0n}^{(2)} - J_{1n}^{(2)}) \\ + & c_{10}(J_{10}^{(2)} - J_{20}^{(2)} - J_{11}^{(2)} + J_{21}^{(2)}) + \cdots c_{1n}(J_{1n}^{(2)} - J_{2n}^{(2)}) \\ & \qquad \cdots \\ + & c_{m0}(J_{m0}^{(2)} - J_{m1}^{(2)}) \qquad + \cdots c_{mn} J_{mn}^{(2)}. \end{aligned}$$

Anders angeordnet können wir die Summe schreiben:

$$\begin{aligned} & J_{00}^{(2)} c_{00} + J_{01}^{(2)}(c_{01} - c_{00}) + \cdots + J_{0n}^{(2)}(c_{0n} - c_{0n-1}) \\ & J_{10}^{(2)}(c_{10} - c_{00}) + J_{11}^{(2)}(c_{11} - c_{10} - c_{01} + c_{00}) + \cdots + J_{1n}^{(2)}(c_{1n} - c_{1n-1} - c_{0n} + c_{0n-1}) \\ & \qquad \cdots \\ & J_{m0}^{(2)}(c_{m0} - c_{m-10}) \qquad + \cdots + J_{mn}^{(2)}(c_{mn} - c_{mn-1} - c_{m-1n} + c_{m-1n-1}). \end{aligned}$$

Wir bilden nun die vier Ausdrücke:

$$c_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta+1} - c_{\alpha+1\beta} + c_{\alpha+1\beta+1}$$

$$c_{0\beta+1} - c_{0\beta}, \quad c_{\alpha+10} - c_{\alpha 0}, \quad c_{00},$$

und zwar für die vorhin angegebenen Werte von α und β, fassen dieselben unter D_2 zusammen, setzen ferner $M_1^{(2)}$ gleich $J_{00}^{(2)}$ und verstehen

unter $M_2^{(2)}$ einen Mittelwert von $J_{\alpha 0}^{(2)}$,

" $M_3^{(2)}$ " " " $J_{0\beta}^{(2)}$,

" $M_4^{(2)}$ " " " $J_{\alpha\beta}^{(2)}$,

so folgt der

Lehrsatz: Ändern die vier unter D_2 zusammengefaßten Ausdrücke für die angegebenen Werte von α und β ihr Zeichen nicht, so kann der Wert der Doppelsumme S_{mn} geschrieben werden:

$$M_1^{(2)} c_{00} + M_2^{(2)}(c_{m0} - c_{00}) + M_3^{(2)}(c_{0n} - c_{00}) + M_4^{(2)}(c_{mn} - c_{m0} - c_{0n} + c_{00}).$$

Nehmen wir insbesondere an, daß das Zeichen aller vier unter D_2 zusammengefaßten Ausdrücke dasselbe sei, so folgt:

$$S_{mn}' = M^{(2)} c_{mn},$$

wenn unter $M^{(2)}$ ein Mittelwert von $J_{rs}^{(2)}$ für $r = 0, 1, \cdots m$, $s = 0, 1, \cdots n$ verstanden wird.

Drittens wollen wir unter $J_{rs}^{(3)}$ die Doppelsumme verstehen:

$$\begin{array}{llll} q_{r0} & + q_{r1} & + \cdots q_{rs} \\ + q_{r+1\,0} & & + \cdots q_{r+1\,s} \\ & \cdots & \\ + q_{m0} & & + \cdots q_{ms}, \end{array}$$

dann können die Größen q_{rs} geschrieben werden:

$$q_{rs} = J_{rs}^{(3)} - J_{rs-1}^{(3)} - J_{r+1\,s}^{(3)} + J_{r+1\,s-1}^{(3)},$$

und unsere Summe S_{mn} nimmt die Form an:

$$\begin{array}{lll} c_{00}(J_{00}^{(3)} - J_{10}^{(3)}) + c_{01}(J_{01}^{(3)} - J_{00}^{(3)} - J_{11}^{(3)} + J_{10}^{(3)}) + \cdots c_{0n}(J_{0n}^{(3)} - J_{0n-1}^{(3)} - J_{1n}^{(3)} + J_{1n-1}^{(3)}) \\ \cdots \\ + c_{m0}J_{m0}^{(3)} \quad + c_{m1}(J_{m1}^{(3)} - J_{m0}^{(3)}) \quad + \cdots c_{mn}(J_{mn}^{(3)} - J_{mn-1}^{(3)}) \end{array}$$

oder auch:

$$\begin{array}{ll} J_{00}^{(3)}(c_{00} - c_{01}) + J_{01}^{(3)}(c_{01} - c_{02}) & + \cdots + J_{0n}^{(3)} c_{0n} \\ + J_{10}^{(3)}(c_{10} - c_{11} - c_{00} + c_{01}) & + \cdots + J_{1n}^{(3)}(c_{1n} - c_{0n}) \\ \cdots & \\ + J_{m0}^{(3)}(c_{m0} - c_{m1} - c_{m-1\,0} + c_{m-1\,1}) & + \cdots + J_{mn}^{(3)}(c_{mn} - c_{m-1\,n}). \end{array}$$

Wir bilden nun die vier Ausdrücke D_3:

$$c_{\alpha+1\,\beta} - c_{\alpha+1\,\beta+1} - c_{\alpha\beta} + c_{\alpha\,\beta+1},$$

$$c_{0\beta} - c_{0\,\beta+1}, \quad c_{\alpha+1\,n} - c_{\alpha n}, \quad c_{0n},$$

setzen ferner $M_1^{(3)}$ gleich $J_{0n}^{(3)}$ und verstehen

unter $M_2^{(3)}$ einen Mittelwert von $J_{0\beta}^{(3)}$,
" $M_3^{(3)}$ " " " $J_{\alpha n}^{(3)}$,
" $M_4^{(3)}$ " " " $J_{\alpha\beta}^{(3)}$,

so folgt der

Lehrsatz: Ändern die vier unter D_3 zusammengefaßten Ausdrücke für die angegebenen Werte von α und β ihr Zeichen nicht, so kann die Doppelsumme S_{mn} geschrieben werden:

$$M_1^{(3)} c_{0n} + M_2^{(3)}(c_{00} - c_{0n}) + M_3^{(3)}(c_{mn} - c_{0n}) + M_4^{(3)}(c_{m0} - c_{00} - c_{mn} + c_{0n}).$$

Nehmen wir insbesondere an, daß das Zeichen aller vier unter D_3 zusammengefaßten Ausdrücke dasselbe sei, so folgt:

$$S_{mn} = M^{(3)} c_{m0},$$

wenn unter $M^{(3)}$ ein Mittelwert von $J_{rs}^{(3)}$ verstanden wird.

Endlich letztens wollen wir unter $J_{rs}^{(4)}$ die Doppelsumme verstehen:

$$\begin{aligned} & q_{0s} + q_{0s+1} + \cdots q_{0n} \\ + & q_{1s} + q_{1s+1} + \cdots q_{1n} \\ & \cdots \\ + & q_{rs} + q_{rs+1} + \cdots q_{rn}, \end{aligned}$$

dann folgt, daß q_{rs} geschrieben werden kann:

$$q_{rs} = J_{rs}^{(4)} - J_{rs+1}^{(4)} - J_{r-1s}^{(4)} + J_{r-1s+1}^{(4)}.$$

Wir können nun ähnlich vorgehen, wie in den drei ersten Fällen.

Wir bilden die vier Ausdrücke D_4:

$$c_{\alpha+1\beta} - c_{\alpha+1\beta+1} - c_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta+1},$$

$$c_{m\beta+1} - c_{m\beta}, \quad c_{\alpha 0} - c_{\alpha+10}, \quad c_{m0},$$

setzen ferner $M_1^{(4)}$ gleich $J_{m0}^{(4)}$ und verstehen unter:

$M_2^{(4)}$ einen Mittelwert von $J_{m\beta}$
$M_3^{(4)}$ " " " $J_{\alpha 0}$
$M_4^{(4)}$ " " " $J_{\alpha\beta}$,

so folgt der

Lehrsatz: Ändern die vier unter D_4 zusammengefaßten Ausdrücke für die angegebenen Werte von α und β ihr Zeichen nicht, so kann der Wert der Doppelsumme S_{mn} geschrieben werden:

$$M_1^{(4)} c_{m0} + M_2^{(4)}(c_{mn} - c_{m0}) + M_3^{(4)}(c_{00} - c_{m0}) + M_4^{(4)}(c_{0n} - c_{mn} - c_{00} + c_{m0}).$$

Nehmen wir insbesondere an, daß das Zeichen aller vier unter D_4 zusammengefaßten Ausdrücke dasselbe ist, so folgt:

$$S_{mn} = M^{(4)} c_{0n},$$

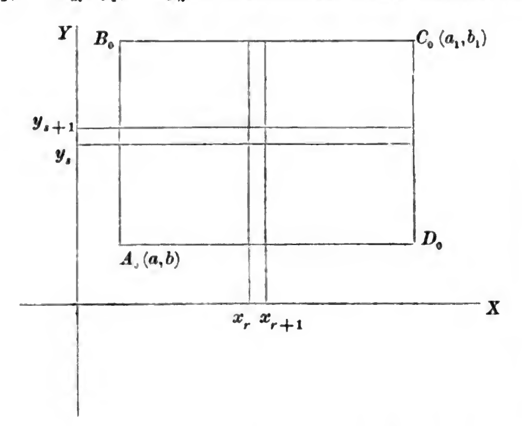
wenn unter $M^{(4)}$ ein Mittelwert von $J_{rs}^{(4)}$ verstanden wird.

§ 2.

Spezialisierung der gefundenen Resultate.

Wir wollen nun nicht mit den allgemeinen Mittelwertsätzen weiter operieren, sondern den Größen q_{rs} gewisse spezielle Werte beilegen. Wir denken uns dazu ein Rechteck a, b; a_1, b_1 oder auch $A_0 B_0 C_0 D_0$ vorgelegt, dessen Seiten parallel den Achsen sind, wir denken uns ferner eine *endliche* Funktion $\varphi(x, y)$ der beiden veränderlichen Größen x und y gegeben, *die über das Ge-*

biet unseres Rechteckes ein eigentliches zweifaches oder Doppelintegral besitzt. Das Rechteck möge ferner durch die Linien $x_1, x_2, \cdots x_m; y_1, \cdots y_n$ in eine endliche Anzahl kleinerer Recht-



ecke geteilt werden, wobei die Ausdrücke x, wie y der Größe nach geordnet sind, x_0 setzen wir gleich a, y_0 gleich b, x_{m+1} gleich a_1, y_{n+1} gleich b_1.

Dann wollen wir das Doppelintegral der Funktion $\varphi(x, y)$ erstreckt über die Fläche $x_r, y_s; x_{r+1}, y_{s+1}$ bezeichnen durch:

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}}\int_{y_s}^{y_{s+1}} \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

und diese Größe gleich q_{rs} *setzen.*

Unter diesen Voraussetzungen sind die Größen J_{rs} auch durch Doppelintegrale der Funktion $\varphi(x, y)$ darstellbar und zwar wird:

$$J_{rs}^{(1)} = \int_a^{x_{r+1}}\int_b^{y_{s+1}}, \quad J_{rs}^{(2)} = \int_{x_r}^{a_1}\int_{y_s}^{b_1}, \quad J_{rs}^{(3)} = \int_{x_r}^{a_1}\int_b^{y_{s+1}}, \quad J_{rs}^{(4)} = \int_a^{x_{r+1}}\int_{y_s}^{b_1}.$$

Neben diesen Größen können dann aber auch die von uns eingeführten Mittelwerte durch Doppelintegrale derselben Funktion $\varphi(x, y)$ dargestellt werden. In der Tat, nehmen wir das Integral:

$$\int_a^u \int_b^v \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

und lassen u und v unabhängig von einander alle Werte von x_1 bis a_1, resp. y_1 bis b_1 durchlaufen, so ist unser Integral eine stetige Funktion von u und v, nimmt also jeden Wert zwischen der oberen und unteren Grenze, diese Größen einbegriffen, an. Zu den Integralen, die wir auf solche Weise erhalten, gehören dann auch die Größen $J_{r,s}^{(1)}$ und hieraus folgt, daß wir schreiben können:

$$M^{(1)} = \int_a^\xi \int_b^\eta \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

wobei ξ und η jedenfalls den Ungleichungen Genüge leisten:

$$a < \xi \leqq a_1, \quad b < \eta \leqq b_1.$$

Ebenso einfach können die Mittelwerte $M_\varepsilon^{(1)}$ durch Integrale dargestellt werden und zwar wird:

$$M_1^{(1)} = \int_a^{a_1} \int_b^{b_1}, \quad M_2^{(1)} = \int_a^{a_1} \int_b^{\eta_1}, \quad M_3^{(1)} = \int_a^{\xi_1} \int_b^{b_1}, \quad M_4^{(1)} = \int_a^{\xi_2} \int_b^{\eta_2},$$

wobei die Größen ξ_1 und ξ_2 zwischen a und a_1, die Größen η_1 und η_2 zwischen b und b_1 gelegen sein müssen, in beiden Fällen die Grenzen ausgeschlossen. Es könnten die Grenzen von ξ und η noch schärfer präzisiert werden, indessen sehen wir davon ab. *Wir wollen in der Folge immer nur von Mittelwerten zwischen a und a_1, b und b_1 sprechen und auch hierbei nicht einmal hinzufügen, ob etwa eine oder beide Grenzen in den einzelnen Fällen hinzuzunehmen ist.* Ferner wollen wir in der Folge die Indices von den Größen ξ und η fortlassen. Es sind dieselben hinzugefügt worden, um anzudeuten, daß die Größe ξ_1 in $M_3^{(1)}$ eine andere sein kann als ξ in $M^{(1)}$ etc. Es soll in Zukunft als selbstverständlich angenommen werden, daß die Größen ξ und η bei den verschiedenen Mittelwerten verschiedene Werte haben können.

In ähnlicher Weise können die übrigen Größen M behandelt werden. Wir erhalten die folgenden Resultate: Es wird:

$$M_1^{(\varepsilon)} = \int_a^{a_1} \int_b^{b_1} \qquad \varepsilon = 1, 2, 3, 4,$$

ferner ergibt sich

für $M^{(2)}$ und $M_4^{(2)}$ ein Ausdruck von der Form $\int\limits_{\xi}^{a_1}\int\limits_{\eta}^{b_1}$,

„ $M^{(3)}$ „ $M_4^{(3)}$ „ „ „ „ „ $\int\limits_{\xi}^{a_1}\int\limits_{b}^{\eta}$,

„ $M^{(4)}$ „ $M_4^{(4)}$ „ „ „ „ „ $\int\limits_{a}^{\xi}\int\limits_{\eta}^{b_1}$,

Endlich wird

$$M_2^{(2)} = \int\limits_{a}^{a_1}\int\limits_{\eta}^{b_1}, \quad M_3^{(2)} = \int\limits_{\xi}^{a_1}\int\limits_{b}^{b_1},$$

$$M_2^{(3)} = \int\limits_{a}^{a_1}\int\limits_{b}^{\eta}, \quad M_3^{(3)} = \int\limits_{\xi}^{a_1}\int\limits_{b}^{b_1},$$

$$M_2^{(4)} = \int\limits_{a}^{a_1}\int\limits_{\eta}^{b_1}, \quad M_3^{(4)} = \int\limits_{a}^{\xi}\int\limits_{b}^{b_1}.$$

Fassen wir die Resultate zusammen, so finden wir den

Lehrsatz: Versteht man unter $\varphi(x, y)$ eine endliche Funktion der Größen x und y, die für das Gebiet des Rechtecks $A_0B_0C_0D_0$ ein Doppelintegral besitzt und setzt:

$$q_{rs} = \int\limits_{x_r}^{x_{r+1}}\int\limits_{y_s}^{y_{s+1}} \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

so können die sämtlichen im vorigen Paragraphen eingeführten Mittelwerte M in der vorhin angegebenen Weise durch Doppelintegrale der Funktion $\varphi(x, y)$ dargestellt werden und zwar erstreckt über Rechtecke, die einen Teil des ursprünglichen Rechtecks ausmachen und deren Seiten parallel den Achsen sind.

Es möge bemerkt werden, daß wir die Eigenschaft der Endlichkeit der Funktion $\varphi(x, y)$ unter gewissen Einschränkungen hätten fallen lassen können, indessen möge hierauf nicht näher eingegangen werden.

§ 3.

Aufstellung einer zweiten Kategorie von Mittelwertsätzen im Gebiete der Doppelsummen.

Neben den im ersten Paragraphen entwickelten Mittelwertsätzen können noch andere aufgestellt werden, von denen wir auf die folgenden näher eingehen.

Wir nehmen dieselbe Doppelsumme $J_{rs}^{(1)}$, die im ersten Paragraphen behandelt worden ist:

$$\begin{array}{l} q_{00} + q_{01} + \cdots q_{0s} \\ + q_{10} + q_{11} + \cdots q_{1s} \\ \cdots \\ + q_{r0} + q_{r1} + \cdots q_{rs} \end{array}$$

und zwar auch für $r = 0, 1, \cdots m$; $s = 0, 1, \cdots n$. Die Summe der Glieder in den einzelnen Horizontalreihen bezeichnen wir der Reihe nach durch:

$$i_{0s}^{(1)}, \; i_{1s}^{(1)}, \cdots i_{rs}^{(1)}.$$

Wir greifen nun $i_{rs}^{(1)}$ heraus, halten r fest und lassen s alle Werte von 0 bis n durchlaufen, dann gehört zu dieser Reihe der Größen i eine untere Grenze $g_r^{(1)}$, eine obere Grenze $h_r^{(1)}$.

Wir bilden ferner die Summen:

$$g_0^{(1)} + g_1^{(1)} + \cdots g_r^{(1)}$$

und

$$h_0^{(1)} + h_1^{(1)} + \cdots h_r^{(1)}$$

und lassen r alle Werte von 0 bis m durchlaufen. Die untere Grenze der ersten Reihe bezeichnen wir durch $g^{(1)}$, die obere der zweiten durch $h^{(1)}$.

Wir haben auf diesem Wege zwei Grenzen $g^{(1)}$ und $h^{(1)}$ gefunden, die von den Grenzen $G^{(1)}$ und $H^{(1)}$, die wir im ersten Paragraphen definierten, im allgemeinen verschieden sein werden. Ein einfaches Beispiel wird die Richtigkeit der Behauptung zeigen

Wir nehmen die Summe:

$$\begin{array}{l} 1 + 3 + 5 - 1 - 2 \\ + 4 - 1 - 2 - 3 - 1. \end{array}$$

Dann nimmt die Reihe der Größen:

$$\begin{array}{lllll} J_{00}^{(1)}, & J_{01}^{(1)}, & J_{02}^{(1)}, & J_{03}^{(1)}, & J_{04}^{(1)} \\ J_{10}^{(1)}, & J_{11}^{(1)}, & J_{12}^{(1)}, & J_{13}^{(1)}, & J_{14}^{(1)} \end{array}$$

die Gestalt an:

$$\begin{matrix} 1, & 4, & 9, & 8, & 6 \\ 5, & 7, & 10, & 6, & 3. \end{matrix}$$

Es ist also:

$$G^{(1)} = 1, \quad H^{(1)} = 10.$$

Dagegen ist die Reihe der Größen:

$$i_{0s}^{(1)}: 1, 4, 9, 8, 6 \text{ also } g_0^{(1)} = 1, \ h_0^{(1)} = 9,$$
$$i_{1s}^{(1)}: 4, 3, 1, -2, -3 \text{ also } g_1^{(1)} = -3, \ h_1^{(1)} = 4.$$

Hieraus folgt:

$$g^{(1)} = -2, \quad h^{(1)} = 13.$$

Wie wir sehen, ist das Intervall von $g^{(1)}$ bis $h^{(1)}$ ein größeres, als das Intervall von $G^{(1)}$ bis $H^{(1)}$, und was hier gilt, wird ähnlich allgemein gelten oder genauer gesagt, es ist allgemein:

$$g^{(1)} \leqq G^{(1)},$$
$$h^{(1)} \geqq H^{(1)}.$$

Wir bilden nun wieder dieselbe Summe S_{mn} wie im ersten Paragraphen:

$$\begin{aligned} & c_{00}\, q_{00} + c_{01}\, q_{01} + \cdots + c_{0n}\, q_{0n} \\ & + c_{10}\, q_{10} + c_{11}\, q_{11} + \cdots + c_{1n}\, q_{1n} \\ & \qquad \cdots \\ & + c_{m1} q_{m1} + c_{m1} q_{m1} + \cdots + c_{mn} q_{mn}. \end{aligned}$$

Da allgemein:

$$q_{rs} = i_{rs}^{(1)} - i_{rs-1}^{(1)}$$

mit Ausnahme von $s = 0$ ist, so können wir unsere Summe schreiben:

$$\begin{aligned} & c_{00}\, i_{00}^{(1)} + c_{01}\, (i_{01}^{(1)} - i_{00}^{(1)}) + \cdots + c_{0n}\, (i_{0n}^{(1)} - i_{0n-1}^{(1)}) \\ & + c_{10}\, i_{10}^{(1)} + c_{11}\, (i_{11}^{(1)} - i_{10}^{(1)}) + \cdots + c_{1n}\, (i_{1n}^{(1)} - i_{1n-1}^{(1)}) \\ & \qquad \cdots \\ & + c_{m0} i_{m0}^{(1)} + c_{m1} (i_{m1}^{(1)} - i_{m0}^{(1)}) + \cdots + c_{mn} (i_{mn}^{(1)} - i_{mn-1}^{(1)}). \end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned} & i_{00}^{(1)}\, (c_{00} - c_{01}) + c_{01}^{(1)} (c_{01} - c_{02}) + \cdots + i_{0n}^{(1)} c_{0n} \\ & + i_{10}^{(1)}\, (c_{10} - c_{11}) + c_{11}^{(1)} (c_{11} - c_{12}) + \cdots + i_{1n}^{(1)} c_{1n} \\ & \qquad \cdots \\ & + i_{m0}^{(1)} (c_{m0} - c_{m1}) + \cdots \qquad + \cdots + i_{mn}^{(1)} c_{mn}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, daß die sämtlichen Differenzen:

$$c_{r\beta} - c_{r\beta+1} \text{ und die Größen } c_{rn}$$

für die mehrfach genannten Werte von β und r positiv oder Null sind.

Dann kann S_{mn} zwischen zwei Grenzen eingeschlossen werden und zwar der Größe:

$$c_{00}g_0^{(1)} + c_{10}g_1^{(1)} + \cdots c_{m0}g_m^{(1)}$$

als unterer und:

$$c_{00}h_0^{(1)} + c_{10}h_1^{(1)} + \cdots c_{m0}h_m^{(1)}$$

als oberer Grenze.

Wir hätten zweitens die Annahme machen können, daß die Größen:

$$c_{r\beta} - c_{r\beta+1} \text{ und } c_{rn}$$

stets negativ oder Null sind, dann bleiben die obigen Größen Grenzwerte, nur vertauscht sich die obere und die untere Grenze.

Wir bleiben bei der ersten Annahme. Dann können wir mit den Summen:

$$c_{00}g_0^{(1)} + c_{10}g_1^{(1)} + \cdots c_{m0}g_m^{(1)}$$
$$c_{00}h_0^{(1)} + c_{10}h_1^{(1)} + \cdots c_{m0}h_m^{(1)}$$

wie mit den ursprünglichen verfahren. Für die erste ist:

$$c_{00}g^{(1)}$$

die untere, für die zweite:

$$c_{00}h^{(1)}$$

die obere Grenze, vorausgesetzt, daß die weiteren Ungleichungen bestehen:

$$c_{\alpha 0} - c_{\alpha+1 0} \geqq 0, \quad \alpha = 0, 1, \cdots m-1.$$

Ähnlich ist der zweite Fall zu behandeln. Wir erhalten den

Lehrsatz: Ändern die Differenzen:

$$c_{r\beta} - c_{r\beta+1} \text{ und } c_{\alpha 0} - c_{\alpha+1 0}$$

ihr Zeichen nicht und ist das Zeichen in beiden Fällen dasselbe und zwar von c_{mn} — wobei c_{mn} auch Null sein kann — so hat die Summe S_{mn} den Wert:

$$S_{mn} = m^{(1)} c_{00},$$

wobei $m^{(1)}$ ein Mittelwert zwischen $g^{(1)}$ und $h^{(1)}$ ist.

Zu bemerken ist, daß c_{00} dasjenige Glied in der Reihe der Größen c ist, von dem aus die übrigen Glieder fallen oder doch

nicht steigen oder umgekehrt, je nach der Art des gemeinsamen Zeichens.

Wir nehmen zweitens die Doppelsumme:

$$\begin{array}{l} q_{rs} + q_{rs+1} + \cdots + q_{rn} \\ + q_{r+1s} + q_{r+1s+1} + \cdots + q_{r+1n} \\ \cdots \\ + q_{ms} + q_{ms+1} + \cdots q_{mn} \end{array}$$

und bezeichnen die Summe der Glieder in den einzelnen Horizontalreihen resp. durch:

$$i_{rs}^{(2)},\ i_{r+1s}^{(2)},\ \cdots i_{ms}^{(2)}.$$

Wir greifen $i_{rs}^{(2)}$ heraus, halten r fest und lassen s alle Werte von 0 bis n durchlaufen, dann gehört zu den entsprechenden Werten von i eine obere Grenze $h_r^{(2)}$ und eine untere Grenze $g_r^{(2)}$. Wir bilden ferner die Summen:

$$\begin{array}{l} g_r^{(2)} + g_{r+1}^{(2)} + \cdots g_m^{(2)} \\ h_r^{(2)} + h_{r+1}^{(2)} + \cdots h_m^{(2)} \end{array}$$

und lassen r alle Werte von 0 bis m durchlaufen. Die untere Grenze der ersten Reihe sei $g^{(2)}$, die obere der zweiten $h^{(2)}$.

Da die Beziehung besteht:

$$q_{rs} = i_{rs}^{(2)} - i_{rs+1}^{(2)},$$

so können wir die Summe S_{mn} schreiben:

$$\begin{array}{l} c_{00}\,(i_{00}^{(2)} - i_{01}^{(2)}) + c_{01}\,(i_{01}^{(2)} - i_{02}^{(2)}) + \cdots + c_{0n} i_{0n}^{(2)} \\ + c_{10}\,(i_{10}^{(2)} - i_{11}^{(2)}) + c_{11}\,(i_{11}^{(2)} - i_{12}^{(2)}) + \cdots + c_{1n} i_{1n}^{(2)} \\ \cdots \\ + c_{m0}(i_{m0}^{(2)} - i_{m1}^{(2)}) + c_{m1}(i_{m1}^{(2)} - i_{m2}^{(2)}) + \cdots + c_{mn} i_{mn}^{(2)}, \end{array}$$

oder auch:

$$\begin{array}{l} i_{00}^{(2)} c_{00} + i_{01}^{(2)}(c_{01} - c_{00}) + \cdots + i_{0n}^{(2)}(c_{0n} - c_{0n-1}) \\ + i_{10}^{(2)} c_{10} + i_{11}^{(2)}(c_{11} - c_{10}) + \cdots + i_{1n}^{(2)}(c_{1n} - c_{1n-1}) \\ \cdots \\ + i_{m0}^{(2)} c_{m0} + i_{m1}^{(2)}(c_{m1} - c_{m0}) + \cdots + i_{mn}^{(2)}(c_{mn} - c_{mn-1}). \end{array}$$

Wenn dann die Ungleichungen bestehen:

$$c_{r\beta+1} - c_{r\beta} \geqq 0$$

und die Größen c_{r0} positiv oder Null sind, so liegt die Summe S_{mn} zwischen der Größe:

$$c_{0n} g_0^{(2)} + c_{1n} g_1^{(2)} + \cdots c_{mn} g_m^{(2)}$$

als unterer und:

$$c_{0n} h_0^{(2)} + c_{1n} h_1^{(2)} + \cdots c_{mn} h_m^{(2)}$$

als oberer Grenze.

Nehmen wir die weiteren Ungleichungen hinzu:

$$c_{\alpha+1\,n} - c_{\alpha n} \geqq 0,$$

so ist unsere Summe S_{mn} zwischen der Größe:

$$c_{mn} g^{(2)}$$

als unterer und der Größe:

$$c_{mn} h^{(2)}$$

als oberer Grenze enthalten. Ein ähnliches Resultat würde sich ergeben, wenn die Zeichen in den Ungleichungen die umgekehrten sind.

Wir erhalten den

Lehrsatz: Ändern die beiden Ausdrücke:

$$c_{r\beta+1} - c_{r\beta} \quad \textit{und} \quad c_{\alpha+1\,n} - c_{\alpha n}$$

ihr Zeichen nicht und ist das Zeichen in beiden Ausdrücken dasselbe und zwar von c_{00} *— die Null einbegriffen — so hat die Doppelsumme* S_{mn} *den Wert:*

$$S_{mn} = m^{(2)} c_{mn},$$

wobei $m^{(2)}$ *einen Mittelwert zwischen* $g^{(2)}$ *und* $h^{(2)}$ *bedeutet.*

Zu bemerken ist, daß c_{mn} dasjenige Glied in der Reihe der Größen c ist, von dem aus die übrigen Glieder fallen oder doch nicht steigen oder umgekehrt.

Wir können die Doppelsumme S_{mn} noch zwischen andere Grenzen einschließen. Wir gehen dazu zunächst wie im ersten Falle vor, bilden dann aber die Summen:

$$g_r^{(1)} + g_{r+1}^{(1)} + \cdots g_m^{(1)}$$

und

$$h_r^{(1)} + h_{r+1}^{(1)} + \cdots h_m^{(1)}$$

und nennen die untere Grenze der ersten Summe $g^{(3)}$, die obere der zweiten $h^{(3)}$.

Wenn dann die Ungleichungen bestehen:

$$c_{r\beta} - c_{r\beta+1} \geqq 0$$

und die Größen c_{rn} positiv sind, so liegt die Summe S_{mn} zwischen

$$c_{00} g_0^{(1)} + c_{10} g_1^{(1)} + \cdots c_{m0} g_m^{(1)}$$

als unterer und:

$$c_{00} h_0^{(1)} + c_{10} h_1^{(1)} + \cdots c_{m0} h_m^{(1)}$$

als oberer Grenze.

Nehmen wir dann an, daß die Ungleichungen bestehen:

$$c_{\alpha+1\,0} - c_{\alpha 0} \geqq 0,$$

so liegt die Summe S_{mn} zwischen

$$c_{m0} g^{(3)}$$

als unterer und

$$c_{m0} h^{(3)}$$

als oberer Grenze.

Wir folgern hieraus ähnlich wie vorhin den

Lehrsatz: Ändern die beiden Ausdrücke:

$$c_{r\beta} - c_{r\beta+1} \quad \textit{und} \quad c_{\alpha+1\,0} - c_{\alpha 0}$$

ihr Zeichen nicht und ist das Zeichen in beiden Ausdrücken dasselbe und zwar von c_{0n}, so hat die Summe S_{mn} den Wert:

$$S_{mn} = m^{(3)} c_{m0},$$

wobei $m^{(3)}$ einen Mittelwert zwischen $g^{(3)}$ und $h^{(3)}$ bedeutet.

Zu bemerken ist, daß c_{m0} dasjenige Glied in der Reihe der Größen c ist, von dem aus die übrigen Glieder fallen oder doch nicht steigen oder umgekehrt.

Endlich gehen wir zunächst so vor wie im zweiten Falle und bilden sodann die Summen:

$$g_0^{(2)} + g_1^{(2)} + \cdots g_r^{(2)},$$

$$h_0^{(2)} + h_1^{(2)} + \cdots h_r^{(2)}$$

und nennen die untere Grenze der ersten $g^{(4)}$, die obere der letzten $h^{(4)}$.

Es ergibt sich dann der

Lehrsatz: Ändern die beiden Ausdrücke:

$$c_{r\beta+1} - c_{r\beta} \quad \textit{und} \quad c_{\alpha n} - c_{\alpha+1\,n}$$

ihr Zeichen nicht und ist das Zeichen in beiden Ausdrücken dasselbe und zwar von c_{m0}, so hat die Summe S_{mn} den Wert:

$$m^{(4)} c_{0n},$$

wenn $m^{(4)}$ einen Mittelwert zwischen $g^{(4)}$ und $h^{(4)}$ bedeutet.

Zu bemerken ist, daß c_{0n} dasjenige Glied in der Reihe der Größen c ist, von dem aus die übrigen Glieder fallen oder doch nicht steigen oder umgekehrt.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß der Inhalt dieser vier Sätze im wesentlichen derselbe ist.

§ 4.

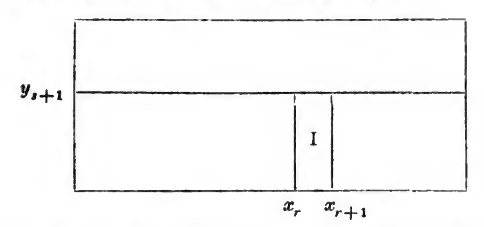
Spezialisierung der im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate.

Wir wollen die Resultate des dritten Paragraphen in derselben Weise spezialisieren, wie die Resultate des zweiten.

Wir setzen dazu:

$$q_{rs} = \int_{x_r}^{x_{r+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

wobei für $\varphi(x, y)$ die früheren Bedingungen gelten.



Dann werden die Größen $i_{rs}^{(1)}$ auch als Doppelintegrale geschrieben werden können, und zwar wird:

$$i_{rs}^{(1)} = \int_{x_r}^{x_{r+1}} \int_{b}^{y_{s+1}} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Es ist das Doppelintegral also über das in der Figur angedeutete Rechteck I zu erstrecken. Wir wollen andererseits das Doppelintegral betrachten:

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} \int_{b}^{v} \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

und v in stetiger Weise alle Werte von b bis b_1 durchlaufen lassen. Dann erhalten wir auf diesem Wege alle Größen $i_{r,s}^{(1)}$, ferner aber folgt aus den gemachten Annahmen, daß ein jeder Mittelwert der Größen $i_{r,s}^{(1)}$, wenn s die Werte von 0 bis n durchläuft, geschrieben werden kann:

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}}\int_b^{\eta_r}\varphi(x,y)\,dx\,dy\,,$$

wenn η_r einen Mittelwert zwischen b und b_1 bedeutet. Modifizieren wir dann die Schlußweise des vorigen Paragraphen etwas, um kürzer zum Ziele zu gelangen, so können wir sagen, daß die Summe S_{mn} jedenfalls die Form haben muß:

$$c_{00}\int_a^{x_1}\int_b^{\eta_0}+c_{10}\int_{x_1}^{x_2}\int_b^{\eta_1}+\cdots c_{m0}\int_{x_m}^{a_1}\int_b^{\eta_n}.$$

Die Größen η liegen alle zwischen b und b_1. Wir können dieselben als Werte einer und derselben Funktion von x ansehen, die in den Intervallen von a bis x_1, x_1 bis x_2 etc. stets denselben Wert besitzt, dagegen von Intervall zu Intervall sich ändert. Wir wollen dieselbe durch $\psi\,(x)$ bezeichnen, wobei zu bemerken ist, daß $\psi\,(x)$ von m und n abhängen wird. Wir wollen aber davon absehen, diesen Umstand durch Hinzufügung von Indices anzudeuten. Wir können von dieser Funktion jedenfalls so viel aussagen, daß ihre Werte sämtlich zwischen b und b_1 gelegen sein müssen.

Unsere Summe kann unter solchen Umständen geschrieben werden:

$$c_{00}\int_a^{x_1}\int_b^{\psi(x)}+c_{10}\int_{x_1}^{x_2}\int_b^{\psi(x)}+\cdots c_{m0}\int_{x_m}^{a_1}\int_b^{\psi(x)}$$

und es ist jetzt nur nötig, einen analytischen Ausdruck für den Mittelwert der Summen:

$$\int_a^{x_1}\int_b^{\psi(x)}+\int_{x_1}^{x_2}\int_b^{\psi(x)}+\cdots\int_{x_r}^{x_{r+1}}\int_b^{\psi(x)}$$

aufzustellen. Eine solche Summe können wir aber bezeichnen durch

$$\int_a^{x_{r+1}}\int_b^{\psi(x)} \varphi(x,y)\,dc\,dy\,,$$

es ist dieselbe also ein Doppelintegral der Funktion $\varphi\ (x, y)$ erstreckt über einen Teil des Rechtecks $A_0 B_0 C_0 D_0$ und zwar einen Teil, der begrenzt ist von den Linien:

$$x = a,\ x = x_{r+1},\ y = b,$$

und einem Zuge von geraden Linien, die abwechselnd der x- und der y-Achse parallel sind.

Wir halten nun die Funktion $\psi(x)$ fest und betrachten das Integral:

$$\int_a^{u}\int_b^{\psi(x)} \varphi(x,y)\,dx\,dy\,,$$

in welchem u stetig alle Werte von a bis a_1 durchlaufen kann. Dann nimmt unser Integral u. a. alle Werte der Integrale:

$$\int_a^{x_{r+1}}\int_b^{\psi(x)} \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

an, ferner aber folgt, daß ein jeder Mittelwert der letzteren die Form haben muß:

$$\int_a^{\xi}\int_b^{\psi(x)} \varphi(x,y)\,dx\,dy\,,$$

wobei ξ einen Mittelwert zwischen a und a_1 bedeutet. In ähnlicher Weise können die anderen im vorigen Paragraphen aufgestellten Mittelwerte dargestellt werden. Wir fassen die Resultate zusammen in dem folgenden

Lehrsatz: Setzt man an Stelle der Größe $q_{r,s}$ das Doppelintegral:

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}}\int_{y_s}^{y_{s+1}} \varphi(x,y)\,dx\,dy\,,$$

wobei unter $\varphi\ (x, y)$ *eine endliche Funktion von x und y verstanden wird, die über das Gebiet des Rechtecks $A_0 B_0 C_0 D_0$ ein*

eigentliches zweifaches Integral besitzt, so nehmen die im vorigen Paragraphen definierten Mittelwerte die Form an:

$$m^{(1)} = \int\limits_a^{\xi}\int\limits_b^{\psi(x)}, \quad m^{(2)} = \int\limits_{\xi}^{a_1}\int\limits_{\psi(x)}^{b_1}, \quad m^{(3)} = \int\limits_{\xi}^{a_1}\int\limits_b^{\psi(x)}, \quad m^{(4)} = \int\limits_a^{\xi}\int\limits_{\psi(x)}^{b_1}.$$

Die Integrale beziehen sich alle auf die Funktion $\varphi(x, y)$. Die Größen ξ liegen zwischen a und a_1, die Größen $\psi(x)$ sind Funktionen von x, deren Werte zwischen b und b_1 liegen, ξ und $\psi(x)$ können in den verschiedenen Integralen verschiedene Werte haben.

§ 5.

Entwickelung einer allgemeinen Methode zur Aufstellung von Mittelwertsätzen für eigentliche Doppelintegrale.

Wir denken uns nun neben $\varphi(x, y)$ eine zweite *endliche* Funktion $f(x, y)$ vorgelegt, die dieselben Eigenschaften besitzt wie $\varphi(x, y)$, *also ein eigentliches Doppelintegral über das Rechteck $A_0B_0C_0D_0$ hat.* Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir das Doppelintegral:

$$\int\limits_a^{a_1}\int\limits_b^{b_1}\varphi(x, y) f(x, y)\, dx\, dy.$$

Das Rechteck $A_0B_0C_0D_0$ denken wir uns wie früher durch Linien x_r und y_s in kleinere Rechtecke zerlegt, deren Anzahl eine endliche ist. Dann kann unser Doppelintegral als Summe einer Anzahl anderer Doppelintegrale dargestellt werden und zwar:

$$\sum_r \sum_s \int\limits_{x_r}^{x_{r+1}} \int\limits_{y_s}^{y_{s+1}} f(x, y)\varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Den Wert der Funktion $f(x, y)$ in einem der Eckpunkte des Rechtecks $x_r, y_s; x_{r+1}, y_{s+1}$ bezeichnen wir durch c_{rs}, wobei in geeigneter Weise für die Eindeutigkeit von c_{rs} Sorge zu tragen ist (siehe etwa Pringsheim, Münchener Berichte 1900 pag. 220 oder die citierte Arbeit von Arzelà pag. 105). Um die Untersuchung zu einer möglichst elementaren zu gestalten, wollen wir, wie schon in der Einleitung angedeutet, auf die hieraus sich ergebenden Festsetzungen nicht weiter eingehen, sondern von vorne herein annehmen, daß die Funktion $f(x, y)$ im Rechteck

$A_0B_0C_0D_0$ eindeutig und stetig sei, ferner wollen wir als Eckpunkt ein für alle Male den linken unteren festsetzen. Dann kann innerhalb eines jeden Integralzeichens an Stelle von $f(x, y)$ jedenfalls geschrieben werden:

$$c_{rs} + f(x, y) - c_{rs},$$

sodaß unsere Doppelsumme in zwei Teile zerfällt:

I $$\sum_r \sum_s c_{rs} q_{rs},$$

wobei die Größen q_{rs} die in den vorigen Paragraphen angegebene Bedeutung besitzen.

II $$\sum\sum \int_{x_r}^{x_{r+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} (f(x, y) - c_{rs}) \varphi(x, y) dx dy.$$

Die erste Summe hat die Form der Summen, die wir im zweiten und vierten Paragraphen untersucht haben und kann nach den dort angegebenen Sätzen dargestellt werden.

Die Behandlung der zweiten Summe erfordert andere Methoden. Nehmen wir an, daß dieselbe den Grenzwert Null besitzt, wenn m und n unabhängig von einander über alle Grenzen hinaus wachsen — wobei die Diagonalen der einzelnen Rechtecke alle unendlich klein werden — so ist klar, daß wir von der zweiten Summe absehen und uns im wesentlichen auf die Betrachtung der ersten beschränken können.

Die genannte Annahme ist aber jedenfalls erfüllt, wenn $f(x, y)$ durchweg stetig ist.

Unter solchen Umständen ist klar, daß den Mittelwertsätzen, die wir für Doppelsummen aufgestellt haben, entsprechende Mittelwertsätze für Doppelintegrale zugeordnet werden können.

§ 6.

Aufstellung einer ersten Kategorie von Mittelwertsätzen im Gebiete der eigentlichen zweifachen Integrale.

Wir lassen jetzt in den Sätzen, die wir in § 1 und § 3 gefunden haben, m und n unabhängig von einander über alle Grenzen hinaus wachsen, wobei wir an den für $\varphi(x, y)$ und später für $f(x, y)$ gemachten Annahmen festhalten, so ergibt sich

eine erste Kategorie von Mittelwertsätzen für eigentliche Doppelintegrale. Dieselbe lautet:

Erster Lehrsatz: Ändern die Ausdrücke:

$$f(x+\varepsilon, y+\varepsilon') - f(x+\varepsilon, y) - f(x, y+\varepsilon') + f(x, y),$$
$$f(x, b_1) - f(x+\varepsilon, b_1), \quad f(a_1, y) - f(a_1, y+\varepsilon')$$

für alle in Betracht kommenden Werte von $x, y, \varepsilon, \varepsilon'$ ihr Zeichen nicht, so ist das vorgelegte Doppelintegral:

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx\,dy$$

gleich:

$$f(a_1, b_1)M_1^{(1)} + (f(a, b_1) - f(a_1, b_1))M_2^{(1)} + (f(a_1, b) - f(a_1, b_1))M_3^{(1)}$$
$$+ (f(a_1, b_1) - f(a_1, b) - f(a, b_1) + f(a, b))M_4^{(1)}.$$

Sind insbesondere die Zeichen in allen drei Ausdrücken die nämlichen und zwar gleich dem Zeichen von $f(a_1, b_1)$, die Null einbegriffen, so wird das vorgelegte Doppelintegral gleich:

$$f(a, b)\int_a^{\xi}\int_b^{\eta} \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Zweiter Lehrsatz: Ändern die Ausdrücke:

$$f(x, y) - f(x+\varepsilon, y) - f(x, y+\varepsilon') + f(x+\varepsilon, y+\varepsilon')$$
$$f(x+\varepsilon, b) - f(x, b), \quad f(a, y+\varepsilon') - f(a, y)$$

ihr Zeichen nicht, so ist der Wert des vorgelegten Doppelintegrales gleich:

$$f(a, b)M_1^{(2)} + (f(a_1, b) - f(a, b))M_2^{(2)} + (f(a, b_1) - f a, b))M_3^{(2)}$$
$$+ (f(a, b) - f(a_1, b) - f(a, b_1) + f(a_1, b_1))M_4^{(2)}.$$

Ist insbesondere das Zeichen aller drei Ausdrücke das nämliche und zwar gleich dem Zeichen von $f(a, b)$, die Null einbegriffen, so wird das vorgelegte Doppelintegral gleich:

$$f(a_1, b_1)\int_{\xi}^{a_1}\int_{\eta}^{b_1} \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Dritter Lehrsatz: Ändern die Ausdrücke:

$$f(x, y + \varepsilon') - f(x, y) - f(x + \varepsilon, y + \varepsilon') + f(x + \varepsilon, y),$$
$$f(a, y) - f(a, y + \varepsilon'), \quad f(x + \varepsilon', b_1) - f(x, b_1)$$

ihr Zeichen nicht, so ist der Wert des Doppelintegrales gleich:

$$f(a, b_1) M_1^{(3)} + (f(a, b) - f(a, b_1)) M_2^{(3)} + (f(a_1, b_1) - fa, b_1)) M_3^{(3)}$$
$$+ (f(a, b_1) - f(a, b) - f(a_1, b_1) + f(a_1, b)) M_4^{(3)}.$$

Ist insbesondere das Zeichen aller drei Ausdrücke das nämliche und zwar gleich dem Zeichen von $f(a, b_1)$, die Null einbegriffen, so wird das vorgelegte Doppelintegral gleich:

$$f(a_1, b) \int_\xi^{a_1} \int_b^\eta \varphi(x, y) dx dy.$$

Vierter Lehrsatz: Ändern die Ausdrücke:

$$f(x + \varepsilon, y) - f(x + \varepsilon, y + \varepsilon') - f(x, y) + f(x, y + \varepsilon'),$$
$$f(a_1, y + \varepsilon') - f(a_1, y), \quad f(x, b) - f(x + \varepsilon, b)$$

ihr Zeichen nicht, so ist der Wert des vorgelegten Doppelintegrales gleich:

$$f(a_1, b) M_1^{(4)} + (f(a_1, b_1) - f(a_1, b)) M_2^{(4)} + (f(a, b) - f(a_1, b)) M_3^{(4)}$$
$$+ (f(a_1, b) - f(a_1, b_1) - f(a, b) + f(a, b_1)) M_4^{(4)}.$$

Ist insbesondere das Zeichen aller drei Ausdrücke das nämliche und zwar gleich dem Zeichen von $f(a_1, b)$, die Null einbegriffen, so folgt als Wert unseres Integrales:

$$f(a, b_1) \int_a^\xi \int_\eta^{b_1} \varphi(x, y) dx dy.$$

Der zweite dieser Sätze stimmt im wesentlichen mit demjenigen überein, den der Verfasser in der citierten Arbeit entwickelt hat.

Die Darstellung der Größen M in der Form von Doppelintegralen ist im zweiten Paragraphen gegeben worden.

§ 7.

Aufstellung einer zweiten Kategorie von Mittelwertsätzen für eigentliche Doppelintegrale.

In ähnlicher Weise wie im vorigen Paragraphen kann aus der zweiten Kategorie von Mittelwertsätzen für Doppelsummen eine zweite Kategorie von Mittelwertsätzen für Doppelintegrale abgeleitet werden. Auch hier behalten wir die Bedingung bei, daß $\varphi(x, y)$ endlich und integrierbar, $f(x, y)$ eindeutig und stetig sei, indem wir für allgemeinere Fälle auf die Arbeit von Arzelà verweisen. Wir begnügen uns damit die Sätze anzugeben.

Erster Lehrsatz: Ändern die Differenzen:

$$f(x, y) - f(x, y + \varepsilon') \quad \textit{und} \quad f(x, b) - f(x + \varepsilon, b)$$

ihr Zeichen nicht und ist das Zeichen in beiden Fällen das nämliche und zwar von $f(a_1, b_1)$, *die Null einbegriffen, so ist das vorgelegte Doppelintegral gleich:*

$$f(a, b) \int_a^\xi \int_b^{\psi(x)} \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Zweiter Lehrsatz: Ändern die Differenzen;

$$f(x, y + \varepsilon') - f(x, y) \quad \textit{und} \quad f(x + \varepsilon, b_1) - f(x, b_1)$$

ihr Zeichen nicht und ist das Zeichen in beiden Ausdrücken dasselbe und zwar von $f(a, b)$, *die Null einbegriffen, so ist das vorgelegte Doppelintegral gleich:*

$$f(a_1, b_1) \int_\xi^{a_1} \int_{\psi(x)}^{b_1} \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Dritter Lehrsatz: Ändern die Differenzen:

$$f(x, y) - f(x, y + \varepsilon') \quad \textit{und} \quad f(x + \varepsilon, b) - f(x, b)$$

ihr Zeichen nicht und ist das Zeichen in beiden Ausdrücken das nämliche und zwar von $f(a, b_1)$, *die Null einbegriffen, so ist das vorgelegte Doppelintegral gleich:*

$$f(a_1, b) \int_\xi^{a_1} \int_b^{\psi(x)} \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Vierter Lehrsatz: Ändern die Differenzen:

$$f(x, y + \varepsilon') - f(x, y) \quad und \quad f(x, b_1) - f(x + \varepsilon, b_1)$$

ihr Zeichen nicht und ist das Zeichen in beiden Ausdrücken das nämliche und zwar von $f(a_1, b)$, die Null einbegriffen, so ist das vorgelegte Doppelintegral gleich:

$$f(a, b_1)\int_a^\xi\int_{\psi(x)}^{b_1}\varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

In allen vier Sätzen bedeutet ξ je einen Mittelwert zwischen a und a_1, der in den vier Fällen durchaus verschieden sein kann, $\psi(x)$ je eine Funktion von x, die für alle Werte von x, die zwischen a und ξ gelegen sind, jedenfalls nur solche Werte annehmen kann, die zwischen b und b_1 gelegen sind.

In den vier Sätzen, die wir aufgestellt haben, ist vorausgesetzt worden, daß je zwei Differenzen der Funktion $f(x, y)$ dasselbe Zeichen besitzen und zwar wie die Funktion $f(x, y)$ in je einem der vier Eckpunkte des Rechteckes $A_0 B_0 C_0 D_0$. Von dieser letzten Voraussetzung können wir uns befreien, das Zeichen in dem entsprechenden Eckpunkt kann beliebig angenommen werden. Es modifizieren sich dann die vier Sätze. Diese Modifikationen sind aber so einfacher Art — es braucht an Stelle von $f(x, y)$ nur die Differenz von $f(x, y)$ und dem Werte der Funktion in einem bestimmten der vier Eckpunkte eingeführt zu werden —, daß wir von ihrer Aufstellung füglich absehen können.

Die entwickelten Sätze sind Sätze von der Art, wie sie Herr ARZELÀ zuerst aufgestellt hat.

Schließlich möge bemerkt werden, daß die Hinzunahme dieser Sätze die Theorie der FOURIERschen Reihen mit zwei veränderlichen Größen, wie sie der Verfasser in der citierten Arbeit gegeben hat, insofern weiter führt, als von dem Zeichen der Größen D_{xy} abgesehen werden kann.

Druckfertig erklärt 10. IX. 1903.]

Über eine gewisse Gattung von Kugelflächen-Integralen.

Von

C. Neumann.

§ 1.

Über die hier zu betrachtenden Funktionen $J_n(x, y, z)$ und über die unmittelbar zu Tage liegenden Eigenschaften dieser Funktionen.

Zerlegt man eine gegebene *Ellipse*, deren Achsen $2a$ und $2b$ heißen mögen, von ihrem Mittelpunkt aus, in lauter unendlich schmale Sektoren, und addiert man sodann die Flächeninhalte dieser Sektoren, so erhält man in solcher Weise für den Flächeninhalt der gegebenen Ellipse folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{1}{b}\right)^2 \sin^2\varphi}.$$

Dieser Ausdruck muß daher $= \pi a b$ sein und man gelangt daher, indem man $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = A$ und $\left(\frac{1}{b}\right)^2 = B$ setzt, zu folgender Formel:

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{A \cos^2\varphi + B \sin^2\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{AB}}.$$

Dieses Integral kann man ein *Kreisintegral* nennen. Denn man kann $d\varphi$ als das Element einer Kreislinie vom Radius *Eins* ansehen; wobei alsdann $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ zu bezeichnen sein werden als die Richtungscosinus des nach einem solchen Elemente $d\varphi$ hinlaufenden Kreisradius.

Berechnet man in analoger Weise das Volumen eines *Ellipsoides*, indem man dasselbe, von seinem Mittelpunkte aus,

in lauter unendlich dünne Kegel zerlegt, so gelangt man zu folgender mit (1) analoger Formel:

(2) $$\int \frac{d\omega}{(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{\sqrt{ABC}}.$$

Und dieses Integrel kann ein *Kugelflächen-Integral* genannt werden. Denn dasselbe dehnt sich aus über alle Elemente $d\omega$ einer mit dem Radius *Eins* beschriebenen Kugelfläche; wobei α, β, γ die Richtungscosinus des nach dem Element $d\omega$ hinlaufenden Kugelradius vorstellen.

Wir wollen nun die Formel (2) als Grundlage benutzen zur Untersuchung gewisser anderer Kugelflächen-Integrale:

(3) $$J_n = \int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^n d\omega,$$

wo $d\omega$, α, β, γ, sowie auch das Integralzeichen, dieselbe Bedeutung wie in (2) haben sollen; während unter x, y, z *beliebige Variablen* zu verstehen sind; sodaß also J_n eine Funktion von x, y, z repräsentiert. Dabei mag n eine *beliebig gegebene reelle Konstante* sein.

Spezialfälle. — Macht man $n = 0$, so erhält man:

(3a) $$J_0 = \int d\omega = 4\pi;$$

sodaß also J_0 eine *Konstante* ist. — Setzt man ferner $n = 1, 2, 3, \ldots$ so ergibt sich ohne sonderliche Mühe:

$$J_1 = \frac{4\pi}{3}(x + y + z),$$

(3b) $$J_2 = \frac{4\pi}{3 \cdot 5}[(x + y + z)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)],$$

etc. etc.;

sodaß also J_1, J_2, J_3, etc. lauter ganze homogene Funktionen von x, y, z sein werden.

Im allgemeinen aber soll das n eine beliebige Konstante sein; und es wird also im allgemeinen die wirkliche Berechnung der Funktion J_n, d. i. die Ausführung der in (3) angegebenen Integration nicht ganz leicht sein.

Welchen Wert nun aber die Konstante n auch haben mag, jedenfalls ergibt sich aus (3) durch Differentiation:

$$\frac{\partial J_n}{\partial x} = n\int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^{n-1}\alpha^2 d\omega,$$

(4) $$\frac{\partial J_n}{\partial y} = n\int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^{n-1}\beta^2 d\omega,$$

$$\frac{\partial J_n}{\partial z} = n\int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^{n-1}\gamma^2 d\omega;$$

woraus durch Multiplikation mit x, y, z und Addition sich ergibt:

(5) $$x\frac{\partial J_n}{\partial x} + y\frac{\partial J_n}{\partial y} + z\frac{\partial J_n}{\partial z} = nJ_n, \quad \left[\begin{matrix} n \text{ eine beliebige reelle} \\ \text{Konstante.}\end{matrix}\right].$$

Nun ist $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, weil α, β, γ Richtungscosinus sind. Und mit Rücksicht hierauf gelangt man durch Addition der drei Gleichungen (4) zu folgender Formel:

(6) $$\frac{\partial J_n}{\partial x} + \frac{\partial J_n}{\partial y} + \frac{\partial J_n}{\partial z} = nJ_{n-1}, \quad \left[\begin{matrix} n \text{ eine beliebige reelle} \\ \text{Konstante.}\end{matrix}\right].$$

Dies ist eine sogenannte *rekurrente Gleichung*, mittelst deren man aus J_n die Funktion J_{n-1} zu berechnen vermag. Es fragt sich nun, ob man nicht vielleicht auch umgekehrt aus J_{n-1} die Funktion J_n, oder (was dasselbe ist) aus J_n die Funktion J_{n+1} abzuleiten im stande ist. Diese Frage wird im folgenden Paragraph durch die Formel (13) beantwortet werden.

Die rekurrente Gleichung (6) *versagt*, infolge des rechts stehenden Faktors n, für $n = 0$. D. h. man wird mittelst dieser Gleichung aus J_0 *nicht* abzuleiten im stande sein die Funktion J_{-1}. Hingegen wird man, mittelst derselben, aus der Funktion J_{-1} successive die Funktionen $J_{-2}, J_{-3}, J_{-4}, \ldots$ ableiten können. Und hierbei sei bemerkt, daß die Funktion

(6a) $$J_{-1} = \int \frac{d\omega}{x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2}$$

darstellbar ist durch folgendes *elliptische Integral*:

(6b) $$J_{-1} = 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(1+xs)(1+ys)(1+zs)}};$$

was weiter ausführen zu wollen, überflüssig erscheint.

§ 2.

Neue Eigenschaften der Funktionen $J_n(x, y, z)$.

Setzt man in (2): $A = 1 - \varepsilon x$, $B = 1 - \varepsilon y$, $C = 1 - \varepsilon z$, wo ε einen *sehr kleinen* konstanten Faktor vorstellen soll, so erhält man sofort*):

$$(7)\qquad \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon y)(1-\varepsilon z)}} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d\omega}{[1-\varepsilon(x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

oder, falls man sich die rechte Seite entwickelt denkt nach Potenzen von ε:

$$(8)\qquad \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon y)(1-\varepsilon z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \varepsilon^n,$$

wo die H_n folgende Werte besitzen:

$$H_0 = \frac{1}{4\pi}\int d\omega,$$

$$H_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3}{2}\right)\int (x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)\,d\omega,$$

$$H_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\right)\int (x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)^2\,d\omega,$$

$$H_3 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\int (x\alpha^2+y\beta^2+z\gamma^2)^3\,d\omega,$$

etc. etc.

Diese Werte der H_n sind leicht ausdrückbar mittelst der J_n (3). Man erhält:

$$H_0 = \frac{1}{4\pi}J_0,\quad \text{mithin}\quad H_0 = 1\quad [\text{vgl. (3a)}],$$

$$(9)\qquad H_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3}{2}\right)J_1,$$

$$H_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\right)J_2,$$

$$H_3 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\right)J_3,$$

etc. etc.

*) Denn es ist zu beachten, daß α, β, γ Richtungscosinus sind, daß mithin $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$ ist.

Aus (8) folgt durch partielle Ableitung nach x:

$$(10)\qquad \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon x)\sqrt{(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon y)(1-\varepsilon z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial H_n}{\partial x} \varepsilon^n;$$

und nunmehr ergibt sich aus (8) und (10) durch Elimination der Wurzelgröße:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \varepsilon^n = 2\left(\frac{1-\varepsilon x}{\varepsilon}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial H_n}{\partial x} \varepsilon^n.$$

Setzt man hier die Koeffizienten von ε^{-1} auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man

$$0 = 2\frac{\partial H_0}{\partial x};$$

was nichts Neues ist, weil $H_0 = 1$ ist [vgl. (9)]. Sodann aber erhält man weiter durch Gleichsetzung der Koeffizienten $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots$ die Gleichungen:

$$H_n = 2\frac{\partial H_{n+1}}{\partial x} - 2x\frac{\partial H_n}{\partial x}, \qquad [\text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots].$$

Statt der H_n kann man hier, mittelst (9), die J_n einführen. So erhält man:

$$J_n = 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial J_{n+1}}{\partial x} - 2x\frac{\partial J_n}{\partial x}, \qquad [n = 0, 1, 2, 3, \ldots],$$

oder, was dasselbe ist:

$$(11)\qquad J_n + 2x\frac{\partial J_n}{\partial x} = 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial J_{n+1}}{\partial x}, \qquad [n = 0, 1, 2, 3, \ldots].$$

Ebenso wie diese Formel Ableitungen nach x enthält, ebenso werden sich offenbar analoge Formeln ergeben, die mit den Ableitungen nach y und z behaftet sind, sodaß man also zu folgendem Resultat gelangt:

Satz. — *Für die zu untersuchenden Funktionen* J_n (3) *gelten folgende Gleichungen:*

$$(12)\qquad \begin{cases} J_n + 2x\dfrac{\partial J_n}{\partial x} = 2\left(\dfrac{2n+3}{2n+2}\right)\dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial x}, \\[2ex] J_n + 2y\dfrac{\partial J_n}{\partial y} = 2\left(\dfrac{2n+3}{2n+2}\right)\dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial y}, \\[2ex] J_n + 2z\dfrac{\partial J_n}{\partial z} = 2\left(\dfrac{2n+3}{2n+2}\right)\dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial z}, \qquad [\text{für } n = \ , 1, 2, 3, \ldots]. \end{cases}$$

Multipliziert man aber diese Gleichungen mit x, y, z, und addiert, so erhält man, mit Rücksicht auf (5), *sofort:*

$$(13)\quad (x+y+z)J_n + 2\left(x^2\frac{\partial J_n}{\partial x} + y^2\frac{\partial J_n}{\partial y} + z^2\frac{\partial J_n}{\partial z}\right) = (2n+3)J_{n+1},$$

[für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$].

Es mag gestattet sein die Formeln (12) *und* (13) *als rekurrente Gleichungen zu bezeichnen. Jedenfalls wird die Formel* (13) *diesen Namen verdienen, weil man, mittelst derselben, aus J_n die Funktion J_{n+1} abzuleiten im stande ist.*

Während aber die früheren Formeln (5), (6) offenbar stets gelten, welchen Wert man der reellen Konstante n auch beilegen mag, — sind die gegenwärtigen Formeln (12), (13) einstweilen nur bewiesen für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Es fragt sich also, ob die Formeln (12), (13) z. B. noch gültig sind für $n = -3$, oder für $n = \frac{3}{4}$, oder allgemein für $n = \lambda$, wo λ eine *ganz beliebige reelle Konstante* sein soll.

§ 3.

Weitere Untersuchungen über die im vorigen Paragraph gefundenen rekurrenten Gleichungen (12), (13).

Aus (3) ergibt sich, falls man daselbst das n durch den Buchstaben λ ersetzt:

$$(14)\qquad J_\lambda = \int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^\lambda d\omega.$$

Ferner werde gesetzt:

$$(15)\qquad f = J_\lambda + 2x\frac{\partial J_\lambda}{\partial x} - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)\frac{\partial J_{\lambda+1}}{\partial x}.$$

Dieser Ausdruck f wird alsdann, zufolge (12), gleich *Null* sein für $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Und es handelt sich für uns nun um die Frage, ob dieses Nullsein vielleicht auch dann noch stattfindet, wenn man unter λ eine *ganz beliebig gegebene reelle Konstante* versteht.

Um nun auf diese Dinge näher einzugehen, werden wir die Ausdrücke J_λ und f zu entwickeln suchen nach den Funktionen J_0, J_1, J_2, J_3, ..., diese Funktionen aber gebildet gedacht, nicht für die Argumente x, y, z, sondern für die Argumente $x - 1$,

$y-1$, $z-1$. Die in Rede stehenden Entwicklungen werden also fortschreiten, *nicht* nach den Funktionen

$$(16)\qquad J_n = \int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^n\, d\omega, \qquad [n = 0, 1, 2, 3, \ldots],$$

sondern vielmehr nach folgenden Funktionen

$$(17)\qquad \mathfrak{J}_n = \int [(x-1)\alpha^2 + (y-1)\beta^2 + (z-1)\gamma^2]^n\, d\omega, \qquad [n = 0, 1, 2, 3, \ldots].$$

Dabei sei bemerkt, daß die in (12) für die J_n erhaltenen rekurrenten Gleichungen sich auf die $\mathfrak{J}_n$ übertragen. So z. B. wird man auf Grund der *ersten* Gleichung (12), indem man daselbst x, y, z mit $x-1$, $y-1$, $z-1$ vertauscht, sofort zu folgender Formel gelangen:

$$(18)\qquad \mathfrak{J}_n + 2(x-1)\frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x} = 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial \mathfrak{J}_{n+1}}{\partial x}, \qquad [n = 0, 1, 2, 3, \ldots].$$

Auch ist offenbar [vergl. (3a)]:

$$(19)\qquad \mathfrak{J}_0 = 4\pi, \quad \text{mithin z. B.:} \quad \frac{\partial \mathfrak{J}_0}{\partial x} = 0.$$

Setzt man zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(20)\qquad \mathrm{w} = (x-1)\alpha^2 + (y-1)\beta^2 + (z-1)\gamma^2,$$

so erhalten die Formeln (14) und (16), (17) folgende Gestalt*):

$$(21)\qquad \begin{cases} J_\lambda = \int (1+\mathrm{w})^\lambda\, d\omega, \\ J_n = \int (1+\mathrm{w})^n\, d\omega, \\ \mathfrak{J}_n = \int \mathrm{w}^n\, d\omega. \end{cases}$$

Bei den Untersuchungen des gegenwärtigen und des folgenden Paragraphs wird es nun durchaus notwendig sein, den Argumenten x, y, z *komplexe* Werte beizulegen, also zu setzen:

$$(22)\qquad x = x_R + ix_S, \quad y = y_R + iy_S, \quad z = z_R + iz_S,$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, während x_R, y_R, z_R und x_S, y_S, z_S *reell* sein sollen.

*) Zu beachten ist, daß α, β, γ Richtungskosinus sind, mithin die Quadratsumme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ stets $= 1$ ist. Demgemäß ergibt sich z. B. aus (20) sofort: $\mathrm{w} = (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2) - 1$. U. s. w.

Auch erscheint es, wenigstens vorläufig, zweckmäßig, die Variabilität der komplexen Argumente x, y, z folgenden Bedingungen zu unterwerfen*):

(23) $\mod (x-1) \leqq \frac{1}{2}, \quad \mod (y-1) \leqq \frac{1}{2}, \quad \mod (z-1) \leqq \frac{1}{2}.$

Was endlich den Ausdruck w (20) anbelangt, so ergibt sich aus (20) sofort:

$$\mod \mathrm{w} \leqq \alpha^2 \mod (x-1) + \beta^2 \mod (y-1) + \gamma^2 \mod (z-1);$$

denn α, β, γ sind Richtungscosinus, mithin stets *reell* zu denken. Aus dieser letzten Formel folgt nun weiter, mit Rücksicht auf die den Variablen x, y, z auferlegten Bedingungen (23):

$$\mod \mathrm{w} \leqq (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \tfrac{1}{2}$$

d. i.

(24) $$\mod \mathrm{w} \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Folglich wird z. B. $(1+\mathrm{w})^\lambda$ in eine nach den Potenzen von w fortschreitende *konvergente* Reihe entwickelbar sein:

(25) $$(1+\mathrm{w})^\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{w} + \lambda_2 \mathrm{w}^2 + \lambda_3 \mathrm{w}^3 + \cdots,$$

in welcher λ_n mittelst der bekannten Gauss'schen Funktion Π folgendermaßen darstellbar ist:

(26) $$\lambda_n = \frac{\Pi(\lambda)}{\Pi(n) \cdot \Pi(\lambda - n)}.$$

Nach allen diesen Vorbereitungen, wird es nun leicht sein, unser eigentliches Ziel zu erreichen. Substituiert man in der *ersten* der Formeln (21) die *konvergente* Entwicklung (25), so ergibt sich:

$$J_\lambda = \int (\lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{w} + \lambda_2 \mathrm{w}^2 + \lambda_3 \mathrm{w}^3 + \cdots)\, d\omega,$$

d. i.

$$J_\lambda = \lambda_0 \int d\omega + \lambda_1 \int \mathrm{w}\, d\omega + \lambda_2 \int \mathrm{w}^2 d\omega + \lambda_3 \int \mathrm{w}^3 d\omega + \cdots$$

oder einfacher geschrieben:

$$J_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_n \int \mathrm{w}^n d\omega \right),$$

*) Statt der Zahl $\frac{1}{2}$ hätte man in (23) ebenso gut irgend eine andere, der Bedingung $0 < \varrho < 1$ entsprechende Zahl ϱ nehmen können. Nur der *Einfachheit* halber ist hier $\varrho = \frac{1}{2}$ gesetzt.

also mit Hinblick auf die *letzte* der Formeln (21):

(27) $$J_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mathfrak{J}_n ,$$

und folglich auch:

(28) $$J_{\lambda+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+1)_n \mathfrak{J}_n .$$

Substituiert man jetzt diese Werte (27), (28) in der Formel (15), so erhält man:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_n \mathfrak{J}_n + 2x \cdot \lambda_n \frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x} - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)(\lambda+1)_n \frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x} \right),$$

oder, was dasselbe ist:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \left[\mathfrak{J}_n + 2(x-1)\frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x} \right]$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(2\lambda_n - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)(\lambda+1)_n \right) \left[\frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x} \right],$$

wo die in der ersten und zweiten Zeile in den eckigen Klammern enthaltenen Ausdrücke homogene Funktionen von $x-1$, $y-1$, $z-1$ sind, respektive von der $n$ten und $(n-1)$ten Ordnung. Für den *ersten* dieser beiden Ausdrücke kann man den in (18) angegebenen Wert substituieren; und erhält in solcher Weise:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial \mathfrak{J}_{n+1}}{\partial x}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\lambda_n - 2\left(\frac{2\lambda+3}{2\lambda+2}\right)(\lambda+1)_n \right) \frac{\partial \mathfrak{J}_n}{\partial x}.$$

Dabei ist zugleich in der zweiten Zeile die untere Summationsgrenze $n=0$ ersetzt worden durch $n=1$; was offenbar erlaubt ist, weil $\frac{\partial \mathfrak{J}_0}{\partial x}$ gleich *Null* ist [vgl. (19)].

Ersetzt man jetzt in der *letzten* Zeile vorstehender Formel den Buchstaben n durch $n+1$, so erhält man:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot 2\binom{2n+3}{2n+2} \frac{\partial \mathfrak{J}_{n+1}}{\partial x}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(2\lambda_{n+1} - 2\binom{2\lambda+3}{2\lambda+2}(\lambda+1)_{n+1}\right) \frac{\partial \mathfrak{J}_{n+1}}{\partial x};$$

und hierfür kann man schreiben:

(29) $$f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\partial \mathfrak{J}_{n+1}}{\partial x},$$

wo alsdann C_n die Bedeutung hat:

$$C_n = 2\binom{2n+3}{2n+2}\lambda_n + 2\lambda_{n+1} - 2\binom{2\lambda+3}{2\lambda+2}(\lambda+1)_{n+1}.$$

Substituiert man hier für λ_n, λ_{n+1} und $(\lambda+1)_{n+1}$ ihre aus (26) ersichtlichen Werte, so findet man sofort, daß $C_n = 0$. Somit ergibt sich also aus (29):

(30) $$f = 0.$$

Erinnert man sich nun an die eigentliche Bedeutung von f [vergl. (15)], und beachtet man zugleich, daß die gegenwärtigen Untersuchungen wesentlich auf der Voraussetzung (23) beruhen, so führt die Formel (30) zu folgendem

Resultat. — *Es sei λ eine beliebig gegebene Konstante, die z. B. positiv oder negativ, eine ganze Zahl, oder eine gebrochene Zahl sein kann.*

Alsdann wird die für irgend welche reellen oder komplexen Argumente x, y, z gebildete Funktion

(31) $$f = f(x, y, z) = J_\lambda + 2x\frac{\partial J_\lambda}{\partial x} - 2\binom{2\lambda+3}{2\lambda+2}\frac{\partial J_{\lambda+1}}{\partial x}$$

stets $= 0$ sein, solange jene Argumente x, y, z den Bedingungen

(32) $\operatorname{abs}(x-1) \leqq \frac{1}{2}$, $\operatorname{abs}(y-1) \leqq \frac{1}{2}$, $\operatorname{abs}(z-1) \leqq \frac{1}{2}$

unterworfen gedacht werden.

Hiermit ist offenbar bewiesen, daß die *erste* der Gleichungen (12) auch dann noch gilt, wenn man daselbst die positive ganze Zahl n durch eine beliebige Konstante λ ersetzt, — immer vorausgesetzt, daß die Argumente x, y, z den Bedingungen (32) Genüge leisten. Daß Analoges von den *beiden andern* jener

Gleichungen (12) und ebenso auch von der Gleichung (13) gelten wird, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Es handelt sich nun aber vor allen Dingen um die *Beseitigung* der Einschränkungen (32), oder wenigstens um eine möglichst starke *Erweiterung* des durch jene Einschränkungen umgrenzten Spielraumes. Und das soll im folgenden Paragraph versucht werden.

§ 4.

Es wird gezeigt, daß die in Rede stehenden rekurrenten Gleichungen (12), (13) auch noch gültig sind für negative und gebrochene Werte von n, vorausgesetzt, daß man dabei auf Argumente x, y, z sich beschränkt, deren reelle Teile > 0 sind.

Die komplexe Variable

(a) $$x = x_R + i x_S, \quad \text{[vergl. (22)]},$$

kann *geometrisch* aufgefaßt werden, nämlich angesehen werden als ein *Punkt* auf der komplexen x-Ebene. Dabei sind alsdann x_R und x_S die Koordinaten dieses Punktes in Bezug auf zwei in jener Ebene festgesetzte (aufeinander senkrechte) Achsen R und S, von denen die eine als die *reelle Achse*, die andere aber als die *seitliche Achse* (oder imaginäre Achse) zu bezeichnen ist.

Denkt man sich nun die Variable x [ebenso wie z. B. in (23) und (32)] der Bedingung unterworfen:

(b) $$\operatorname{mod}(x-1) \leqq \tfrac{1}{2}, \quad \text{d. i.} \quad \operatorname{mod}(x_R + i x_S - 1) \leqq \tfrac{1}{2},$$

so wird der Punkt x gezwungen sein, auf einer *Kreisfläche* zu bleiben, die in der genannten Ebene um den Punkt 1 [d. i. um den Punkt $(x_R = 1,\ x_S = 0)$] mit dem Radius $\frac{1}{2}$ beschrieben ist. Aus der Bedingung (b) folgt daher sofort, daß die mit der Achse R parallele Koordinate x_R des Punktes x stets $\geqq \frac{1}{2}$, mithin z. B. auch stets > 0 zu bleiben gezwungen ist.

(33) *Die Bedingung:* $\operatorname{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2}$ *wird also ohne weiteres die Formel* $x_R > 0$ *nach sich ziehen.*
D. h. geometrisch ausgedrückt: die Kreisfläche: $\operatorname{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2}$ *ist nur ein Teil des größeren Flächengebietes:* $x_R > 0$. *Oder, was auf dasselbe hinauskommt: Das Fächengebiet:* $x_R > 0$ *enthält in sich jene Kreisfläche:* $\operatorname{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2}$.

Man hat zu unterscheiden zwischen den beiden Formeln: $x_R > 0$ und $x_R \geqq 0$. Die letztere Formel repräsentiert offenbar geradezu die eine *Hälfte* der komplexen x-Ebene. Hingegen repräsentiert die in (33) genannte Formel $x_R > 0$ ein Gebiet, welches von dieser Ebenenhälfte sich unterscheidet durch einen unendlich schmalen längs der Achse S sich hinziehenden Flächenstreifen.

(34) *Mit* (33) *völlig analoge Sätze gelten offenbar für die komplexe Variable* y, *und ebenso auch für die komplexe Variable* z.

Was nun die im vorigen Paragraph eingeführte reelle Konstante λ betrifft, so wollen wir zur Vereinfachung, und um die Vorstellung besser zu fixieren, $\lambda = -8$ setzen. Alsdann ist nach (14) und (15):

$$(35) \qquad J_{-8} = \int \frac{d\omega}{(x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^8},$$

und

$$(36) \qquad f = f(x, y, z) = J_{-8} + 2x\frac{\partial J_{-8}}{\partial x} + 2\left(\frac{2 \cdot 8 - 3}{2 \cdot 8 - 2}\right)\frac{\partial J_{-7}}{\partial x}.$$

Substituiert man hier in (36) für J_{-8} seinen Wert (35), und ebenso auch für J_{-7} den analogen Wert, so erhält man durch elementare Rechnung sofort:

$$(37) \qquad f = f(x, y, z) = \int \frac{F \cdot d\omega}{(x\alpha^2 + y\beta^2 - \gamma z^2)^9},$$

wo F die Bedeutung hat:

$$(38) \quad F = -2 \cdot 8 \cdot x\alpha^2 + [1 + (2 \cdot 8 - 3)\alpha^2](x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2).$$

Hieraus erkennt man, daß die Funktion f (37) nur allein dann *unstetig* werden kann, wenn der in (37) unter dem Integralzeichen stehende Nenner *Null* wird. Jener Nenner aber ist, wenn man von der schon vorhin eingeführten Bezeichnungsweise (22) Gebrauch macht, folgendermaßen darstellbar

$$(x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^9 = [(x_R\alpha^2 + y_R\beta^2 + z_R\gamma^2) + i(x_S\alpha^2 + y_S\beta^2 + z_S\gamma^2)]^9.$$

Setzt man nun voraus, daß die Größen x_R, y_R, z_R sämtlich > 0 bleiben sollen, so wird ein Verschwinden des Trinoms $(x_R\alpha^2 + y_R\beta^2 + x_R\gamma^2)$, mithin auch ein Verschwinden jenes Nenners schlechterdings *unmöglich* sein; denn die positiven reellen Größen α^2, β^2, γ^2 sind der Relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ unter-

worfen, mithin von solcher Beschaffenheit, daß höchstens *zwei* von ihnen gleich Null werden können.

Sind also die Größen x_R, y_R, z_R sämtlich > 0, so wird ein Verschwinden jenes Nenners, und folglich auch ein Unstetigwerden der Funktion f durchaus unmöglich sein; sodaß man also zu folgendem Satz gelangt:

Satz I. — *Die Funktion $f(x, y, z)$ wird fortdauernd stetig sein, falls man ihre Argumente x, y, z den Bedingungen*

(39) $$x_R > 0, \quad y_R > 0, \quad z_R > 0$$

unterwirft.

Und zu diesem Satze können wir auf Grund des in (31), (32) erhaltenen Resultates, sofort noch folgenden zweiten Satz hinzufügen:

Satz II. — *Die Funktion $f(x, y, z)$ wird stets $= 0$ sein, falls man ihre Argumente x, y, z den Bedingungen*

(40) $$\operatorname{mod}(x-1) \leqq \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{mod}(y-1) \leqq \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{mod}(z-1) \leqq \tfrac{1}{2}$$

unterwirft.

Diese beiden höchst einfachen und eleganten Sätze bilden nun die eigentliche Grundlage der hier anzustellenden Untersuchungen.

Wir wollen zuvörderst den Argumenten y und z *konstante* Werte zuerteilen. Diese *Konstanten* y und z mögen den Bedingungen Genüge leisten:

(α) $$\operatorname{mod}(y-1) \leqq \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{mod}(z-1) \leqq \tfrac{1}{2};$$

sodaß sie also, infolge dieser Bedingungen, z. B. auch den Formeln:

(β) $$y_R > 0 \quad \text{und} \quad z_R > 0$$

entsprechen werden. [Vergl. (33) und (34).]

Alsdann ist $f(x, y, z)$ nur noch abhängig von der *einen* Variablen x. Und diese nur allein von x abhängende Funktion wird, wie aus (α) mittelst des Satzes II (40) sich ergibt,

(A) $$= 0 \text{ sein im Kreise } \operatorname{mod}(x-1) \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Auch wird sie, wie aus (β) mittelst des Satzes I (39) zu ersehen ist,

(B) *stetig* sein im Gebiete $x_R > 0$.

Ist nun aber irgend eine von der komplexen Variablen x abhängende Funktion auf der komplexen x-Ebene innerhalb eines gegebenen Flächengebietes $\mathfrak{A}$ überall $= 0$, und ist überdies bekannt, daß sie innerhalb irgend eines das Gebiet $\mathfrak{A}$ in sich enthaltenden größeren Gebietes $\mathfrak{B}$ überall *stetig* ist, so folgt hieraus bekanntlich, daß sie innerhalb dieses größeren Gebietes $\mathfrak{B}$ ebenfalls überall $= 0$ ist. Diesen allgemeinen Satz können wir nun offenbar in Anwendung bringen auf die in (A) und (B) genannten Flächengebiete: $\operatorname{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2}$ und $x_R > 0$; denn wir wissen [vergl. (33)], daß das Gebiet $x_R > 0$ *in sich enthält* das kreisförmige Gebiet: $\operatorname{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2}$.

Aus jenen Ergebnissen (A) und (B) folgt daher sofort, daß die hier betrachtete, von x abhängende Funktion $f(x, y, z)$ nicht nur im Kreise: $\operatorname{mod}(x-1) \leqq \frac{1}{2}$, sondern auch in dem größeren Gebiete: $x_R > 0$ überall gleich *Null* sein muß.

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Entsprechen die beiden Konstanten y und z jenen in (α) von uns festgesetzten Bedingungen: $\operatorname{mod}(y-1) \leqq \frac{1}{2}$ und $\operatorname{mod}(z-1) \leqq \frac{1}{2}$, so folgt hieraus, daß die von x abhängende Funktion $f(x, y, z)$ gleich *Null* sein muß im Gebiete $x_R > 0$. Oder, etwas einfacher ausgedrückt:

(41) *Die Funktion $f(x, y, z)$ wird stets $= 0$ sein, falls nur ihre Argumente x, y, z den Bedingungen Genüge leisten:*

$$x_R > 0, \quad \textit{und} \quad \operatorname{mod}(y-1) \leqq \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{mod}(z-1) \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Um einen Schritt vorwärts zu kommen, wollen wir jetzt den Argumenten x und z konstante Werte zuerteilen. Diese *Konstanten* x und z mögen den Bedingungen unterworfen sein:

$$(\gamma) \qquad x_R > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{mod}(z-1) \leqq \tfrac{1}{2};$$

sodaß sie also, infolge dieser Bedingungen, z. B. auch den Formeln:

$$(\delta) \qquad x_R > 0 \quad \text{und} \quad z_R > 0$$

entsprechen werden. [Vergl. (33), (34).]

Alsdann ist $f(x, y, z)$ nur abhängig von der *einen* Variablen y. Und diese Funktion von y wird, wie aus (γ) auf Grund des soeben bewiesenen Satzes (41) sich ergibt,

$$(\text{C}) \qquad = 0 \text{ sein im Kreise: } \operatorname{mod}(y-1) \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Auch wird sie, wie aus (δ) mittelst des Satzes I (39) sich ergibt,

(D) *stetig* sein im Gebiete: $y_R > 0$.

Das Nullsein im Kreise (C): $\mathrm{mod}\,(y-1) \leqq \frac{1}{2}$ überträgt sich aber auf jedes diesen Kreis in sich enthaltende und von Unstetigkeiten freie größere Gebiet, also z. B. auf das in (D) genannte Gebiet: $y_R > 0$.

Sind mithin die beiden Konstanten x und z jenen in (γ) festgesetzten Bedingungen: $x_R > 0$ und $\mathrm{mod}\,(z-1) \leqq \frac{1}{2}$ unterworfen, so folgt hieraus, daß die von y abhängende Funktion $f(x, y, z)$ gleich *Null* sein muß im Gebiete: $y_R > 0$. Mit andern Worten:

(42) *Die Funktion $f(x, y, z)$ wird stets $= 0$ sein, falls nur ihre Argumente x, y, z den Bedingungen entsprechen:*

$$x_R > 0, \quad y_R > 0 \quad \textit{und} \quad \mathrm{mod}\,(z-1) \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Um endlich die letzte Stufe der gegenwärtigen Betrachtungen zu ersteigen, wollen wir jetzt die beiden Argumente x und y als konstant uns denken. Diese *Konstanten* x und y mögen den Bedingungen unterworfen sein:

(ε) $x_R > 0$ und $y_R > 0$.

Alsdann ist $f(x, y, z)$ nur abhängig von der *einen* Variablen z. Und diese Funktion von z wird, wie aus (ε) mittelst des soeben bewiesenen Satzes (42) sich ergibt,

(E) $= 0$ sein im Kreise: $\mathrm{mod}\,(z-1) \leqq \frac{1}{2}$.

Auch wird sie, wie, ebenfalls aus (ε), mittelst des Satzes I (39) sich ergibt,

(F) *stetig* sein im Gebiete: $z_R > 0$.

Das Nullsein im Kreise (E): $\mathrm{mod}\,(z-1) \leqq \frac{1}{2}$ überträgt sich aber auf jedwedes diesen Kreis in sich enthaltende und von Unstetigkeiten freie größere Gebiet, also z. B. auf das in (F) genannte Gebiet: $z_R > 0$.

Sind mithin die beiden Konstanten x und y jenen in (ε) festgesetzten Bedingungen: $x_R > 0$ und $y_R > 0$ unterworfen, so folgt hieraus, daß die von z abhängende Funktion $f(x, y, z)$ gleich *Null* sein muß im Gebiete: $z_R > 0$. Oder einfacher ausgedrückt:

(43) *Die Funktion $f(x, y, z)$ wird stets $= 0$ sein, falls nur ihre Argumente x, y, z den Bedingungen entsprechen:*

$$x_R > 0, \quad y_R > 0, \quad z_R > 0.$$

Dabei ist [vergl. (36)] unter $f(x, y, z)$ folgende Funktion verstanden worden:

$$f(x, y, z) = \left[J_n + 2x \frac{\partial J_n}{\partial x} - 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right) \frac{\partial J_{n+1}}{\partial x} \right]_{n=-8};$$

sodaß also dieser Satz (einstweilen wenigstens) nur ganz speziell den Fall: $n = -8$ betrifft.

Dieser Satz (43) zeigt offenbar, daß die *erste* der rekurrenten Gleichungen (12) gültig ist für $n = -8$, vorausgesetzt daß man sich dabei beschränkt auf Argumente x, y, z, die den Bedingungen $x_R > 0$, $y_R > 0$, $z_R > 0$ Genüge leisten. Kaum bedarf es der Bemerkung, daß Analoges zu sagen sein wird von der *zweiten* und *dritten* jener rekurrenten Gleichungen (12).

Wenn wir hier speziell den Fall: $n = -8$ betrachtet haben, so ist das nur beispielsweise geschehen. Offenbar wird man zu genau denselben Resultaten auch dann gelangen, wenn n gleich einer *ganz beliebigen negativen ganzen Zahl* gesetzt wird; sodaß man also sagen kann:

Resultat der Untersuchung. — *Die im zweiten Paragraph für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ bewiesenen rekurrenten Gleichungen (12):*

$$(44) \quad \begin{cases} J_n + 2x \dfrac{\partial J_n}{\partial x} - 2\left(\dfrac{2n+3}{2n+2}\right) \dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial x} = 0, \\ J_n + 2y \dfrac{\partial J_n}{\partial y} - 2\left(\dfrac{2n+3}{2n+2}\right) \dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial y} = 0, \\ J_n + 2z \dfrac{\partial J_n}{\partial z} - 2\left(\dfrac{2n+3}{2n+2}\right) \dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

werden auch noch gültig sein für $n = -1, -2, -3, \ldots$, vorausgesetzt, daß man sich dabei auf Argumente x, y, z beschränkt, deren reelle Teile > 0 sind.

Gleiches ist daher auch zu sagen von der rekurrenten Gleichung (13):

$$(45) \quad (x + y + z) J_n + 2\left(x^2 \frac{\partial J_n}{\partial x} + y^2 \frac{\partial J_n}{\partial y} + z^2 \frac{\partial J_n}{\partial z}\right) - (2n+3) J_{n+1} = 0;$$

denn diese ergibt sich unmittelbar aus (44) *durch Multiplikation mit x, y, z und Addition.* [*Vgl.* (12), (13)].

Zusatz. — *Auch dürfte aus den angestellten Untersuchungen bereits deutlich hervorgehen, daß die Gleichungen* (44), (45) *in Gültigkeit bleiben werden, wenn man in ihnen unter n eine ganz beliebige reelle Konstante* (*z. B. irgend welchen positiven oder negativen Bruch*) *versteht, — immer vorausgesetzt, daß man sich dabei auf Argumente x, y, z beschränkt, deren reelle Teile* > 0 *sind.*

Beispiel. — Die erste der Gleichungen (44) lautet:

$$J_n + 2x\frac{\partial J_n}{\partial x} = 2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)\frac{\partial J_{n+1}}{\partial x}\,. \tag{46}$$

oder, falls man für J_n und J_{n+1} ihre eigentlichen Bedeutungen:

$$J_n \quad = \int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^n d\omega,$$

$$J_{n+1} = \int (x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^{n+1} d\omega$$

substituiert:

$$\int (x\alpha^2 + \cdots)^n d\omega + 2nx\int (x\alpha^2 + \cdots)^{n-1}\alpha^2 d\omega \tag{47}$$

$$= (2n+3)\int (x\alpha^2 + \cdots)^n \alpha^2 d\omega;$$

woraus z. B. für $n = -1$ sich ergibt:

$$\int \frac{d\omega}{x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2} - 2x\int \frac{\alpha^2 d\omega}{(x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2)^2} = \int \frac{\alpha^2 d\omega}{x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2}; \tag{48}$$

wobei alsdann wiederum vorauszusetzen ist, daß die reellen Teile der Argumente x, y, z sämtlich > 0 sind.

Von dieser Formel (48) soll im folgenden Paragraph Gebrauch gemacht werden.

§ 5.

Anwendung auf die Attraktion eines homogenen Ellipsoides.

Das NEWTONsche Potential eines homogenen Ellipsoids in Bezug auf einen *innern* Punkt (x, y, z) kann in der Weise berechnet werden, daß man das Ellipsoid, von jenem Punkte (x, y, z) aus, in lauter unendlich dünne Kegel zerlegt, und sodann je zwei

solche einander diametral gegenüberliegende Kegel (Scheitelkegel) zusammennimmt, u. s. w. Man gelangt auf diesem Wege — was weiter auszuführen, überflüssig erscheint — für das in Rede stehende Potential V zu folgender Formel:

$$(49)\qquad V = \frac{q}{2}(Gx^2 + Hy^2 + Jz^2 + K),$$

wo q die Dichtigkeit des Ellipsoids vorstellt, während G, H, J, K gewisse Konstanten repräsentieren, die allein abhängig sind von den Achsen $2a$, $2b$, $2c$ des gegebenen Ellipsoids. Und zwar ergeben sich z. B. für die Konstanten G und K folgende Werte:

$$(50)\qquad G = A\left[2A\int\frac{\alpha^2 d\omega}{(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)^2} - \int\frac{d\omega}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}\right],$$

$$(51)\qquad K = \int\frac{d\omega}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2},$$

wo A, B, C die Bedeutungen haben:

$$(52)\qquad A = \left(\frac{1}{a}\right)^2,\quad B = \left(\frac{1}{b}\right)^2,\quad C = \left(\frac{1}{c}\right)^2;$$

dabei haben in (50), (51) die Integralzeichen, und ebenso auch $d\omega$ und α, β, γ, genau dieselben Bedeutungen, wie in der ganzen vorliegenden Abhandlung. [Vgl. z. B. (2), (3).]

Die Ausdrücke der drei Konstanten G, H, J lassen sich nun wesentlich vereinfachen mittelst der hier entwickelten allgemeinen Theorie. In der Tat ergibt sich aus (48) sofort, daß man dem Ausdrucke G (50) folgende Gestalt geben kann:

$$(53)\qquad G = -A\int\frac{\alpha^2 d\omega}{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}.$$

Analoge Werte ergeben sich für H und J; sodaß man also z. B. erhält:

$$(54)\qquad G + H + J = -\int d\omega = -4\pi.$$

Nach (49) hat aber der Laplacesche Differentialausdruck ΔV den Wert: $\Delta V = q(G + H + J)$; sodaß man also, mittelst der Relation (54), zu der Formel gelangt: $\Delta V = -4\pi q$; was in Einklang ist mit dem bekannten Poissonschen Satze.

Mittelst der hier entwickelten allgemeinen Theorie sind wir mit Leichtigkeit im stande gewesen, den Ausdruck (50) umzuwandeln in den Ausdruck (53).

Dabei sei schließlich, was diese beiden Ausdrücke (50) und (53) der Konstante G anbelangt, noch Folgendes bemerkt: Man erhält für G den Ausdruck (50), wenn man (auf dem schon angegebenen Wege) *direkt* das Potential berechnet. Hingegen erhält man für G den Ausdruck (53), wenn man zuvörderst die Kraftkomponenten, und *sodann* erst aus diesen (durch Integration) das Potential zu ermitteln sucht.

§ 6.

Über die Anwendbarkeit des Newtonschen Gesetzes auf sehr große Entfernungen.

Sind X, Y, Z die Kräfte, mit denen das betrachtete homogene Ellipsoid auf irgend einen *innern* Punkt (x, y, z) einwirkt, so ist:

$$(55) \qquad X = k^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = k^2 \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = k^2 \frac{\partial V}{\partial z},$$

wo k^2 einen (von Gauss mit K bezeichneten) positiven konstanten Faktor vorstellt; dabei ist vorausgesetzt, daß die Masse des sollizitierten Punktes $= 1$ sei. Substituiert man hier für das Potential V seinen Wert (49), so erhält man sofort:

$$(56) \qquad X = k^2 q G x, \quad Y = k^2 q H y, \quad Z = k^2 q J z;$$

und hier bezeichnet z. B. G [vrgl. (53) und (52)] folgende nur allein von den halben Ellipsoidachsen a, b, c abhängende Konstante:

$$(57) \qquad G = (-1) \int \frac{\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 d\omega}{\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2},$$

während H und J analoge Bedeutungen haben. Endlich ist q die konstante Dichtigkeit des Ellipsoids.

Demgemäß werden offenbar die Konstanten G, H, J und folglich auch die Kräfte X, Y, Z *völlig ungeändert* bleiben bei einer Vertauschung von a, b, c mit λa, λb, λc, — wenigstens wenn $\lambda > 1$ ist.

Diese einfache Bemerkung führt zu befremdlichen Resultaten, sobald man der gewöhnlichen Vorstellung sich hingibt, daß der ganze Weltraum, ins Unendliche hin, in einigermaßen gleichförmiger Verteilung, von Sternen erfüllt sei, daß also das Sternenmeer nach allen Seiten sich ins Unendliche erstrecke, und zu-

gleich eine *konstante* mittlere Dichtigkeit besitze. Denn alsdann würde man das Universum z. B. als ein *unendlich großes homogenes Ellipsoid* sich vorstellen können. Auch würde man, falls a, b, c *willkürlich* gewählte positive endliche Konstanten sind, die halben Achsen dieses Ellipsoids gleich λa, λb, λc setzen dürfen, indem man dabei unter λ einen unendlich großen Faktor versteht. Alsdann aber würde man zu dem Resultat gelangen, daß von diesem unendlich großen, das Universum darstellenden Ellipsoid auf die einzelnen Sterne, wie z. B. Sonne, Erde, Mars, etc., Kräfte ausgeübt werden, die wesentlich abhängen von jenen ganz *willkürlich* gewählten Konstanten a, b, c; — was offenbar absurd ist.

Diese einfachen Betrachtungen hatten sich mir schon vor langer Zeit (1854—57) aufgedrängt, ohne daß ich damals gewagt hätte, aus denselben einen Schluß zu ziehen zu Ungunsten des Newtonschen Gesetzes. In späterer Zeit habe ich sodann diese Betrachtungen mehrmals von neuem aufgenommen und zugleich *vereinfacht.*

Bei einem unendlich großen Ellipsoid entsteht nämlich die Unbestimmtheit der in Rede stehenden Kräfte im ganzen aus *drei* Ursachen: erstens aus den ganz willkürlichen Werten von a, b, c, zweitens aus den ebenfalls willkürlichen Richtungen der Ellipsoidachsen, und drittens aus der willkürlich zu wählenden Lage des Ellipsoidzentrums. Die letztgenannte Ursache aber ist, für sich allein, bereits ausreichend, um die in Rede stehenden Kräfte völlig *unbestimmt* zu machen; und man kann daher $a = b = c$ setzen. Alsdann wird also das Universum dargestellt sein durch eine *unendliche große homogene Kugel,* deren Zentrum C im Weltraum eine *willkürlich* zu wählende Lage besitzt. Und diese das Universum repräsentierende unendlich große Kugel wird offenbar auf die einzelnen Sterne Kräfte ausüben, die alle gerichtet sind nach jenem *willkürlich* gewählten Punkte C, und deren Intensitäten proportional sind mit den Abständen der einzelnen Sterne von jenem Punkte C.

In dieser Form habe ich mein Bedenken gegen das Newtonsche Gesetz zuerst in meinen Vorlesungen, sodann aber auch in einer von mir im Jahre 1874 publizierten elektrodynamischen Abhandlung ausgesprochen, [Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, Seite 98]. Meine dortigen Worte lauten ungefähr folgendermaßen:

„Nimmt man an, das Meer der Sterne erstrecke sich nach allen Seiten ins Unendliche, und die mittlere Dichtigkeit dieses

Meeres sei konstant, so wird, bei Zugrundelegung des Newtonschen Gesetzes, die von diesem Sternenmeer auf unsere Erdkugel ausgeübte Kraft völlig unbestimmt sein, nämlich jede beliebige Richtung und Stärke haben können.“

„*Das Newtonsche Gesetz führt uns also — bei Annahme eines nach allen Seiten ins Unendliche reichenden Sternenmeeres von konstanter mittlerer Dichtigkeit — zu einem völlig absurden Resultat.*“

Dieses selbe Bedenken gegen das Newtonsche Gesetz habe ich sodann im Jahre 1896 von neuem ausgesprochen in meinen „Allgemeinen Untersuchungen*) über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen“ [Leipzig, bei Teubner, 1896, daselbst S. 1 u. 2].

Kurz, wir stehen vor der Alternative, *entweder die Annahme fallen zu lassen, daß das Sternenmeer mit konstanter mittlerer Dichtigkeit nach allen Seiten sich ins Unendliche erstrecke, oder aber einzuräumen, daß das Newtonsche Gesetz für sehr große Entfernungen irgend welcher Modifikation bedürfe.*

Eine derartige Modifikation ist von mir gelegentlich in Vorschlag gebracht worden. Sollte nämlich das Meer der Sterne mit konstanter mittlerer Dichtigkeit nach allen Seiten ins Unendliche reichen, so würde, wie ich gezeigt habe, trotzdem gegen das Newtonsche Gesetz kein Einwand (der genannten Art) zu erheben sein, falls man nur die in diesem Gesetz enthaltene Potentialfunktion $\frac{1}{r}$ ersetzen wollte durch $\frac{1}{r}e^{-\alpha r}$, indem man dabei unter α eine Konstante versteht, die > 0 sein muß, sonst aber beliebig klein sein darf. Bei Zugrundelegung des so modifizierten Newtonschen Gesetzes würde nämlich eine unendlich große homogene Kugel auf innere Punkte *gar keine* Kraft ausüben. [Vergl. die schon genannten „Allgemeinen Untersuchungen etc.“ (Leipzig, 1896), Satz Seite 122.]

Ganz unabhängig von mir ist Seeliger zu ähnlichen Erwägungen gelangt. Im Jahre 1894 erschienen seine höchst schätzbaren und tiefer gehenden astronomischen Untersuchungen. [Astr. Nachrichten, 1894, Bd. 137, Seite 3272.] Der eigentliche Grundgedanke ist bei Seeliger derselbe wie bei mir. Nur unterscheiden sich Seeligers Untersuchungen von den meinigen

*) In diesem Werke ist auf S. 117 ein Fehler zu korrigieren. Die dortige „Bemerkung“ (zwölf Zeilen betragend) ist nämlich zu streichen.

wesentlich dadurch, daß er, neben jener von mir ins Auge gefaßten Möglichkeit, daß das Sternenmeer mit konstanter mittlerer Dichtigkeit nach allen Seiten sich ins Unendliche ausdehnt, auch noch *andere* Möglichkeiten in Betracht zieht; der Art, daß das von mir gegen das Newtonsche Gesetz geltend gemachte Argument nur als ein *spezieller Fall* der von Seeliger gegen dieses Gesetz vorgebrachten Argumente sich darstellt. [Vergl. Seeligers Abhandlung: „Über das Newtonsche Gravitationsgesetz," 1896, in den Sitzungsberichten der K. Bayer. Ak. d. Wiss., Bd. XXVI, Seite 373].

Übrigens hat Seeliger, nachdem er durch mein Werk von 1896 auf meine Publikation von 1874 aufmerksam geworden war (und ohne, daß ich selber durch mündliche oder briefliche Mitteilungen dazu irgend welchen Anstoß gegeben hätte), meine *Priorität* bei Betrachtungen dieser Art ohne weiteres anerkannt und hervorgehoben, in einem Aufsatz vom Jahre 1896, [V. J. S. der Astron. Ges., Jahrgang 31, Heft 3, Seite 177].

Wenn Seeliger in diesem Aufsatz mein Werk von 1896 [„Allg. Untersuchungen etc."] einer eingehenden und besonders anerkennenden Beurteilung unterwirft, so mag es mir nachträglich noch gestattet sein, dem hervorragenden Astronomen hierfür öffentlich meinen aufrichtigen Dank auszusprechen; — ich habe dabei nur die Befürchtung, daß meine Verdienste von ihm zu sehr überschätzt worden sind.

Beiläufig möchte ich bemerken, daß, in meinen „Allgemeinen Untersuchungen etc." [Leipzig 1896], noch ein *zweiter* Einwand gegen das Newtonsche Gesetz von mir erhoben ist. Derselbe beruht aber auf *elektrostatischen* Betrachtungen und ist daher von viel geringerer Bedeutung als jener hier besprochene *erste* Einwand. Denn so hypothetische Dinge, wie die elektrischen Fluida, können doch wohl kaum in Betracht kommen, sobald es sich um Prüfung der Gesetze handelt, nach welchen die Himmelskörper auf einander einwirken. Und gerade in Anbetracht dieser relativen Leichtigkeit jenes *zweiten* Einwandes möchte ich auf die Priorität meines hier besprochenen *ersten* Einwandes nicht gerne Verzicht leisten. Ich bemerke dies mit Rücksicht auf eine von Prof. Dr. Oppenheim publizierte „Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes" [Prag, bei Haase, 1903], in welcher mir lediglich der *zweite*, nicht aber der *erste* Einwand zugeschrieben wird.

Inhalts-Übersicht.

Nachträgliche Bemerkung.

Die auf Seite 276—279 angestellten Betrachtungen lassen sich leicht verallgemeinern; wodurch in denselben zugleich eine größere Einfachheit und Übersichtlichkeit hervorgebracht wird.

Es sei nämlich $f(x, y, z)$ eine Funktion der drei *komplexen* Argumente x, y, z. Auf der komplexen x-Ebene seien zwei Flächengebiete 𝔄 und 𝔞 markiert, derart, daß das letztere *im* ersteren liegt, oder wenigstens mit dem ersteren irgend einen Flächenteil gemein hat. Ferner mögen 𝔅 und 𝔟 analoge Bedeutungen haben in der komplexen y-Ebene, und ebenso ℭ und 𝔠 in der komplaxen z-Ebene. Alsdann gilt folgender Satz:

Ist die Funktion $f(x, y, z)$ für die Gebiete 𝔄, 𝔅, ℭ allenthalben stetig, und ist überdies bekannt, daß sie für die Gebiete 𝔞, 𝔟, 𝔠 überall $= 0$ ist, so wird sie auch für die Gebiete 𝔄, 𝔅, ℭ überall $= 0$ sein.

Druckfertig erklärt 25. VIII. 1903.]

Zur Lehre der nicht abgeschlossenen Punktmengen.

Von

W. H. Young.

§ 1.

In seinen Leçons sur la Théorie des Fonctions hat Borel durch ein interessantes Beispiel gezeigt, wie wenig wir uns auf unsere Anschauung verlassen können, wenn es sich um die richtige Auffassung des Continuums handelt. Er nimmt die Menge der rationalen Punkte in dem Segment (0,1), wie bekannt eine abzählbare Menge, und beschreibt um jeden einzelnen Punkt $\frac{p}{q}$ als Mittelpunkt ein Intervall, dessen Länge $\frac{2e}{q^3}$ ist. Außerhalb dieser Intervalle liegt, wie er schon bewiesen hatte, eine mehr als abzählbare Punktmenge. Dann läßt er die Größe e gegen Null konvergieren und zeigt, daß die bekannten Liouvilleschen Zahlenpunkte, ebensowie die rationalen Punkte, stets innerhalb der aufeinanderfolgenden Intervallmengen bleiben, und daß deshalb die Menge der inneren Punkte sämtlicher Intervallmengen (innere Grenzmenge) die Mächtigkeit des linearen Continuums besitzt.

Wenn man sich durch dieses auffallende Zahlenbeispiel überzeugt hat, daß, obwohl nicht alle Punkte des Segments, doch tatsächlich weitere Punkte vorhanden bleiben als die, welche wir zuerst genommen hatten, dann entsteht die Frage, wie weit ist diese Tatsache von den speziellen Annahmen des individuellen Falls abhängig? Ist es weil die Intervalle in einander übergreifen, daß fremde Punkte als Grenzpunkte eintreten? Hat es damit zu tun, daß die Intervalle überall dicht liegen? Letztere Annahme wird durch unsere Kenntnis der Baireschen Punktmengen zweiter Kategorie nicht unwahrscheinlich gemacht, ist aber, ebenso wie die erste, nicht notwendig.

In der beiliegenden kleinen Abhandlung habe ich nachgewiesen, daß die Mächtigkeit der inneren Grenzmenge davon

abhängt, ob die herausgewählte Punktmenge eine in sich dichte Teilmenge enthält oder nicht: im ersteren Fall ist die Mächtigkeit die des linearen Continuums, in dem zweiten kann die innere Grenzmenge abzählbar sein. Es sind innere Grenzmengen, wie geschlossene lineare Punktmengen abzählbar, oder von der Mächtigkeit des linearen Continuums.

§ 2.

Es sei eine beliebige Intervallmenge auf der geraden Linie gegeben, deren Intervalle in beliebiger Weise in einander übergreifen, und deren Mächtigkeit beliebig ist. *Als innere Punktmenge dieser Intervallmenge bezeichnen wir die Gesamtheit aller Punkte, deren jeder innerer Punkt mindestens eines Intervalls ist.*

Es ist nun beinahe selbstverständlich, daß *die Komplementärmenge einer inneren Punktmenge stets abgeschlossen ist.* Denn jeder innere Punkt eines Intervalls hat einen bestimmten Abstand von den beiden Endpunkten dieses Intervalls und kann also unmöglicherweise Grenzpunkt der Komplementärmenge sein.

Da nun eine geschlossene Punktmenge stets durch die Endpunkte und äußeren Punkte einer Intervallmenge dargestellt werden kann, deren Intervalle (die *schwarzen Intervalle* der Punktmenge, wie ich sie a. a. O. genannt habe) nicht in einander übergreifen, so ist es hiermit bewiesen, daß *die innere Punktmenge stets als innere Punktmenge einer Intervallmenge, deren Intervalle nicht in einander übergreifen, dargestellt werden kann.*

§ 3.

Nehmen wir nun eine Reihenfolge von Intervallmengen, deren Intervalle beliebig in einander übergreifen. Wir definieren eine Punktmenge durch die Eigenschaft, daß jeder Punkt innerer Punkt mindestens eines Intervalles jeder Intervallmenge der Reihenfolge sei. Die Gesamtheit dieser Mengen umfaßt die Mengen der inneren Punkte einer Intervallmenge, aber enthält auch Mengen, die nicht als solche darstellbar sind. Eine solche Menge nennen wir *die innere Grenzmenge der Reihenfolge.*

Nun folgt aus dem Resultat des vorigen Paragraphen, daß jede innere Grenzmenge durch eine Reihenfolge von Intervallmengen definiert werden kann, deren Intervalle nicht in einander übergreifen. Weiter ist ersichtlich, daß wir diese Intervalle so wählen können, daß jedes Intervall einer Menge in einem Intervall

der vorangehenden Menge vollständig liegt, wobei möglicherweise einer oder beide Endpunkte gemein sind. Wenn wir nun eine innere Grenzmenge auf diese Weise dargestellt haben, so nennen wir die entsprechenden Intervallmengen *Normalintervallmengen.* Punktmengen, die auf diese letztere Weise definiert sind, scheinen der Anschauung zugänglicher zu sein als die durch beliebige Intervallmengen definierten. Analytisch ist es aber oft viel einfacher, beliebige Intervallmengen zur Definition zu gebrauchen.

§ 4.

Wir wollen nun zeigen, daß *die Mächtigkeit der inneren Grenzmenge einer Reihenfolge von Intervallmengen die des linearen Continuums ist, wenn die Grenzmenge nicht abzählbar ist, genau wie für abgeschlossene Punktmengen.*

Der Fall, in dem die Länge der einzelnen Intervalle aufeinanderfolgender Normalintervallmengen nicht unter jede Grenze sinkt, braucht nicht behandelt zu werden. Die innere Grenzmenge wird in diesem Falle mindestens ein Segment ausfüllen und hat deshalb die Mächtigkeit c. Wir nehmen also an, daß der andere Fall vorliegt. Der Beweis gestaltet sich nun folgendermaßen: wir zeigen, (1) daß die Menge stets die Mächtigkeit c hat, falls eine gewisse Bedingung erfüllt ist, und (2) daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn die innere Grenzmenge eine in sich dichte Teilmenge enthält. Da nun, falls die innere Grenzmenge keine in sich dichte Teilmenge enthält, dieselbe sicher abzählbar ist, so folgt aus dieser Überlegung, daß die genannte Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, damit die Mächtigkeit der inneren Grenzmenge dieselbe sei, wie die des linearen Continuums, und daß, wenn die Bedingung nicht erfüllt ist, die innere Grenzmenge abzählbar ist.

§ 5.

Die genannte Bedingung ist, *daß wir eine Reihe ins Unendliche wachsender ganzer positiver Zahlen*

$$r_1, r_2, \cdots r_n, \cdots$$

angeben können und ein entsprechendes Intervall der r_1*ten Normalintervallmenge, welches zwei Intervalle der* r_2*ten Normalintervallmenge enthält, deren jedes zwei Intervalle der* r_3*ten Normalintervallmenge enthält, u. s. w.*

Nehmen wir an, daß diese Bedingung erfüllt ist. Die zwei genannten Intervalle der $r_1$ten Normalintervallmenge bezeichnen wir durch d_{01} und d_{11} und die in d_{01} bez. in d_{11} liegenden Intervalle der $r_2$ten Intervallmenge durch d_{001} und d_{011}, bez. d_{101} und d_{111}. In der weiteren Bezeichnung bedeuten d_{N01} und d_{N11} die zwei Intervalle, die nach Voraussetzung in dem schon mit d_{N1} bezeichneten Intervall liegen. Auf diese Weise wird jeder nicht abbrechenden dyadischen Ziffernfolge eine Reihenfolge von Intervallen entsprechen, die in einander eingeschachtelt sind, und deren Länge unter jede Grenze sinkt; und umgekehrt. Das heißt, es wird ein-eindeutig die Menge dieser Zahlen auf die Menge der durch solche Reihenfolgen definierten Grenzpunkte bezogen. Es ist also die Mächtigkeit dieser Grenzpunkte gleich der jener Zahlen, das ist, wie bekannt, die des linearen Continuums. Nun enthält möglicherweise die Menge dieser Grenzpunkte außer der inneren Grenzmenge noch andere Punkte. Ein solcher Punkt aber tritt nur ein, wenn die entsprechenden in einander eingeschachtelten Intervalle von einem bestimmten Stadium an einen gemeinsamen Endpunkt haben. Zu jedem solchen Punkt also können wir eine entsprechende dyadische Zahl N mit endlicher Ziffernfolge angeben, nämlich den Index des ersten Intervalls, welches den Punkt zum Endpunkt hat. Da nun auf diese Weise keine zwei Punkte derselben Zahl entsprechen, so sind jene Punkte ebenso wie diese Zahlen abzählbar. Daraus folgt, daß die Mächtigkeit der inneren Grenzmenge für sich die des linearen Continuums ist. W. z. b. w.

§ 6.

Wenn die innere Grenzmenge in irgend einem Segment überall dicht ist, so ist ersichtlich, daß die Intervalle irgend einer Normalintervallmenge in diesem Segment ebenfalls überall dicht sein müssen. Wir können also mindestens ein Intervall d der ersten Normalintervallmenge angeben, welches in dem Segment liegt. In d müssen die Intervalle jeder folgenden Normalintervallmenge überall dicht sein, und da wir vorausgesetzt hatten, daß die Länge der einzelnen Normalintervalle unter jede Grenze sinkt, so ist es unmöglich, daß jedesmal nur *ein* Intervall in d liegt, das mit d identisch wäre. Deshalb können wir sicher eine Normalintervallmenge nennen, welche mindestens zwei Intervalle in d hat. Dann läßt sich mit jedem einzelnen dieser Intervalle

in obiger Weise fortfahren, u. s. w., woraus folgt, daß die Bedingung erfüllt ist.

§ 7.

Wenn die innere Grenzmenge nicht abzählbar ist, so enthält sie eine in sich dichte Teilmenge E[1]), deren erste Ableitung E_1 also perfekt ist[2]), und wir können durch Abbildung zeigen, daß die Bedingung erfüllt ist.

Zu diesem Zwecke beziehen wir die Punkte des Continuums, in welchem wir operieren, auf das Segment (0,1), indem alle Punkte eines schwarzen Intervalls[3]) von E_1, inklusive die beiden Endpunkte desselben, einem Punkt des Segments (0,1) entsprechen und umgekehrt. Die Punkte des Segments (0,1), welche zu diesem Zwecke gewählt werden, sollen überall dicht sein und die Reihenfolge der schwarzen Intervalle vollständig wiedergeben.[4]) Jeder Grenzpunkt der schwarzen Intervalle soll nun dem Grenzpunkt der entsprechenden Punkte entsprechen und umgekehrt.

Ausgenommen vielleicht eine abzählbare Menge von Punkten, welche Endpunkte von schwarzen Intervallen sind, und als solche paarweise demselben Punkt entsprechen, wird dann die Menge E ein-eindeutig auf eine entsprechende, im Segment (0,1) überall dichte Punktmenge E' bezogen. Ein Intervall des ersten Continuums, welches einen Punkt P von E als inneren Punkt enthält, entspricht dann einem Intervall des Segments (0,1), und zwar enthält letzteres entweder den entsprechenden Punkt P' als inneren Punkt, oder hat, wenn P Endpunkt eines schwarzen Intervalls war, P' eventuell als Endpunkt; im letzteren Falle wird P' als linker oder rechter Endpunkt des Intervalls erscheinen, jenachdem P rechter oder linker Endpunkt des schwarzen Intervalls war. Zwei solche Intervalle, welche nicht in einander übergreifen, werden also zwei eben solchen Intervallen entsprechen, und zwei, deren eines in dem anderen eingeschachtelt ist, werden auch zwei eben solchen entsprechen.

Den Normalintervallen, welche die Menge E einschließen, entsprechen also Normalintervalle, welche die Punkte der Menge E'

1) Cantor, Acta Math. 7, S. 105. Schoenflies, Bericht, S. 72.

2) Cantor, Math. Ann. 23, S. 471. Schoenflies, S. 63.

3) § 2.

4) Z. B. wie in W. H. Y. Proc. Lond. Math. Society, Vol. 35, S. 265.

als innere oder Endpunkte enthalten. Da nun E' überall dicht ist, so sind die entsprechenden Normalintervalle immer überall dicht[1]), und es wird also die Bedingung von § 5 erfüllt. Deshalb müssen nach obiger Überlegung die gegebenen Normalintervalle derselben Bedingung genügen.

Es ist also nachgewiesen, daß *die Bedingung von § 5 notwendig und hinreichend ist, damit die Mächtigkeit der inneren Grenzmenge die des linearen Continuums sei.* Wenn sie nicht erfüllt ist, so enthält die innere Grenzmenge keine in sich dichte Teilmenge und ist deshalb abzählbar. W. z. b. w.

§ 8.

Es ist, wie bekannt, leicht sich zu überzeugen, ob eine gegebene Punktmenge eine in sich dichte Teilmenge hat oder nicht. Wenn eine solche vorhanden ist, so ist sie sicher eine Teilmenge der durch die gegebene Punktmenge bestimmten perfekten Menge, die durch eine abzählbare Folge von Ableitungsprozessen zu erreichen ist.

Nehmen wir nun z. B. eine Punktmenge, deren Ableitung nicht abzählbar ist, die aber vollständig innerhalb der schwarzen Intervalle der genannten perfekten Menge liegt, so ist sie sicher abzählbar und besitzt keine in sich dichte Teilmenge. Wenn wir nun weiter eine solche Punktmenge in Intervallen einschließen, die ebenfalls innerhalb der schwarzen Intervalle liegen, und die Länge der einzelnen Intervalle nach irgend einem Gesetz gegen Null konvergieren lassen, dann muß jedes einzelne Intervall immer vollständig in einem schwarzen Intervall liegen, deshalb liegt die innere Grenzmenge ebenfalls innerhalb der schwarzen Intervalle. Nun ist ersichtlich, daß, wenn die innere Grenzmenge andere Punkte enthält außer der gegebenen Punktmenge, solche Punkte Grenzpunkte der gegebenen Punktmenge sein müssen. Da nun die Grenzpunkte der gegebenen Menge, welche innerhalb der schwarzen Intervalle liegen, wie bekannt, abzählbar sind, so folgt daraus, daß die innere Grenzmenge in diesem Falle selbst abzählbar ist. Ebenso im allgemeinen Falle, wo die gewählte Punktmenge keine

---

1) Daß die Länge der einzelnen Intervalle im zweiten Falle ebenfalls unter jede Grenze sinkt, folgt daraus, daß ein Intervall des Segments (0,1) in keinem Falle einem Punkt des ersten Continuums entsprechen kann.

in sich dichte Teilmenge besitzt, aber die Ableitung mehr als abzählbar ist, kann man die Intervalle so konstruieren, daß die innere Grenzmenge abzählbar ist.

Wir haben also die bemerkenswerte Tatsache, daß, wenn wir eine beliebige Punktmenge (vielleicht ganz unbekannter Mächtigkeit) herausgreifen und um jeden Punkt herum ein Intervall beschreiben, nach irgend einem Gesetz, und dann die obere Grenze der Länge der einzelnen Intervalle nach irgend einem Gesetz nach Null konvergieren lassen, wobei die gewählten Punkte stets innerhalb der Intervalle bleiben müssen, die Mächtigkeit der Punkte, welche stets innerhalb der Intervalle bleiben, c ist, wenn die gewählte Punktmenge eine in sich dichte Teilmenge hatte, sonst ist möglicherweise jene Menge, ebenso wie die gewählte, abzählbar.

§ 9.

Ausgenommen in dem Falle, in dem die gewählte Punktmenge keine in sich dichte Teilmenge hatte, und ihre erste Ableitung nicht abzählbar war, ist die Mächtigkeit der inneren Grenzmenge der einschließenden Intervalle dieselbe wie die der gewählten Punktmenge nebst ihren Grenzpunkten; in dem Ausnahmefall kann die innere Grenzmenge abzählbar sein.

Es ist nicht zu behaupten, und ist tatsächlich nicht wahr, daß im allgemeinen alle Grenzpunkte der gewählten Menge in der inneren Grenzmenge enthalten sind. Ist die Anzahl der Intervalle in jeder Normalintervallmenge endlich, und gibt es keinen Punkt, welcher stets Endpunkt eines Normalintervalls bleibt, wie z. B. bei dem Cantorschen Verfahren den Inhalt einer geschlossenen Punktmenge zu bestimmen, so bleiben sicher alle Grenzpunkte der gewählten Menge innerhalb der Intervalle. Wenn aber die Intervalle der einzelnen Intervallmengen äußere Grenzpunkte haben, oder wenn eine Reihe von ineinander eingeschachtelten Normalintervallen existiert, die einen gemeinsamen Endpunkt haben, dann fallen diese Punkte, welche sicher Grenzpunkte der gewählten Punktmenge sind, fort. Im allgemeinen also ist eine innere Grenzmenge eine nicht geschlossene Menge.

Druckfertig erklärt 23. IX. 1903.]

INHALT.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

FÜNFUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1903.

VI.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1903.

Einzelpreis 2 Mark 50 Pfg.

SITZUNG VOM 26. OKTOBER 1903.

Zur Behandlung gelangen:

1. Die Anregung des K. Ministeriums, die Weltausstellung in St. Louis mit den gesamten Schriften (Abhandlungen, Berichten und sonstigen Publikationen) zu beschicken. Die Bereitwilligkeit hierzu unter gewissen Bedingungen wird seitens der Klasse ausgesprochen.
2. Der Antrag der K. Akademie der Wissenschaften in Wien betr. Abänderung der Statuten der internationalen Association § 9 Absatz 4 und 5 betr. die Wahl des Präsidenten und Vizepräsidenten. Die Klasse stimmt dem Antrag zu.
3. Die Einladung der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur zur Teilnahme an deren 100jähriger Gründungsfeier. Die Klasse beschließt, ihre Glückwünsche durch einen Delegierten überbringen zu lassen oder im Verhinderungsfall schriftlich einzusenden.
4. Herr Ostwald zeigt an, daß er demnächst einen Antrag einbringen werde, die Klasse möge eine Erklärung in betreff einer zu schaffenden internationalen Verkehrssprache abgeben.

SITZUNG VOM 7. DEZEMBER 1903.

Erledigung verschiedener Eingänge.

Den Anträgen der Münchener Kartellversammlung bezüglich der Erforschung luftelektrischer Erscheinungen und der Herausgabe einer chemischen Kristallographie wird zugestimmt.

Die Herrichtung eines vollständigen Exemplares der Publikationen der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. behufs Einsendung an die Weltausstellung in St. Louis wird beschlossen.

Zwei von auswärts eingesandte mathematische Aufsätze von den Herren Däubler und S. Socolow sollen im Archiv niedergelegt werden.

Die Wahlen ergeben eine Bestätigung des bisherigen Sekretärs und seines Stellvertreters.

Der Antrag von Herrn Ostwald, die Klasse möge ihren Zutritt zur Kommission für die Einführung einer internationalen Sprache erklären, wird mit 12 gegen 4 Stimmen abgelehnt.

Herr Scheibner legt der Klasse vor: „Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen, als Einleitung der algebraischen Invariantentheorie, 2. Teil“.

Herr Engel teilt einen Aufsatz von Herrn E. von Weber (in München) mit, über „Die komplexen Bewegungen“.

ALLGEMEINE ÖFFENTLICHE SITZUNG
VOM 1. AUGUST 1903.

Bericht über die von Wiecherts astatischem Pendelseismometer in Leipzig vom 1. Januar bis 30. Juni 1903 registrierten Fernbeben und Pulsationen.

(Mit Tafel IV und 2 Textfiguren.)

Von

FRANZ ETZOLD.

In den ersten sechs Monaten des Jahres 1903 hat WIECHERTS astatisches Pendelseismometer in Leipzig 44 Teleseismogramme und drei vorläufig weder auf Fern- noch auf bekannt gewordene Nahbeben zu beziehende Aufzeichnungen geliefert, die im folgenden tabellarisch zusammengestellt und so weit erläutert sind, daß man sich mit Hilfe der den früheren Berichten beigegebenen Tafeln[1]) ein Bild von ihnen machen kann. Das am 1. Februar erhaltene Seismogramm wurde namentlich deshalb photolithographisch reproduziert, um die während seiner Aufzeichnung zu beobachtenden auffälligen Verlegungen des Pendelnullpunktes zu zeigen. Vom 4. bis 19. Mai war das Leipziger Pendel in Folge Springens einer Feder außer Betrieb. Außerordentlich stark waren namentlich in den Wintermonaten und im Anfang des Frühlings die Störungen durch Sturm und durch mikroseismische Unruhe. Von der letzteren, den Pulsationen, fehlt jede Spur kaum an einem Tage. Diese Pulsationen bilden auf den Papierstreifen regelmäßige Wellenzüge von $1/2$ bis 1, ja auch 2 Minuten und noch längerer Dauer. Besitzen diese Wellengruppen nur kurze Dauer, so sind sie meist von Ruhepausen unterbrochen, dabei haben ihre Einzel-

---

1) Diese Berichte 1902, Taf. I und II, 1903, Taf. II.

wellen Perioden von im Mittel 4 Sekunden und Amplituden von 0,3—0,5 mm. Umfassen sie hingegen Zeiträume von 1—2 Minuten, so folgen sie sich direkt, indem die Amplituden der Einzelwellen von Null bis auf 2 mm und darüber anschwellen und alsdann auf Null zurücksinken, um gleich darauf im nächsten Wellenzuge in derselben Weise zu- und wieder abzunehmen; die Perioden währen dabei 8 Sekunden. Bei ganz besonderer Stärke stellen sich die Pulsationen als ununterbrochene Aufeinanderfolge allmählich zu- und abnehmender Wellen dar, so daß jede Ruhepause fehlt. OMORI gibt in seiner neuesten Publikation[1]) dieselben mittleren Periodenmaße der Pulsationen, nämlich 4 resp. 8 Sekunden an. Über das wechselnde Anschwellen und Dahinschwinden dieser winzigen Bewegungen im verflossenen Halbjahr orientiert die beigegebene Tabelle II (S. 298 u. 299).

1.[2])

4. Januar $6^h\ 25^m\ 53^s$ bis $8^h\ 38^m$ —^{s}.

Nordsüdkomponente. Auf einige leichte Erzitterungen folgen drei kräftige Ausschläge mit 7 bis 9,5 mm[3]) Amplitude und je 3 Sekunden Periode; alsdann ordnen sich weiteren starken Ausschlägen, die langsam und unregelmäßig an Intensität abnehmen, solche von nur 0,6—1 Sekunde Periode über, welche Amplituden von mehr als 1 mm aufweisen, so daß die Zeichnung dieses ersten Einsatzes sehr kräftig zu nennen ist. Die stärkeren Ausschläge verschwinden nach etwa 4 Minuten, die kurzperiodigen Erzitterungen ganz allmählich erst nach 9 bis 10 Minuten. Hierauf erscheinen sehr unregelmäßige Wellen, die erst $8^h\ 38^m$ völlig verschwinden. Die größten Amplituden überschreiten hier 3 mm nicht, die längsten Perioden mögen bis 30 Sekunden lang sein. Etwa $6^h\ 56^m$ machen sich einige derartige langperiodige flache Wellen deutlicher bemerklich, so daß eine an den ostindischen Typus[4]) erinnernde

1) Publications of the Earthquake Investigation Committee in foreign languages Nr. 13, p. 81, Tokyo 1903.

2) Die Ziffern dieser Aufzählung entsprechen denen der Tabelle I hinter S. 321.

3) Diese und die weiterhin folgenden Maße beziehen sich auf die Seismogramme, nicht auf die wirklichen Größen der Bodenbewegungen, die der Apparat auf das 250fache vergrößert.

4) Vergl. diese Berichte 1903, S. 37.

Tabelle II.

Charakterisierung der vom 1. Januar bis 30. Juni 1903 in Leipzig aufgezeichneten Pulsationen.

Tag	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
1.	schwach	schwach	schwach	kräftig	mäßig	ganz schwach
2.	schwach	etwas stärker	kräftig	desgl.	desgl.	schwach
3.	schwach	desgl.	sehr kräftig	desgl.	schwach	desgl.
4.	sehr schwach	desgl.	kräftig	desgl.	kräftig	desgl.
5.	schwach	noch stärker	desgl.	schwächer	sehr kräftig	desgl.
6.	sehr schwach	weiter zunehmend	etwas schwächer	ziemlich kräftig	—	desgl.
7.	ziemlich stark	kräftig	desgl.	sehr kräftig	—	Ruhe
8.	desgl.	schwach	schwach	kräftig	—	schwach
9.	desgl.	kräftig	etwas stärker	desgl.	—	desgl.
10.	schwach	etwas abnehmend	kräftig	schwach	—	desgl.
11.	sehr schwach	sehr kräftig	schwach	zunehmend	—	desgl.
12.	ziemlich stark	desgl.	etwas stärker	schwach	—	etwas kräftiger
13.	schwächer	desgl.	desgl.	desgl.	—	desgl.
14.	kräftig	schwächer	abnehmend	zunehmend	—	ganz schwach

15.	desgl.	ganz schwach	ganz schwach	kräftig	—	schwach
16.	sehr kräftig	schwach	zunehmend	desgl.	—	desgl.
17.	schwächer	desgl.	desgl.	schwächer	—	desgl.
18.	schwach	desgl.	desgl.	zunehmend	—	desgl.
19.	zunehmend	stärker	weiter zunehmend	schwach	schwach	desgl.
20.	schwächer	sehr stark	kräftig	sehr kräftig	desgl.	desgl.
21.	desgl.	außerordentl. stark	desgl.	kräftig	ganz schwach	desgl.
22.	zunehmend	desgl.	desgl.	schwächer	etwas stärker	etwas stärker
23.	kräftig	etwas schwächer	desgl.	schwächer	desgl.	desgl.
24.	kräftig	sehr stark	sehr kräftig	zunehmend	schwach	schwach
25.	desgl.	außerordentl. stark	etwas schwächer	sehr kräftig	desgl.	desgl.
26.	desgl.	desgl.	kräftig	sehr schwach	desgl.	desgl.
27.	desgl.	desgl.	abnehmend	zunehmend	desgl.	desgl.
28.	sehr kräftig	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
29.	desgl.	—	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
30.	außerordentl. stark	—	sehr kräftig	desgl.	desgl.	desgl.
31.	viel schwächer	—	kräftig	—	Ruhe	—

Tabelle II.

Charakterisierung der vom 1. Januar bis 30. Juni 1903 in Leipzig aufgezeichneten Pulsationen.

Tag	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
1.	schwach	schwach	schwach	kräftig	mäßig	ganz schwach
2.	schwach	etwas stärker	kräftig	desgl.	desgl.	schwach
3.	schwach	desgl.	sehr kräftig	desgl.	schwach	desgl.
4.	sehr schwach	desgl.	kräftig	desgl.	kräftig	desgl.
5.	schwach	noch stärker	desgl.	schwächer	sehr kräftig	desgl.
6.	sehr schwach	weiter zunehmend	etwas schwächer	ziemlich kräftig	—	desgl.
7.	ziemlich stark	kräftig	desgl.	sehr kräftig	—	Ruhe
8.	desgl.	schwach	schwach	kräftig	—	schwach
9.	desgl.	kräftig	etwas stärker	desgl.	—	desgl.
10.	schwach	etwas abnehmend	kräftig	schwach	—	desgl.
11.	sehr schwach	sehr kräftig	schwach	zunehmend	—	desgl.
12.	ziemlich stark	desgl.	etwas stärker	schwach	—	etwas kräftiger
13.	schwächer	desgl.	desgl.	desgl.	—	desgl.
14.	kräftig	schwächer	abnehmend	zunehmend	—	ganz schwach

15.	desgl.	ganz schwach	ganz schwach	kräftig	—	schwach
16.	sehr kräftig	schwach	zunehmend	desgl.	—	desgl.
17.	schwächer	desgl.	desgl.	schwächer	—	desgl.
18.	schwach	desgl.	desgl.	zunehmend	—	desgl.
19.	zunehmend	stärker	weiter zunehmend	schwach	schwach	desgl.
20.	schwächer	sehr stark	kräftig	sehr kräftig	desgl.	desgl.
21.	desgl.	außerordentl. stark	desgl.	kräftig	ganz schwach	desgl.
22.	zunehmend	desgl.	desgl.	schwächer	etwas stärker	etwas stärker
23.	kräftig	etwas schwächer	desgl.	schwächer	desgl.	desgl.
24.	kräftig	sehr stark	sehr kräftig	zunehmend	schwach	schwach
25.	desgl.	außerordentl. stark	etwas schwächer	sehr kräftig	desgl.	desgl.
26.	desgl.	desgl.	kräftig	sehr schwach	desgl.	desgl.
27.	desgl.	desgl.	abnehmend	zunehmend	desgl.	desgl.
28.	sehr kräftig	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
29.	desgl.	—	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
30.	außerordentl. stark	—	sehr kräftig	desgl.	desgl.	desgl.
31.	viel schwächer	—	kräftig	—	Ruhe	—

Aufzeichnung entsteht, doch ist dieselbe durchaus nicht klar ausgesprochen.

Ostwestkomponente. Im ersten Einsatz sind die kräftigen Ausschläge weniger deutlich und besitzen nur 5,5 mm Amplitude, dahingegen erreichen die kurzperiodigen scharfen Ausschläge eine solche von 3 mm, so daß auch bei dieser Komponente der erste Einsatz als außerordentlich kräftig zu bezeichnen ist. Die nachfolgenden Wellen der zweiten Vorphase und der Hauptphase sind auffallend schwach und vereinzelt, ihre Amplituden messen nur in einzelnen Fällen etwa 1,5, sonst bloß Bruchteile von einem Millimeter.

Über den Herd des Erdbebens, welches dieses Seismogramm geliefert und sich nach den Straßburger Berichten ganz allgemein auf den Erdbebenstationen bemerkbar gemacht hat, sind leider keinerlei Nachrichten eingegangen.

2.

5. Januar $23^h\ 37^m\ 46^s$ bis 6. Januar $0^h\ 2^m$ —^{s}.

Besonders deutlich auf dem Streifen der Nordsüdkomponente erscheinen einige Züge von durch Ruhepausen unterbrochenen Sinuswellen, deren erster mit Wellen von 24 Sekunden Periode beginnt und mit solchen von 12 Sekunden Periode ausklingt. In den folgenden Wellenzügen überschreiten die Perioden an Dauer selten 12 Sekunden, sinken aber auch kaum darunter.

Dieses Beben ist nach J. ALGUÉ[1]) auch in Manila von dem dortselbst aufgestellten VICENTINIschen Seismometer registriert worden, und zwar fand dort der 1. Einsatz am 6. Januar $6^h\ 2^m\ 48^s$ statt, während die Erschütterung nach einer Dauer von insgesamt $47^m\ 12^s$ zum Abschluß gelangte. In M.E.Z. übertragen würde der 1. Einsatz am 5. Januar $23^h\ 48^m$ sich in Manila ereignet haben. Nach ALGUÉ wurde dieses Beben in Shanghai und Nachbarorten auch von Menschen wahrgenommen.

3.

10. Januar $2^h\ 45^m\ 24^s$ bis $2^h\ 55^m\ 30^s$.

Eine Reihe mit bloßem Auge nur eben deutlich wahrnehmbarer Erzitterungen, deren Perioden nur in wenigen Fällen etwa 1 Sekunde dauern, während die Amplituden nicht über 0,3 mm messen.

1) Philippine Weather Bureau, Bulletin for January 1903, p. 11. Manila.

4.

14. Januar 3^h —^{m} 12^s bis 5^h 30^m —^{s} (incl. Nr. 5).

Nordsüdkomponente. Die Nadel der Nordsüdkomponente beschreibt im ersten Einsatz pro Minute 50—60 Zitterbewegungen, welche sich langsameren Schwingungen um Beträge von 1—1,5 mm überordnen. Beide Bewegungen gleichen sich allmählich aus. Der zweite Einsatz wiederholt das Bild des ersten, nur sind Amplituden wie Perioden wesentlich größer. Etwa 1 mm Amplitude und 6 Sekunden lange Perioden aufweisende leichtere Wellen sind hier unregelmäßigen, bis 5,5 mm Amplitude und 10—30 Sekunden Periode erreichenden Wellenbewegungen übergeordnet. Nachdem die letztere unregelmäßige Bewegung von 3^h 13^m bis 3^h 18^m fast völlig verschwunden ist, tritt sie von diesem Zeitpunkt an wieder in die Erscheinung, schwillt ganz allmählich an, gewinnt von 3^h 25^m an die Oberhand über die rascheren Wellen und verdrängt dieselben 3^h 32^m, so daß von da ab sich langsame und schön regelmäßige Wellen mit Perioden von 27—24 und weiterhin von 20—18 Sekunden Periode aufzeichnen, deren Amplituden wiederholt, im Höchstfalle bis auf 13,5 mm, wachsen und abnehmen. Diesen sich ganz allmählich abschwächenden Wellen ordnen sich

5.

3^h 57^m 14^s

die Erzitterungen des ersten Einsatzes eines weiteren Bebens über, dessen fernere Phasen durch die schwindenden Wellen des eben beschriebenen naturgemäß gestört und verwischt werden, bis endlich nach 150 Minuten Gesamtdauer der seismischen Erregung völlige Ruhe eintritt.

Infolge einer Verschiebung des Schreibstiftes ist die Ostwestkomponente leider nicht imstande gewesen, eine zusammenhängende Aufzeichnung zu liefern; diese würde, nach den vorhandenen Stücken zu schließen, derjenigen der Nordsüdkomponente sehr ähnlich geworden sein.

Nach Zeitungsberichten ist zu etwa entsprechender Zeit der Stille Ozean der Schauplatz heftiger Erdbeben und Flutwellen gewesen, doch sind diese Nachrichten vorläufig noch zu ungenau, um für das Seismogramm verwertet werden zu können, zumal die Straßburger Berichte auch aus Ponta Delgada (Fayal) um 0^h 13^m 49^s (OZ) ein Erdbeben anführen.

6.

17. Januar $17^h\ 26^m\ 15^s$ bis $18^h\ 32^m\ —^s$.

Durch die gleichzeitig sich aufzeichnenden Pulsationen werden namentlich bei der Nordsüdkomponente Sinuswellenzüge mit etwa 18—20 Sekunden langen Perioden beeinträchtigt.

7.

19. Januar $14^h\ 33^m\ —^s$ bis $14^h\ 52^m$.

Sinuswellen werden wie bei Nr. 6 durch leichte Pulsationen stark verwischt.

8.

22. Januar $1^h\ 24^m\ 36^s$ bis $2^h\ 20^m\ —^s$.

Sehr flache sinusartige Wellen mit etwa 20 Sekunden langen Perioden.

9.

24. Januar $7^h\ 13^m\ 20^s$ bis $8^h\ 3^m\ —^s$.

Durch Pulsationen etwas beeinträchtigte Sinuswellen mit 15 bis 20 Sekunden langen Perioden.

10.

30. Januar $17^h\ 57^m\ 5^s$ bis $18^h\ 10^m\ —^s$.

Pulsatorische Bewegungen erlangen an diesem Tage eine erhebliche Stärke und schreiben sich als Wellengruppen auf, welche 1—2 Minuten lang sind und innerhalb deren die Amplituden jeweils bis auf 2 mm ansteigen, um alsdann wieder auf Null zurückzusinken, während die Perioden gleichmäßig ungefähr 8 Sekunden lang sind. Diesen beträchtlichen Wellen ordnen sich die für das Leipziger Pendel konstanten Erzitterungen[1]) über, so daß die Aufzeichnung ziemlich kompliziert ist und die Bedingungen für das Aufschreiben und Erkennen eines Seismogramms entschieden ungünstig sind. Nichtsdestoweniger fällt der erste Einsatz eines sich von $17^h\ 57^m\ 5^s$ an aufzeichnenden Bebens auch schon bei flüchtiger Durchmusterung der Papierstreifen auf, weil seine Erzitterungen zwar die Amplituden der chronischen Erzitterungen nicht wesentlich ändern, d. h. auf nur höchstens 0,5 bis 0,6 mm steigern, dahingegen die Perioden deutlich verlangsamen, indem

1) Vgl. diese Berichte 1902, p. 292.

plötzlich statt 100 auf die Minute deren höchstens 70 kommen. Gleichzeitig fällt auf, daß für die Dauer dieser ersten seismischen Oszillationen (reichlich 3 Minuten) die Pulsationen wesentlich an Energie einbüßen. $17^h 51^m$ wiederholt sich in schwächerem Grade die Verlangsamung der Perioden, sodaß insgesamt bis etwa $18^h 10^m$ Spuren seismischer Erregung verfolgbar sind. Von einem zweiten Einsatz und einer Hauptphase ist bei den Leipziger Seismogrammen nichts zu bemerken.

Von demselben Erdbeben erhielt Wiechert[1]) eine Aufzeichnung. Er beobachtete zwei erste Einsätze $16^h 57^m 25^s$ und $17^h 3{,}5^m$, macht aber auf die Möglichkeit aufmerksam, daß vielleicht nur ein Beben sich ereignete. Im ganzen wurde das Göttinger Pendel 62 Minuten lang in Bewegung gesetzt.

Der Herd des aufgezeichneten Erdbebens ist vielleicht in Italien zu suchen, wenigstens wurde nach den Straßburger Berichten $17^h 57^m 41^s$ ein leichtes Nahbeben in Padua beobachtet.

II.

1. Februar $10^h 43^m 36^s$ bis $12^h 7^m —^s$.

(Taf. IV.)

Dieses Seismogramm ist bei weitem das imposanteste von allen denen, die zwischen dem 1. Januar und 30. Juni dieses Jahres in Leipzig aufgezeichnet worden sind. Es weist kontinentalen Typus[2]) auf, doch sind weder aus Mittel- bis Ostasien, noch anderswoher Nachrichten bekannt geworden, daß zu entsprechender Zeit ein Beben von Menschen gefühlt worden wäre. Leider konnte in Leipzig nur die Ostwestkomponente sämtliche Phasen aufzeichnen, da die Schreibnadel der Nordsüdkomponente durch die gewaltigen Schwingungen im Beginn der Hauptphase gegen den die Zeitmarkierung bewirkenden Drahtrahmen geschleudert wurde und zu Boden fiel.

Nordsüdkomponente. Den auffallend schwachen Erzitterungen des ersten Einsatzes mit Perioden von etwa 0,8 Sekunde und Amplituden von 0,2 mm folgen ganz allmählich langsamere und kräftigere Schwingungen. Ein deutlicher zweiter Einsatz fehlt,

1) Monatsberichte über seismische Registrierungen in Göttingen. Januar 1903.

2) Vergl. diese Berichte 1903, p. 37.

am ehesten könnte man geneigt sein, denselben auf $10^h\ 52^m$ zu legen. Von $11^h\ 3^m$ an nimmt die Bewegung rapid zu, so daß $11^h\ 4^m\ 30^s$ eine Schwingung bereits 9 mm Amplitude und 9,5 Sekunde Periode besitzt. Die interferierenden kürzeren Wellen verschwinden erst $11^h\ 6^m$ völlig, indem sich von da an Schwingungen aufzeichnen, deren Periode 8—9 Sekunden beträgt, während die Amplituden von 13 mm an so rasch wachsen, daß für die 6. Schwingung bereits der zur Verfügung stehende Raum nicht mehr ausreicht, die Schreibnadel vielmehr nach 97 mm weitem Weg von links nach rechts in der oben angegebenen Weise zu Boden geworfen wird.

Ostwestkomponente (Taf. IV). Der Anfangsteil der Aufzeichnung dieser Komponente gleicht dem der Nordsüdkomponente, nur erscheinen und kräftigen sich die Wellen hier wesentlich langsamer, so daß die Schwingung, welche bei der Nordsüdkomponente die Schreibnadel zur Erde schleuderte, bei der Ostwestkomponente eine Amplitude von nur 36 mm aufweist. $11^h\ 6{,}5^m$ erfolgen vier Schwingungen mit je 8 Sekunden Periode und den größten Amplituden (bis 101 mm) des ganzen Seismogramms. Gleichfalls vier, aber wesentlich schwächere Schwingungen folgen $11^h\ 7^m\ 30^s$. Die sechs Wellen mit den längsten Perioden (11,5 Sekunde) beginnen $11^h\ 8^m\ 15^s$ und weisen eine größte Amplitude von 57 mm auf. Diesen Schwingungen mit den längsten Perioden folgen bis $11^h\ 16^m$ sieben Gruppen von solchen, innerhalb deren sich die Perioden nur wenig verkürzen, die Amplituden aber noch Beträge bis zu 65 und 67 mm erreichen. Alsdann beginnt die Endphase, in der mit Wellen von bald längerer und bald kürzerer Dauer und sehr unregelmäßig sich abschwächenden Amplituden die seismische Energie allmählich ausklingt.

Legt man den Beginn der Hauptphase auf die Wellen mit den längsten Perioden $11^h\ 8^m\ 15^s$, so müßte der Herd des das Seismogramm verursachenden Bebens auf Grund der früheren Erfahrungen[1]) in rund 8000 km Entfernung zu suchen sein. Da nun bis auf den ungefähr 10 Minuten längeren Abstand der Hauptphase von dem ersten Einsatz das Seismogramm vom 1. Februar eine unverkennbare Ähnlichkeit mit denen der Kaschgarbeben vom 22. August 1902[2]) aufweist, so ist, die Richtigkeit der Phasen-

1) Vergl. diese Berichte 1902, p. 305.
2) Diese Berichte 1903, p. 26 und Tafel II.

abgrenzung vorausgesetzt, der Herd des zu jenem gehörigen Bebens im östlichen Asien zu suchen. Sollte sich diese Prognose bestätigen, sollte sich also ergeben, daß zwei aus derselben Richtung, aber von weit auseinander liegenden Herden kommende, sich durch ein Seismometer aufzeichnende Erdbeben in dem übereinstimmen, was wir als die Hauptphasen ihrer Seismogramme bezeichnen, so würde sich der Schluß ergeben, daß die Ausbildung der Hauptphase durch das zwischen Herd und Seismometerstation liegende Terrain, also wohl durch dessen topographisches Relief oder geologisches Profil bedingt sein muß.

Eine besondere Eigentümlichkeit des Seismogramms vom 1. Februar zeigt sich noch darin, daß sich während seiner Aufzeichnung der Nullpunkt des Pendels wiederholt in auffälliger Weise verlegt hat, wie es bereits früher einmal bei dem Seismogramm des Kaschgarbebens vom 22. August 1902 der Fall war.[1]) Unter normalen Verhältnissen, d. h. bei ungestörter Gleichgewichtslage des Pendels sind die einzelnen Windungen der von dem Schreibstift aufgezeichneten Schraubenlinie etwas über 4 mm voneinander entfernt. Nun aber zeigt sich, daß beim Seismogramm der Ostwestkomponente vom 1. Februar 1903 während der Hauptphase der Schreibstift ganz allmählich sich der von ihm in der folgenden Stunde gezeichneten Linie nähert, bis er von $11^h\ 32^m$ bis $11^h\ 35^m$ nur etwa 2 mm von derselben entfernt ist; daß er dann in entgegengesetzter Richtung wandert, etwa $11^h\ 43^m$ bis $11^h\ 48^m$ nahezu seinen normalen Abstand innehält, um weiterhin, erst langsam, von $11^h\ 55^m$ bis $11^h\ 57^m$ jedoch ziemlich rasch, sich wiederum der linken Nachbarlinie, und zwar bis auf 1,5 mm, zu nähern, daß er schließlich ruckartig $11^h\ 54^m\ 15^s$ umkehrt und von $12^h\ 2^m$ an in derjenigen Lage weiterschreibt, die der Gleichgewichtslage des Pendels vor dem Beben entspricht.

Man muß aus dieser Nullpunktsverlegung schließen, daß der Standort des Seismometers während der Aufzeichnung des Seismogramms sich der angenommenen Richtung der Erdbebenwellen zweimal ganz langsam zugeneigt hat oder daß zwei Neigungswellen den seismischen Wellen entgegengegangen sind. Der Vorgang könnte ähnlich dem sein, den man am Wasserspiegel eines Flusses beobachten kann, wenn sich ein Dampfschiff nähert. Man sieht da den Wasserspiegel deutlich sinken, bis die durch die

1) Diese Berichte 1903, p. 27.

Schaufelräder erzeugten Wellen am Ufer dahinstreichen. Der einzige Unterschied ist der, daß auf dem Seismogramm sich die seismischen Wellen der Neigungswelle überordnen, also gleichzeitig mit ihr den Seismometerstandort passieren. Leider muß daran erinnert werden, daß im vorliegenden Falle bloß von der Ostwestkomponente eine Aufzeichnung vorliegt, daß also bloß die der Ostwestrichtung entsprechende Komponente der Neigung zu beobachten ist, so daß auf die wirkliche Größe und genauere Richtung der letzteren nicht geschlossen werden kann. Immerhin schien die Beobachtung der Erwähnung wert, da vorübergehende oder bleibende kleine Änderungen in der Gleichgewichtslage der Pendel im Anschluß an seismische Vorgänge offenbar nicht eben selten sind; war doch eine derartige leichte Verschiebung schon bei dem Kaschgarbeben vom 22. August 1902 zu konstatieren und hat sich eine solche sogar auch, wie weiterhin zu erwähnen sein wird, im Anschluß an einen leichten sehr nahen Erdstoß am 24. Februar dieses Jahres eingestellt.[1])

12.

5. Februar $20^h\ 5^m\ 3^s$ bis $21^h 17^m\ —^s$.

Ein Seismogramm von ostindischem Typus. Im ersten Einsatz sind bei der Nordsüdkomponente den kurzen Ausschlägen mit 0,8 Sekunde Periode mehrere solche mit 3 bis 4 Sekunden langen Perioden und 4 mm Amplitude eingefügt, die auf der Aufzeichnung der Ostwestkomponente fehlen. Der zweite Einsatz beginnt mit Wellen von 6 Sekunden Dauer, die Hauptphase mit solchen von 42 Sekunden Periode. Bei den Wellen mit den größten Amplituden ($20^h\ 39^m$ und $20^h\ 43^m$) ist die Periode bereits auf 18 bez. 15 Sekunden zurückgegangen.

13.

6. Februar $9^h\ 2^m\ 35^s$ bis $9^h\ 36^m\ —^s$.

Starke Pulsationen verwischen die Vorphasen bei beiden Komponenten, während die Hauptphase, nach kontinentalem Typus entwickelt, deutlich hervortritt.

---

1) p. 309.

14.

10. Februar $4^h\ 43^m\ 32^s$ bis $5^h\ 13^m$ —^{s}.

Züge schwacher sinusartiger Wellen mit anfänglich über 20 Sekunden langen Perioden, dieselben dürften auf den nämlichen Ursprung zurückzuführen sein, wie das vom Vicentinischen Seismometer in Manila $10^h\ 57^m\ 52^s$, nach M. E. Z. $3^h\ 43^m\ 4^s$ registrierte Beben, dessen Hauptphase sich dort von $10^h\ 59^m\ 38^s$ ($3^h\ 44^m\ 50^s$ M. E. Z.) an aufschrieb und das auf den Marianen (Guam) fühlbar war.[1])

15.

12. Februar $19^h\ 53^m\ 54^s$ bis $20^h\ 40^m$ —^{s}.

Starke Pulsationen und örtlicher Sturm verundeutlichen die Vorphasen, so daß der Zeitpunkt für den ersten Einsatz nicht als positiv sicher gelten kann. Die Hauptphase entspricht etwa der eines Bebens aus mäßiger Entfernung, auf dem Streifen der weniger gestörten Ostwestkomponente lassen sich in ihr Perioden von 8 Sekunden Dauer konstatieren.

16.

16. Februar 21^h —^{m} 17^s bis $21^h\ 6^m$ —^{s}.

Steirisches Beben.

Der an Prof. Belar gesendete und von diesem in den Neuesten Erdbeben-Nachrichten (Beilage zur Erdbebenwarte II, No. 9 und 10), p. 5 abgedruckte Bericht lautet: „21^h —^{m} 17^s verzeichnete das im geologischen Institut zu Leipzig stehende Wiechertsche astatische Pendelseismometer ein leichtes Beben aus mittlerer Entfernung. Die Nordsüdkomponente hatte wesentlich kräftiger registriert. Auf ihrer Aufzeichnung folgen dem eben erkennbaren ersten Einsatz mehrere leichte, durch kurzperiodige Wellen bewirkte Anschwellungen der seismogrammatischen Linie, worauf nach 95 Sekunden die Perioden und Amplituden zunehmen und $21^h\ 1^m\ 51^s$ mit Schwingungen von anfänglich 1,5 mm Amplitude und etwa 1,6 Sekunde Periode die Hauptphase beginnt. Die Intensität der Bodenbewegung läßt rasch nach, doch verlieren sich die letzten Spuren seismischer Wellen erst $21^h\ 6^m$ —^{s}. Die Aufzeichnung der Ostwestkomponente ist wesentlich schwächer.

1) Philippine Weather Bureau, Bulletin for February, p. 38. Manila.

Nach diesen Seismogrammen wurde geschlossen, daß in fast nordsüdlicher Richtung in über 500 km Entfernung der Herd des zugehörigen Bebens zu suchen sei.“

Nach Prof. Belar befindet sich das epizentrale Gebiet dieses Bebens 30—40 km westnordwestlich von Laibach. Die Laibacher Warte verzeichnete den Stoß, der im Epizentrum Türen öffnete, Bilder von der Wand warf und Mörtel abbröckelte, $20^h\ 59^m\ 10^s$.

17. 18. 19.

24. Februar $11^h\ 9^m\ 15^s$ bis $11^h\ 9^m\ 21^s$.
$11^h\ 42^m\ 17^s$ bis $11^h\ 42^m\ 23^s$.
$13^h\ 41^m\ 43^s$ bis $13^h\ 41^m\ 49^s$.

Diese drei Aufzeichnungen nehmen eine vollständig gesonderte Stellung ein. Zunächst unterscheiden sie sich scharf von allen seither, d. h. seit 15 Monaten beobachteten, durch nicht seismische Ereignisse bewirkten Aufschreibungen, so daß an ihrer seismischen Natur nicht gezweifelt werden kann; dann haben sie keinerlei Ähnlichkeit mit Teleseismogrammen, stimmen aber schließlich auch nicht mit solchen Seismogrammen überein, die auf ein bestimmtes, nahe liegendes Epizentrum bezogen werden können. Zeitlich fallen sie in die Reihe der Stöße, welche die gewaltige vogtländisch-erzgebirgische Schütterperiode des vergangenen Frühjahrs [1]) einleiten, so daß sie zunächst für Spuren von jenem Schüttergebiet ausgegangener seismischer Phänomene gehalten wurden. Dagegen spricht indes nicht nur der Umstand, daß die Seismogramme vogtländischer Erdstöße etwas anders aussehen, sondern vor allem der, daß von den vielen hundert Berichten, welche dieses Frühjahr bei der Erdbebenstation Leipzig über vogtländische Erdstöße einliefen, nicht ein einziger Zeitangaben aufweist, die einigermaßen denen der vorliegenden Aufzeichnungen entsprechen und zwar selbst dann nicht, wenn man den Differenzen der gewöhnlichen Taschen-, Wand- und Turmuhren in weitestgehendem Maße Rechnung trägt.

Von einem kräftigen vogtländischen Stoß verzeichnet das Leipziger Seismometer [2]) folgendes Seismogramm: 1) Eine Vor-

1) Siehe H. Credners gleichzeitig in den Abhandlungen dieser Gesellschaft Bd. XXVIII, Nr. 6, 1903 erscheinende Monographie.

2) Vergl. H. Credner, diese Berichte 1903, p. 11 und die eben erwähnte Monographie.

phase, bestehend aus einer Reihe sehr kurzperiodiger leichter Schwingungen, 2) eine Hauptphase, sich gliedernd in einen Anfangsteil, während dessen kurzperiodige Schwingungen die größten Amplituden des ganzen Seismogramms erreichen, und einen zweiten Abschnitt, in dem die Amplituden kleiner werden, die Perioden aber meßbare Größe erlangen, 3) einen Endabschnitt, in dem bei winzigen Wellen die Perioden wie Amplituden abnehmen, bis Ruhe eintritt. Bei einem minder kräftigen Stoß verschwindet aus dem Seismogramm zunächst die Vorphase, sodann fast völlig der zweite Abschnitt der Hauptphase und der Endteil, so daß für die schwächsten Aufzeichnungen nur der Anfangsteil der Hauptphase als knopfartige Anschwellung der seismogrammatischen Linie übrig bleibt, und zwar mit einem Durchmesser, der nur Bruchteile eines Millimeters mißt. Mit diesen schwächsten Registrierungen haben die uns beschäftigenden vom 24. Februar noch die meiste Ähnlichkeit, indem sie lediglich aus einer Reihe kurzperiodiger, rasch abnehmender Schwingungen bestehen. Eigenartig sind diese letzteren wieder insofern, als fast gleich die erste Schwingung die größte Amplitude besitzt und daß die Schwingungsweite dann rasch und regelmäßig auf Null sinkt. Die von dem Seismogramm eingenommene Fläche ist also die eines Kreissektors, dessen Bogen durch die erste Schwingung beschrieben wird. Im höchsten Grade ähnlich ist das Seismogramm, welches Belar mit dem Stoßmesser am 24. März 1901 in Laibach erhielt[1]), doch ist dieser Ähnlichkeit gegenüber daran zu erinnern, daß das Leipziger Seismometer die Horizontalkomponenten der Bodenbewegungen registriert.

Die Aufzeichnung des Stoßes $11^h 9^m 15^s$ beginnt bei der, übrigens durch Pulsationen stark gestörten Nordsüdkomponente mit einem Ausschlag von 2,3 mm Weite, bereits nach sechs Sekunden aber hat die seismogrammatische Linie wieder ihre normale Breite. Bei der Ostwestkomponente mißt der erste Ausschlag 3,5 mm, und dauert die Aufzeichnung gleichfalls bloß sechs Sekunden, zwei Sekunden nach jenem ersten Ausschlag aber verlegt sich der Nullpunkt des Pendels in höchst auffälliger Weise, so daß der Schreibstift um 1,5 mm nach Westen rückt. Da derartige Nullpunktverlegungen bisher[2]) bloß im Anschluß an augenscheinlich mit erheblichen tektonischen Veränderungen ver-

1) Erdbebenwarte 1901, Taf. I, Fig. 1.

2) Siehe diese Berichte 1903, S. 27 und vorliegende Aufzählung p. 305.

bundene Beben beobachtet worden sind, so fällt die vorliegende um so mehr auf, als der sie verursachende Stoß sicher in großer Nähe, aber für keinen Menschen fühlbar erfolgt ist.

Die Aufzeichnung $11^h\ 42^m\ 17^s$ beginnt bei der Nordsüdkomponente mit einem etwa 3, bei der Ostwestkomponente mit einem 3,5 mm breiten Ausschlage und dauert wie die vorige sechs Sekunden.

$13^h\ 41^m\ 43^s$ weist die Nordsüdkomponente einen Ausschlag von nahezu 4, die Ostwestkomponente einen solchen von nur 2 mm auf, dort tritt nach sechs, hier bereits nach vier Sekunden Ruhe ein.

20.

24. Februar $19^h\ 40^m\ 50^s$ bis $19^h\ 53^m$ —^{s}.

Das Seismogramm beginnt mit flachen Wellen von etwa 30 Sekunden Periode. Letztere verkürzt sich bald auf 20 Sekunden, während umgekehrt die Amplituden bei der Nordsüdkomponente von 1 auf 2,5 mm anschwellen. Die Ostwestkomponente hat wesentlich schwächer gezeichnet.

21.

27. Februar $2^h\ 8^m\ 28^s$ bis $3^h\ 46^m$ —^{s}.

Der erste Einsatz ist bei dem nach ostindischem Typus entwickelten Seismogramm nicht erkennbar. Im zweiten Einsatz lassen sich bei der Nordsüdkomponente, durch Pulsationen etwas verwischt, Wellen von 8—12 Sekunden Dauer konstatieren. Die Hauptphase beginnt mit sehr flachen Undulationen von 40 bis 45 Sekunden Periode, dann findet das bei diesem Typus regelmäßig wiederkehrende Anwachsen der Amplituden und allmähliche Kürzerwerden der Perioden statt. Die Ostwestkomponente hat wesentlich schwächer gezeichnet, insbesondere läßt sich bei derselben vom zweiten Einsatz nichts Deutliches erkennen.

22.

28. Februar $11^h\ 23^m\ 14^s$ bis $11^h\ 40^m$ —^{s}.

Der auffallend starken Pulsationen wegen lassen sich auf dem Streifen der Nordsüdkomponente keine seismischen Ausschläge erkennen, während auf dem der wenig gestörten Ostwestkomponente zwei Züge regelmäßiger Sinuswellen mit Perioden von 18 – 20 Sekunden Länge deutlich hervortreten.

23.

6. März $18^h\ 42^m\ 29^s$ bis $18^h\ 52^m\ —^s$.

Das Seismogramm der Hauptphase dieses Bebens von mittlerer Entfernung weist Wellen mit Perioden von 8—10 Sekunden Länge auf.

24.

12. März $15^h\ 41^m\ 16^s$ bis $16^h\ —^m\ —^s$.

Sibirisches Beben.

Das Seismogramm stellt die nach kontinentalem Typus entwickelte Hauptphase eines Bebens mit Wellen von 8—10 Sekunden Periode dar.

Nach Zeitungsnachrichten fand an diesem Tage 8^h vormittags in Bijsk, Gouv. Tomsk, ein recht starkes, wellenförmiges und stoßartiges Erdbeben statt, dessen ununterbrochene Dauer auf 1,5 Minuten geschätzt wurde.

25.

15. März $7^h\ 43^m\ 40^s$ bis $7^h\ 57^m\ —^s$.

Es läßt sich nur eine Anzahl leichter Wellen mit Perioden von je 15—20 Sekunden Dauer erkennen.

26.

15. März $15^h\ 35^m\ 30^s$ bis $16^h\ 32^m\ —^s$.

Ein flachwelliges Seismogramm. Der zweite Einsatz wird durch leichte Schwingungen mit 8,5 Sekunden langer Periode gebildet, in der mit ihm ohne scharfe Grenze verbundenen, gleichfalls nur aus flachen Wellen gebildeten Hauptphase erreichen die Perioden Längen von etwa 20 Sekunden.

27. 28.

20. März $0^h\ 57^m\ 57^s$ bis $1^h\ 2^m\ —^s$.
20. „ $1^h\ 2^m\ 28^s$ bis $1^h\ 4^m\ 30^s$.

Obersteirische Beben.

Der erste Einsatz ist nicht ganz scharf zu erkennen, dürfte aber in einer minimalen Anschwellung der Linie zu dem oben angegebenen Zeitpunkte zu erblicken sein. Ihm folgen $0^h\ 59^m\ 32^s$

eine Anzahl leichter zackiger Ausschläge mit Perioden von durchschnittlich einer Sekunde, die sich ganz allmählich verlieren.

Von 1^h 2^m 28^s an wiederholen sich derartige Ausschläge in so schwachem Grade, daß ihre Spuren bereits nach zwei Minuten völlig verschwunden sind.

Zeitungen berichten, daß in der Nacht zum 20. März in Obersteiermark, im Semmeringgebiet und im Mürztale wiederholt starke Stöße und wellenförmige Bewegungen verspürt worden sind. Mit diesen dürfte das Leipziger Seismogramm in kausalem Zusammenhang stehen.

29.

22. März 6^h 7^m 7^s bis 6^h 15^m $—^s$.

Pfälzer Beben.

Die Linie der *Ostwestkomponente* (S. 313, Fig. 1) weist 6^h 7^m 7^s eine leichte Ablenkung nach rechts auf, der bald kleine Ausschläge folgen, die in bezug auf Größe der Amplitude und Dauer der Periode ganz allmählich zunehmen. 6^h 8^m 8^s erreichen die Amplituden etwa 0,75 mm, die Perioden 1,4 Sekunden. Langsamer noch, als sie zugenommen haben, schwächen sich die Wellen wieder ab, so daß erst 6^h 15^m völlige Ruhe eintritt.

Auf der Zeichnung der *Nordsüdkomponente* (S. 313, Fig. 2) läßt sich von dem ersten Einsatz nichts erkennen, vielmehr erscheinen zwischen 10^h 7^m und 10^h 8^m ganz leichte kurze Ausschläge, die zunächst allmählich anschwellen, dann aber ruckartig 6^h 8^m 16^s die größten Amplituden und Perioden von 1 mm bezw. 1,4 Sekunde erreichen. Von derartigen stärksten Schwingungen haben sich, durch die Minutenmarkierung unterbrochen, sieben aufgezeichnet, so daß im ganzen acht stattgefunden haben mögen. Genau wie bei der Ostwestkomponente nehmen dann die Amplituden ab und verkürzen sich die Perioden.

Nach der Ostwestkomponente wird man den ersten Einsatz auf 6^h 7^m 7^s und nach der Nordsüdkomponente die Hauptphase des Seismogramms auf 6^h 8^m 16^s legen. Erster Einsatz und Hauptphase sind also 69 Sekunden von einander entfernt, so daß der Herd des Bebens nach früheren Erfahrungen[1]) in $69 \cdot 5{,}5 = 379{,}5$ km Entfernung zu suchen ist. Tatsächlich wurde in dieser Entfernung von Leipzig, nämlich in und bei

1) Diese Berichte 1902, p. 306.

1. Einsatz

6h 7m 25s

Beginn der Hauptphase

6h 8m 25s

6h 9m 25s

Fig. 1.

Fig. 2.

Das von dem Wiechertschen astatischen Pendelseismometer zu Leipzig registrierte Seismogramm des Pfälzer Bebens vom 22. März 1903 in 1250 facher Vergrößerung der wirklichen Bodenbewegungen.

Fig. 1. Ostwestkomponente, Fig. 2. Nordsüdkomponente.

Die je drei Unterbrechungen der seismogrammatischen Linien sind die Markierungen der Minuten 6h 11m, 6h 12m und 6h 13m durch die mit dem Seismometer verbundene Uhr. Der Zeitpunkt derselben wurde unter Berücksichtigung der —h 3m 35s betragenden Korrektur der Uhr auf mitteleuropäische Zeit umgerechnet. Der erste Einsatz fand in Leipzig 6h 7m 7s M. E. Z. statt, die Hauptphase begann 6h 8m 16s. Die letzten sich bis 6h 15m hinziehenden Schwingungen konnten aus Platzmangel nicht mit reproduziert werden.

Die Figuren wurden hergestellt, indem die betreffenden Linienstücke der Seismometerpapierstreifen, welche die wirklichen Bodenbewegungen vom Instrument in 250facher Vergrößerung aufgezeichnet enthalten, auf photographischem Wege in der Durchsicht weiter auf das Fünffache vergrößert wurden. Die Figuren sind dann die autotypischen Reproduktionen der so erhaltenen Photographien ohne irgend welche Retouche.

Die vor dem ersten Einsatz auf den Figuren sichtbaren winzigen Ausschläge sind die chronischen Erzitterungen des Leipziger Pendels, auf die in diesen Berichten 1902, S. 292 aufmerksam gemacht wurde.

Karlsruhe eine kurz rüttelnde, von Donnerrollen begleitete Erschütterung wahrgenommen, die von einem in der Pfalz erfolgenden Beben ausgegangen sein muß, da dieses hier so kräftig war, daß die Leute, den Einsturz der Häuser befürchtend, ins Freie eilten. Von Karlsruhe aus ist nach den Straßburger Berichten eine spezielle monographische Bearbeitung dieses Erdbebens zu erwarten, eine kurze Skizze desselben aber ist bereits von J. REINDL[1]) veröffentlicht worden. Nach derselben war die Erschütterung am stärksten in *Kandel* in der Rheinpfalz und nahm das pleistoseismische Gebiet, in welchem die Stärke auf 6—7 der FOREL-schen Skala geschätzt wird, eine elliptische Fläche ein, deren größere Achse mit SO-NW-Streichen von Mühlburg unweit Karlsruhe quer durch das Rheintal bis Siebeldingen in der Rheinpfalz sich erstreckt. Das Gebiet schwächster makroseismischer Wahrnehmungen bildet eine nach derselben Richtung gestreckte elliptische Fläche, welche nach SO bis jenseits Ettlingen in Baden, nach NO bis zum gleichfalls badischen Städtchen Philippsburg, nach NW bis Trippstadt südlich von Kaiserslautern, nach SW bis über Weißenburg hinaus reicht. Die SO-NW-Achse dieses äußersten makroseismischen Schüttergebietes mißt also 90, die SW-NO-Achse aber 60 km.

Ungleich weiter reichten natürlich die mikroseismischen Schwingungen. Dieselben durcheilten nach SW hin das 65 km entfernte Straßburg und wurden dort von sämtlichen Seismometern und zwar vom dreifachen Horizontalpendel als Hauptphase von $6^h\ 6^m\ 40^s$ an in der Dauer von zwei Minuten aufgezeichnet. In nordöstlicher Richtung erreichten die mikroseismischen Wellen in 390 km Entfernung Leipzig und schrieben hier von $6^h\ 8^m\ 16^s$ an die oben geschilderte Hauptphase des Seismogramms auf. Die beiden, die gleiche seismogrammatische Phase betreffenden Zeitangaben von Straßburg und Leipzig können zur Schätzung der Geschwindigkeit verwendet werden, mit der sich die seismischen Wellen fortpflanzten. Dieselben brauchten zur Zurücklegung der Wegdifferenz von Leipzig-Kandel gegenüber Straßburg-Kandel die Zeitdifferenz zwischen ihrem Eintreffen in Leipzig und in Straßburg. Jener Wegunterschied beträgt 390 — 65 = 325 km, die Zeitverschiedenheit aber $6^h\ 8^m\ 16^s - 6^h\ 6^m\ 40^s = 96^s$. Hieraus resultiert für die durch den Erdstoß erregten, sich oberflächlich

1) Geognostische Jahreshefte. Bayern. 16. Jahrgang, S. 14—24.

fortpflanzenden Wellen eine Geschwindigkeit von 325:96 = 3,385 km pro Sekunde. Diese Zahl steht in befriedigender Übereinstimmung mit derjenigen, welche in diesen Berichten[1]) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Hauptphasenwellen von Fernbeben angegeben wurde, sowie mit derjenigen, welche Omori[2]) für die gleichen Wellen berechnete und schließlich auch mit der, die H. Credner[3]) für die Ausbreitung der vogtländischen Erdstöße ermittelte.

Haben die Oberflächenwellen sich mit einer Geschwindigkeit von 3,385 km in der Sekunde fortgepflanzt, so muß sich das Beben, wenn man die von Straßburg angegebene Zeit berücksichtigt, in Kandel 65 : 3,385 = $19{,}2^s$ früher, also $6^h\ 6^m\ 21^s$ abgespielt haben.

30.

22. März $15^h\ 41^m\ 37^s$ bis $16^h\ 12^m\ —^s$.

Die Aufzeichnung ist insofern höchst eigentümlich, als beide Komponenten die Phasen in völlig entgegengesetzter Weise registriert haben. Die Nordsüdkomponente gibt den ersten Einsatz nur in Form leichtester Ausschläge wieder, während die Hauptphase ziemlich kräftig entwickelt ist und Schwingungen von 8—12 Sekunden Periode und bis 3 mm Amplitude aufweist. Bei der Ostwestkomponente dagegen fällt der kräftige erste Einsatz sofort in die Augen, während die Hauptphase so dürftig ist, daß man deren seismischer Natur nur durch den vorausgegangenen ersten Einsatz sicher wird.

31.

25. März $23^h\ 32^m\ 21^s$ bis $23^h\ 52^m\ —^s$.

Eine der vorigen ähnliche Aufzeichnung, nur sind die Gegensätze bei weitem nicht so scharf ausgeprägt.

---

1) 1902, S. 321.

2) Publications of the Earthquake Investigation Committee. Tokyo, No. 5, p. 80, 1901 und No. 13, p. 137.

3) Abh. d. K. S. Ges. d. Wiss. Leipzig. Bd. XXVIII, Nr. 6, 1903.

32.

28. März $9^h\ 16^m\ 30^s$ bis $9^h\ 34^m\ —^s$.

Beben von Russisch-Turkestan.

Ein Seismogramm von typisch kontinentaler Ausbildung, durch Pulsationen namentlich auf dem Streifen der Nordsüdkomponente gestört.

Die auf den ersten Blick gestellte Prognose in bezug auf das Epizentrum wurde durch die Zeitungsmeldung als zutreffend bestätigt, daß am 28. März 40 Werst von Andischan eine starke Erderschütterung wahrgenommen worden ist.

33.

28. März $10^h\ 59^m\ 43^s$.

Auf den Streifen beider Komponenten ordnen sich kurzperiodigen, schwachen Ausschlägen mit etwa 0,4 Sekunden Periode und bis 1 mm Amplitude andere mit längeren Perioden (3—6 Sekunden) und größeren Amplituden (3,5 mm bei der Nordsüd-, 2 mm bei der Ostwestkomponente) unter, so daß eine Zeichnung entsteht, die dem ersten Einsatz des Bebens vom 4. Januar (S. 297) sehr ähnelt, nur weniger kräftig ist. Merkwürdigerweise folgt dieser Aufzeichnung, deren Natur als die eines ersten Einsatzes auf Grund aller seitherigen Erfahrungen gar nicht bezweifelt werden kann, keinerlei weitere Phase, weder bei der Nordsüd-, noch bei der Ostwestkomponente. Pulsationen sind zwar störend auf beiden Streifen verzeichnet, doch war beispielsweise trotz solcher die Hauptphase des vorigen Stoßes (Nr. 32) deutlich erkennbar, so daß langperiodige Wellen, auch wenn dieselben Amplituden von nur 1 mm gehabt hätten, sicher noch wahrnehmbar sein müßten. Geradeso wie gelegentlich vom Seismometer Hauptphasen aufgezeichnet werden und von den Vorphasen nichts erkennbar ist, so scheint nach dem vorliegenden Falle auch das andere Extrem möglich zu sein, daß nämlich Fernbeben sich ereignen, von denen nur direkte Wellen bis an das Seismometer gelangen.

34.

3. April $22^h\ 13^m\ 30^s$ bis $22^h\ 52^m\ —^s$.

Sehr leichte, flache sinusartige Wellen.

35.

12. April $4^h\ 27^m\ 16^s$ bis $5^h\ 13^m\ —^s$.

Auf dem Streifen der Nordsüdkomponente machen sich von $4^h\ 27^m\ 16^s$ ab hier und da leichte Wellen mit 4—8 Sekunden langen Perioden bemerklich, denen von $4^h\ 44^m$ ab sehr langgezogene, ziemlich flache Wellen mit 40—30 Sekunden Periode folgen. Auf dem Streifen der Ostwestkomponente sind nur diese letzteren, ganz langsam dahinziehenden Wellen zur Aufzeichnung gelangt.

36.

29. April $0^h\ 45^m\ 21^s$ bis $1^h\ 54^m\ —^s$.

Nordsüdkomponente. Außer den rasch bis 1 mm breite Amplituden und 1,2 Sekunden lange Perioden erreichenden scharfzackigen Ausschlägen sind im ersten Einsatz noch wesentlich langsamere mit 4—6 Sekunden langen Perioden zu erkennen. Mit dem zweiten Einsatz verschwinden die kurzperiodigen Ausschläge plötzlich, die Wellen haben hier 4—6 Sekunden Schwingungsdauer und werden sechsmal von einzeln oder zu zweien kommenden längeren und kräftigeren Schwingungen unterbrochen, deren Amplituden 3,5—10,5 mm messen, während die Perioden zwischen 14 und 6 Sekunden schwanken. Die Hauptphase ist durch interferierende kürzere Wellen ziemlich gestört, doch scheint die Periode in keinem Falle 15 Sekunden zu überschreiten, während die größte Amplitude 16 mm mißt. Nach der auffallend kurzen Dauer von 7,5 Minuten beginnen sich die Wellen der Hauptphase bereits auszuglätten, doch dauert es noch geraume Zeit, ehe die letzten Spuren der sinusartigen Wellen verschwinden.

Ostwestkomponente. Die Aufzeichnung der Ostwestkomponente unterscheidet sich durch wesentlich kräftigere Ausbildung des ersten Einsatzes, aber sehr viel schwächere des zweiten und der Hauptphase von derjenigen der Nordsüdkomponente. Im ersten Einsatz mischen sich unter die kurzen Ausschläge viele längere mit 3 bis 4 Sekunden Periode und 2,5 mm Amplitude. Der zweite Einsatz beginnt mit einem kräftigen 4,5 mm weiten Ausschlage und besteht im übrigen aus leichten flachen Kräuselwellen. Die Hauptphase setzt sich aus unregelmäßigen flachen Wellen mit im Höchstfalle 16 Sekunden langer Periode und 2,5 mm breiter Amplitude zusammen. Die letzten seismischen

wiederholende zweite Einsatz, der durch Verlängerung der Perioden bis auf höchstens 15 Sekunden in die Hauptphase überführt, während deren die Amplituden nicht den Betrag der größeren des ersten Einsatzes erreichen. Besonders auffällig an dem Seismogramm ist der den zweiten Einsatz einleitende kräftige 10 mm breite Ausschlag.

Ostwestkomponente. Im ersten Einsatz treten die längeren und kräftigeren Ausschläge an Zahl zurück, dafür aber erreicht einer derselben die beträchtliche Weite von 5 mm. In entsprechender Weise wie oben ist der zweite Einsatz ausgebildet, und zwar besitzt hier die denselben einleitende erste Schwingung eine Weite von 13,5 mm. Die zweite Vorphase ist auch bei dieser Komponente nicht von der Hauptphase abzugrenzen.

44.

2. Juni $18^h\ 18^m\ 15^s$ bis $18^h\ 33^m\ —^s$.

Unregelmäßige Wellen mit etwa 6 Sekunden Schwingungsdauer und 1 bis 1,5 mm Amplitude.

45.

4. Juni $16^h\ 37^m\ —^s$ bis $16^h\ 46^m\ —^s$.

Flache sinusartige Wellen mit 15 Sekunden langer Periode.

46.

10. Juni $18^h\ 41^m\ 15^s$ bis $19^h\ 24^m\ —^s$.

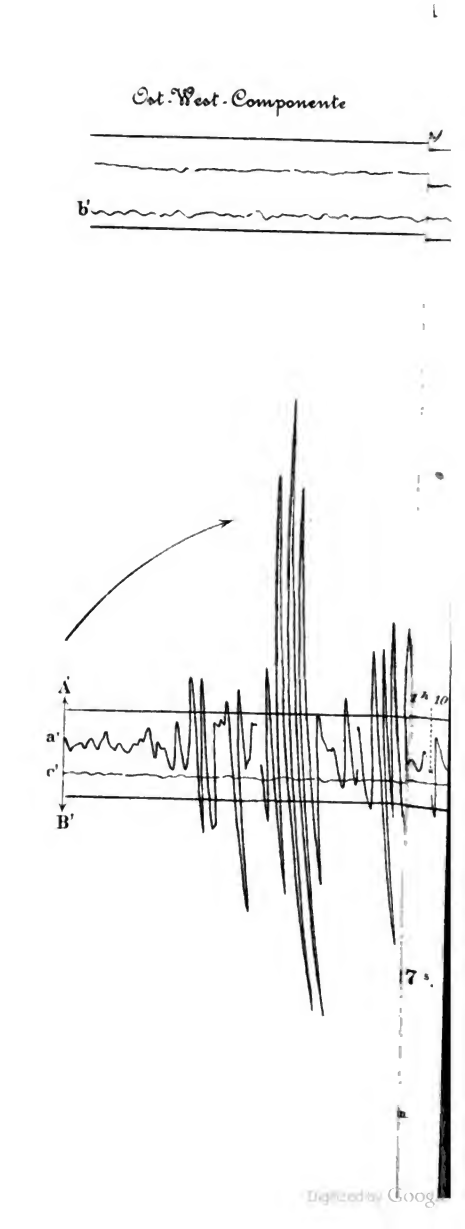
Wie Nr. 45, aber die Wellen mit 20 Sekunden langen Perioden.

47.

25. Juni $23^h\ 40^m\ 35^s$ bis $23^h\ 58^m\ —^s$.

Leichten Wellen mit 4 Sekunden langen Perioden folgen solche von je 12 Sekunden Schwingungsdauer, so daß augenscheinlich die zweite Vorphase und die Hauptphase eines sich in mittlerer Entfernung abspielenden Erdbebens vorliegt.

Math.-phys. Klasse 1903


Ost-West-Componente
b'
A'
a'
c'
B'
7 s.

Tafelerklärung.

Die photolithographische Reproduktion der Registrierung, welche die Ostwestkomponente am 1. Februar geliefert hat, konnte naturgemäß nicht in der vollen Länge des Seismometerpapierstreifens auf einer Tafel gegeben werden, infolgedessen wurde derselbe zerschnitten. Um nun die Aufzeichnung zu verfolgen, legt man die Linie AB auf $A'B'$, dann schließt a an a' und c an c' und man erhält zwei Linien mit seismischen Störungen unter einander, nämlich $saa'b$ und $b'cc'd$. Das ganze Seismogramm wird verfolgt, wenn man die Punkte s, a, a', b, b', c, c', d nach einander aufsucht. Über und unter den seismogrammatischen Linien wurde je eine gerade Linie in der Richtung durchgezogen, welche der Gleichgewichtslage des Pendels am 1. Februar entspricht. Man sieht deutlich, wie die seismogrammatischen Linien sich diesen Geraden nähern, oder sich von ihnen entfernen, konstatiert also, daß sich der Nullpunkt des Pendels während der Seismogrammaufzeichnung wiederholt verlegt hat. Die Zeitangaben an den seismogrammatischen Linien sind unkorrigiert, mit Hilfe der unten an der Tafel angegebenen Korrektur ist jeder beliebige Punkt des Seismogramms leicht auf M.E.Z. umzurechnen. Der erste Einsatz ist mit s bezeichnet. (Vergl. S. 303—306.)

Erdbebenstation
des paläontologisch-geologischen Instituts Leipzig. Juli 1903.

Druckfertig erklärt 7. XII. 1903.]

SITZUNG VOM 7. DEZEMBER 1903.

Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen, als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie.

Zweiter Teil.

Von

W. Scheibner.

II. Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Gleichungen.

16.

Im Folgenden soll das Verhalten der typischen Gleichung für die Werte $m = 2, 3, 4, 5, 6$ näher untersucht werden.[1]) Vorher mag noch die Bemerkung Platz finden, daß die assoziierten Kovarianten f_i auch durch die Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung

$$z^m + \widehat{m}_2 f_2 z^{m-2} + \widehat{m}_3 f_3 z^{m-3} \cdots + f_m = 0$$

ersetzt werden können. Denn führt man mittelst bekannter Formeln die Größen $\sigma_k = \mathrm{S}_i z_i^k$ ein, so hat man wegen $\sigma_1 = 0$ zu setzen:

$$\widehat{m}_2 f_2 = -\tfrac{1}{2}\sigma_2, \qquad \widehat{m}_3 f_3 = -\tfrac{1}{3}\sigma_3,$$

$$\widehat{m}_4 f_4 = -\tfrac{1}{4}\sigma_4 + \tfrac{1}{8}\sigma_2^2, \qquad \widehat{m}_5 f_5 = -\tfrac{1}{5}\sigma_5 + \tfrac{1}{6}\sigma_2\sigma_3,$$

$$\widehat{m}_6 f_6 = -\tfrac{1}{6}\sigma_6 + \tfrac{1}{8}\sigma_2\sigma_4 + \tfrac{1}{18}\sigma_3^2 - \tfrac{1}{48}\sigma_2^3,$$

$$\widehat{m}_7 f_7 = -\tfrac{1}{7}\sigma_7 + \tfrac{1}{10}\sigma_2\sigma_5 + \tfrac{1}{12}\sigma_3\sigma_4 - \tfrac{1}{24}\sigma_2^2\sigma_3,$$

$$\widehat{m}_8 f_8 = -\tfrac{1}{8}\sigma_8 + \tfrac{1}{12}\sigma_2\sigma_6 + \tfrac{1}{15}\sigma_3\sigma_5 + \tfrac{1}{32}\sigma_4^2 - \tfrac{1}{32}\sigma_2^2\sigma_4 - \tfrac{1}{36}\sigma_2\sigma_3^2 + \tfrac{1}{384}\sigma_2^4,$$

$$\widehat{m}_9 f_9 = -\tfrac{1}{9}\sigma_9 + \tfrac{1}{14}\sigma_2\sigma_7 + \tfrac{1}{18}\sigma_3\sigma_6 + \tfrac{1}{20}\sigma_4\sigma_5 - \tfrac{1}{40}\sigma_2^2\sigma_5 -$$
$$- \tfrac{1}{24}\sigma_2\sigma_3\sigma_4 - \tfrac{1}{162}\sigma_3^3 + \tfrac{1}{144}\sigma_2^3\sigma_3,$$

. . . .

1) Hier sind namentlich die zahlreichen Arbeiten von Cayley und Brioschi zu vergleichen, insbesondere das *Fifth Memoir upon Quantics* in den *Philos. Transact.* von 1858.

Die Summe der Koeffizienten in den Ausdrücken für $\widehat{m}_i f_i$ beträgt $\frac{1}{i!} - \frac{1}{(i-1)!}$. Schreibt man aber $\alpha_i = -\widehat{m}_i f_i$, so erhält man

$$\sigma_2 = 2\alpha_2, \qquad \sigma_3 = 3\alpha_3,$$
$$\sigma_4 = 4(\alpha_4 + \tfrac{1}{2}\alpha_2^2), \qquad \sigma_5 = 5(\alpha_5 + \alpha_2\alpha_3),$$
$$\sigma_6 = 6(\alpha_6 + \alpha_2\alpha_4 + \tfrac{1}{2}\alpha_3^2 + \tfrac{1}{3}\alpha_2^3),$$
$$\sigma_7 = 7(\alpha_7 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_2^2\alpha_3),$$
$$\sigma_8 = 8(\alpha_8 + \alpha_2\alpha_6 + \alpha_3\alpha_5 + \tfrac{1}{2}\alpha_4^2 + \alpha_2^2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3^2 + \tfrac{1}{4}\alpha_2^4),$$
$$\sigma_9 = 9(\alpha_9 + \alpha_2\alpha_7 + \alpha_3\alpha_6 + \alpha_4\alpha_5 + \alpha_2^2\alpha_5 + 2\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \tfrac{1}{3}\alpha_3^3 + \alpha_2^3\alpha_3),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die quadratischen Gleichungen.

Für $m = 2$ und die quadratische Funktion

$$fx = Ax^2 + 2Bx + C = A(x - x_0)(x - x_1)$$

wird

$$fx\,fy = (x-y)^2(z^2 + f_2)$$
$$f_2 = ff_{,,} - f_,f_, = \tfrac{1}{2}[ff]_2 = AC - B^2$$
$$(x-y)z = Axy + B(x+y) + C.$$

Folglich erhält man für $y = x_k$ die typische Gleichung

$$z^2 + f_2 = z^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_2 = 0,$$

wo $f_2 = -\Delta$ die Diskriminante des Art. 6 darstellt. Mithin ist

$$\Delta = B^2 - AC = \tfrac{1}{4}A^2(x_0 - x_1)^2 = \tfrac{1}{2}(z_0^2 + z_1^2)$$

nicht allein eine Invariante vom Gewicht und der Dimension 2, sondern es folgt auch

$$z^2 = \Delta = \tfrac{1}{2}\sigma_2 \quad \text{oder} \quad z = \pm\sqrt{\Delta}.$$

Da aber

$$z = Ay + B = -B - \frac{C}{y},$$

also für beliebige Multiplikatoren α und β:

$$(\alpha - \beta y)z = (\alpha A + \beta B)y + \alpha B + \beta C,$$

so ergibt sich

$$y = \frac{\alpha z - \alpha B - \beta C}{\beta z + \alpha A + \beta B} \quad \text{oder} \quad x_k = \frac{\pm\alpha\sqrt{\Delta} - \alpha B - \beta C}{\pm\beta\sqrt{\Delta} + \alpha A + \beta B}.$$

Für $\alpha = \beta = 0$ hat man demnach

$$x_0 = \frac{\sqrt{\Delta} - B}{A} = \frac{-C}{\sqrt{\Delta} + B} \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{-\sqrt{\Delta} - B}{A} = \frac{C}{\sqrt{\Delta} - B},$$

$$A(x_0 + x_1) = -2B, \quad A(x_0 - x_1) = 2\sqrt{\Delta},$$

während zugleich

$$(x - x_k)z = Axx_k + B(x + x_k) + C,$$

$$\Delta \cdot f = A(Axx_0 + B\overline{x + x_0} + C)(Axx_1 + B\overline{x + x_1} + C).$$

17.

Die kubischen Gleichungen.

$$m = 3.$$

Der *kubischen* Funktion

$$fx = Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D = A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

sind die Kovarianten $f_2 x$ und $f_3 x$ assoziiert, welche bereits Art. 12 in der Form

$$g = -f_2 = A_1 x^2 + B_1 x + C_1 = -\tfrac{1}{2}[ff]_2$$

$$A_1 = B^2 - AC, \quad B_1 = BC - AD, \quad C_1 = C^2 - BD,$$

$$h = -f_3 = i_0 x^3 + 3i_1 x^2 + 3i_2 x + i_3 = 2[fg]$$

$$i_0 = 3ABC - A^2 D - 2B^3, \quad i_1 = 2AC^2 - ABD - B^2 C,$$

$$i_2 = ACD - 2B^2 D + BC^2, \quad i_3 = AD^2 - 3BCD + 2C^3$$

entwickelt worden sind, und deren Grad, Gewicht und Dimension gleiche Werte haben. Zugleich wird $g^2 = \frac{1}{2}[fh]$.

Nach Art. 10 muß die Invariante von g

$$J = B_1^2 - 4A_1 C_1 = (BC - AD)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD)$$

$$= A^2 D^2 - 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3 D - 3B^2 C^2 = -2[gg]_2$$

auch als Invariante zu f gehören. Diese stimmt mit der Diskriminante $D_3(f)$ des Art. 6 überein und hat das Gewicht $p = 6$ und die Dimension $\mu = 4$, sodaß nach unseren früheren Sätzen für

$$J = F(ABCD), \quad f^2 J = F(f_3 f_2 0\, 1),$$

$$f^2 J = f_3^2 + 4f_2^3 = h^2 - 4g^3$$

erhalten wird. Zugleich ergeben sich durch Vergleichung der Potenzen von x die Relationen

$$A^2J = i_0^2 - 4A_1^3, \quad ABJ = i_0 i_1 - A_1^2 B_1,$$
$$D^2J = i_3^2 - 4C_1^3, \quad CDJ = i_2 i_3 - B_1 C_1^2,$$
$$(2AC + 3B^2)J = 2i_0 i_2 + 3i_1 i_1 - 4A_1(A_1 C_1 + B_1^2),$$
$$(2BD + 3C^2)J = 2i_1 i_3 + 3i_2 i_2 - 4C_1(A_1 C_1 + B_1^2),$$
$$(AD + 9BC)J = i_0 i_3 + 9i_1 i_2 - 2B_1(6A_1 C_1 + B_1^2),$$
$$J = Ai_3 - 2Bi_2 + Ci_1 = -Bi_2 + 2Ci_1 - Di_0,$$
$$Ai_3 + Di_0 = Bi_2 + Ci_1.$$

Man kann auch die beiden f_2 und f_3 entsprechenden Kovarianten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ von h bilden, indem man die Koeffizienten AB .. durch $i_0 i_1$ .. ersetzt. Dann ergibt eine leichte Rechnung

$$\mathfrak{g} = -Jg, \quad \mathfrak{h} = -J^2 f,$$

sodaß man auch auf diesem Wege die Invariante J hätte ableiten können. Außerdem findet man die zugehörige Invariante

$$\mathfrak{J} = J^3,$$

wie schon Eisenstein im 27. Bande des Crelleschen Journals (*Über eine merkwürdige identische Gleichung*, S. 105) anführt.

Die für $f^2 J$ gefundene Gleichung kann in der Form geschrieben werden:

$$g^3 = \tfrac{1}{4}(h^2 - f^2 J) = \frac{h + f\sqrt{J}}{2} \cdot \frac{h - f\sqrt{J}}{2}.$$

Daraus folgt, daß die beiden Faktoren $\frac{1}{2}(h \pm f\sqrt{J})$ dritten Potenzen linearer Ausdrücke gleich sein müssen, weil ein gemeinsamer Faktor beider f, g und h teilen müßte. Setzt man also

$$h + f\sqrt{J} = 2(ax + b)^3, \quad h - f\sqrt{J} = 2(a'x + b')^3,$$

so wird

$$g = (ax + b)(a'x + b') = A_1 x^2 + B_1 x + C_1,$$

mithin

$$aa' = A_1, \quad ab' + a'b = B_1, \quad bb' = C_1,$$

nebst

$$2a^3 = i_0 + A\sqrt{J}, \quad 2a'^3 = i_0 - A\sqrt{J},$$
$$2a^2 b = i_1 + B\sqrt{J}, \quad 2a'^2 b' = i_1 - B\sqrt{J},$$
$$2ab^2 = i_2 + C\sqrt{J}, \quad 2a'b'^2 = i_2 - C\sqrt{J},$$
$$2b^3 = i_3 + D\sqrt{J}, \quad 2b'^3 = i_3 - D\sqrt{J},$$

und wie man leicht verifiziert:

$$ab' - ba' = \sqrt{J} \quad \text{oder} \quad 2ab' = B_1 + \sqrt{J}, \quad 2a'b = B_1 - \sqrt{J}.$$

Es ist nun leicht, die Wurzeln der kubischen Gleichungen $f = 0$ und $h = 0$, sowie der typischen Gleichung für z anzugeben. Denn da

$$f\sqrt{J} = (ax+b)^3 - (a'x+b')^3 \quad \text{und} \quad h = (ax+b)^3 + (a'x+b')^3,$$

so erhält man für $f(y) = 0$ und $\varrho^3 = 1$

$$ay + b = \varrho(a'y + b') \quad \text{oder} \quad (a - a'\varrho)y = -(b - b'\varrho),$$

sowie für $h(y') = 0$

$$ay' + b = -\varrho(a'y' + b') \quad \text{oder} \quad (a + a'\varrho)y' = -(b + b'\varrho).$$

Schreibt man aber

$$j = e^{\frac{\pi i}{3}} = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}),$$

so haben die Einheitswurzeln ϱ die Werte 1, $-j$ und $-\frac{1}{j} = j^2$, sodaß für $y = x_k$:

$$x_0 = -\frac{b-b'}{a-a'}, \qquad x_1 = -\frac{b+b'j}{a+a'j}, \qquad x_2 = -\frac{b'+bj}{a'+aj},$$

während für $y' = x_k'$:

$$x_0' = -\frac{b+b'}{a+a'}, \qquad x_1 = -\frac{b-b'j}{a-a'j}, \qquad x_2' = -\frac{b'-bj}{a'-aj}.$$

Für reelle Werte der Koeffizienten in f sind die Wurzeln y und y' nur reell bei negativer Diskriminante J. Denn für $J < 0$ nehmen a und a', sowie b und b' konjugierte Werte an, sodaß nicht allein x_0 und x_0', sondern auch

$$x_1 = -\frac{(b+b'j)\left(a+\frac{a'}{j}\right)}{(a+a'j)\left(a+\frac{a'}{j}\right)} = -\frac{ab+a'b'+ab'j+a'b\frac{1}{j}}{a^2+aa'+a'^2}$$

nebst x_2, sowie x_1' und x_2' reell werden. Für $J > 0$ dagegen sind $a\,b\,a'\,b'$ reell, und neben der reellen Wurzel x_0 resp. x_0' die beiden $x_1 x_2$ resp. $x_1' x_2'$ konjugiert. Die Wurzeln

$$-\frac{b}{a} = \frac{-B_1 + \sqrt{J}}{2A_1} \quad \text{und} \quad -\frac{b'}{a'} = \frac{-B_1 - \sqrt{J}}{2A_1}$$

der quadratischen Gleichung $g = 0$ verhalten sich natürlich umgekehrt und sind reell für $J > 0$, konjugiert für $J < 0$.

18.

Wir wenden uns jetzt zur direkten Auflösung der *typischen* Gleichung

$$z^3 = 3gz + h = \tfrac{1}{2}\sigma_2 z + \tfrac{1}{3}\sigma_3,$$

also

$$\sigma_2 = 6g, \quad \sigma_3 = 3h.$$

Zufolge des Art. 15 hat man für $z = \dfrac{f}{x-y} - f_{,}$:

$$(x-y)z = (Ax^2 + 2Bx + C)y + (Bx^2 + 2Cx + D),$$

$$f^2 xfy = (x-y)^3(z^3 - 3gz - h) = (x-y)^3(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2),$$

und hieraus folgt für $y = x_k$:

$$z^3 = 3gz + h,$$

$$z = (Ay+B)x - C - \frac{D}{y} = (Ay+B)x + Ay^2 + 3By + 2C.$$

Schreibt man hier $z = u + v$, so wird

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 - 3uv(u+v) = 3g(u+v) + h,$$

und man kann die beiden Größen u und v durch die Gleichungen

$$u^3 + v^3 = h \quad \text{und} \quad uv = g$$

bestimmen. Da aber $h^2 - 4g^3 = f^2 J$, so ergibt sich weiter

$$u^3 - v^3 = f\sqrt{J}$$

und damit

$$u^3 = \tfrac{1}{2}(h + f\sqrt{J}) = (ax+b)^3, \quad v^3 = \tfrac{1}{2}(h - f\sqrt{J}) = (a'x+b')^3,$$

$$z = \varrho(ax+b) + \varrho'(a'x+b') = u + v.$$

Da wir aber $g = (ax+b)(a'x+b') = uv$ gesetzt haben, so folgt $\varrho\varrho' = 1$ und

$$z = \varrho(ax+b) + \varrho^2(a'x+b') = (a\varrho + a'\varrho^2)x + (b\varrho + b'\varrho^2).$$

Die Wurzeln der typischen Gleichung nehmen also jetzt die Gestalt an:

$$z_0 = (a+a')x + b + b', \quad z_1 = (a'j^2 - aj)x + (b'j^2 - bj),$$

$$z_2 = (aj^2 - a'j)x + (bj^2 - b'j), \quad \text{folglich} \quad z_0 + z_1 + z_2 = 0,$$

$$z_0 + z_1 j^2 - z_2 j = 3(ax+b), \quad z_0 = z_1 j + z_2 j^2 = 3(a'x+b').$$

Durch Quadrierung findet man leicht den Wert

$$z^2 - 2g = g + \frac{h}{z} = \varrho^2(ax + b)^2 + \varrho(a'x + b')^2.$$

Vergleicht man ferner den Ausdruck

$$z = (Ay + B)x - C - \frac{D}{y}$$

und läßt y unendlich zu- oder abnehmen, so folgt

$$Ay + B = \zeta = (a + a'\varrho)\varrho \quad \text{oder} \quad C + \frac{D}{y} = -(b + b'\varrho)\varrho,$$

woraus neue einfache Ausdrücke für die Wurzeln $y = x_k$ gewonnen werden. Man erhält sogleich, eventuell mit beliebigen Multiplikatoren α und β:

$$x_0 = \frac{a + a' - B}{A} = -\frac{D}{b + b' + C} = \frac{\alpha(a + a') - \alpha B - \beta D}{\beta(b + b') + \alpha A + \beta C},$$

$$x_1 = -\frac{aj - a'j^2 + B}{A} = \frac{D}{bj - b'j^2 - C} = \frac{\alpha j(a - a'j) + \alpha B + \beta D}{\beta j(b - b'j) - \alpha A - \beta C},$$

$$x_2 = \frac{aj^2 - a'j - B}{A} = -\frac{D}{bj^2 - b'j + C} = \frac{\alpha j(a' - aj) + \alpha B + \beta D}{\beta j(b' - bj) - \alpha A - \beta C},$$ [1]

nebst den Ausdrücken für die Lagrangesche Resolvente:

$$A(x_0 + x_1 + x_2) = -3B,$$

$$A(x_0 + x_1 j^2 - x_2 j) = 3a,$$

$$A(x_0 - x_1 j + x_2 j^2) = 3a'.$$

Den vorstehenden Gleichungen gehen die weiteren Formeln parallel:

$$D\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = -3C = -A(x_1 x_2 + x_2 x_0 + x_0 x_1),$$

$$D\left(\frac{1}{x_0} + \frac{j^2}{x_1} - \frac{j}{x_2}\right) = -3b = -A(x_1 x_2 + j^2 x_2 x_0 - j x_0 x_1),$$

$$D\left(\frac{1}{x_0} - \frac{j}{x_1} + \frac{j^2}{x_2}\right) = -3b' = -A(x_1 x_2 - j x_2 x_0 + j^2 x_0 x_1),$$

1) Zur Verifikation der Gleichung $\frac{b' - b}{a - a'} = \frac{a + a' - B}{A}$ dienen die Formeln

$$A(ab' - a'b) = a^3 - a'^3 = A\sqrt{J},$$

$$B(ab' - a'b) = a^2 b - a'^2 b' = B\sqrt{J}.$$

während die Invariante durch

$$J = D_3(f) = -\tfrac{1}{27}A^4(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_0)^2(x_0 - x_1)^2$$

und die Kovarianten durch

$$g = \tfrac{1}{18}A^2\{(x_1 - x_2)^2(x - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2(x - x_1)^2 + (x_0 - x_1)^2(x - x_2)^2\}$$

$$h = \tfrac{1}{27}A^3\sum_{6}(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)^2(x - x_1)^2(x - x_2)$$

als Funktionen der Wurzeln gegeben sind, wobei die symmetrische Summe $\sum$ aus *sechs* Gliedern besteht.[1]) Die Diskriminante der typischen Gleichung wird $f^2 J$, die Kovarianten g und h aber gehen über in

$$gz^2 + hz + g^2 \quad \text{und} \quad hz^3 + 6g^2z^2 + 3ghz + h^2 - 3g^2.$$

Die Werte von x_k und x_k' stehen in direktem Zusammenhang. Denn wenn die Wurzel z für $x = y'$ verschwindet, so erhält man

$$y' = \frac{C + \dfrac{D}{y}}{Ay + B},$$

und da vermöge der typischen Gleichung h gleichzeitig verschwinden muß, so wird

$$h = i_0\prod_{y'}(x - y') = i_0\prod_{y}\left(x - \frac{C + \dfrac{D}{y}}{Ay + B}\right) = i_0\prod_{y}\left(x + y + 2\,\frac{By + C}{Ay + B}\right).$$

Auf diesem Wege gehen durch Einführung der verschiedenen für $y = x_k$ gefundenen Ausdrücke die entsprechenden Formeln für $y' = x_k'$ hervor, analog wie man die Wurzeln $z_k = (Ax_k + B)x - C - \dfrac{D}{x_k}$ aus den Werten x_k ableiten könnte. Indessen gelangt man zu einfacheren Ausdrücken für x_k' durch die folgenden Betrachtungen.

---

1) Für die Koeffizienten i_k in h gelten die ähnlichen Summen

$$i_0 = \tfrac{1}{27}A^3\sum_{6}\{x_0^3 - 3x_0^2x_1 + 2x_0x_1x_2\},$$

$$i_1 = \tfrac{1}{27}A^3\sum_{6}\{2x_0^2x_1^2 - x_0^2x_1x_2 - x_0^3x_1\},$$

$$i_2 = \tfrac{1}{27}A^3\sum_{6}\{2x_0^3x_1x_2 - x_0^3x_1^2 - x_0^2x_1^2x_2\},$$

$$i_4 = \tfrac{1}{27}A^3\sum_{6}\{x_0^3x_1^3 - 3x_0^3x_1^2x_2 + 2x_0^2x_1^2x_2^2\}.$$

19.

Es ist nicht ohne Interesse, die allgemeinere Gleichung

$$wf - h = \mathfrak{A}(x - \mathfrak{x}_0)(x - \mathfrak{x}_1)(x - \mathfrak{x}_2) = \mathfrak{f}$$

mit dem Differential

$$d\mathfrak{f} = f dw + \frac{6g^2}{f} dx = 0$$

aufzulösen, wenn w eine beliebige Variable bedeutet. Man braucht dazu in dem Ausdruck für f nur

$$\mathfrak{A} = Aw - i_0, \quad \mathfrak{B} = Bw - i_1, \quad \mathfrak{C} = Cw - i_2, \quad \mathfrak{D} = Dw - i_3$$

an Stelle der Koeffizienten $ABCD$ zu setzen, wodurch

$$\mathfrak{A}_1 = A_1(w^2 - J), \quad \mathfrak{B}_1 = B_1(w^2 - J), \quad \mathfrak{C}_1 = C_1(w^2 - J)$$

hervorgehen, und die entsprechenden Werte der Kovarianten

$$\mathfrak{f} = wf - h, \quad \mathfrak{g} = g(w^2 - J), \quad \mathfrak{h} = (wh - fJ)(w^2 - J)$$

nebst der Diskriminante $\mathfrak{J} = J(w^2 - J)^2$ erhalten werden. Dann ist nicht allein

$$\mathfrak{J}\mathfrak{f}^2 = \mathfrak{h}^2 - 4\mathfrak{g}^3,$$

sondern auch

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{f}\sqrt{\mathfrak{J}} = 2(\mathfrak{a}x + \mathfrak{b})^3 = 2(ax + b)^3(w^2 - J)(w - \sqrt{J}),$$

$$\mathfrak{h} - \mathfrak{f}\sqrt{\mathfrak{J}} = 2(\mathfrak{a}'x + \mathfrak{b}')^3 = 2(a'x + b')^3(w^2 - J)(w + \sqrt{J}),$$

und für

$$\mu^3 = (w^2 - J)(w - \sqrt{J}), \quad \mu'^3 = (w^2 - J)(w + \sqrt{J}):$$

$$\mathfrak{a} = \mu a, \quad \mathfrak{b} = \mu b, \quad \mathfrak{a}' = \mu' a', \quad \mathfrak{b}' = \mu' b'.$$

Neben $x_k = -\dfrac{b - b'\varrho}{a - a'\varrho}$ und $x'_k = -\dfrac{b + b'\varrho}{a + a'\varrho}$ wird jetzt

$$\mathfrak{x}_k = -\frac{\mathfrak{b} - \mathfrak{b}'\varrho}{\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'\varrho} = -\frac{\mu b - \mu' b'\varrho}{\mu a - \mu' a'\varrho},$$

so daß für $w = \infty$, $\mu = \mu'$, $\mathfrak{x}_k$ in x_k, und für $w = 0$, $\mu = \sqrt{J}$, $\mu' = -\sqrt{J}$, $\mathfrak{x}_k$ in x'_k übergeht. Den Gleichungen endlich für $f(y) = 0$:

$$Ay + B = (a + a'\varrho)\varrho \quad \text{und} \quad C + \frac{D}{y} = -(b + b'\varrho)\varrho$$

entsprechen für $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = 0$ oder $h = wf$ die Werte

$$(Aw - i_0)\mathfrak{x} + (Bw - i_1) = (\mu a + \mu' a'\varrho)\varrho$$

und

$$Cw - i_2 + \frac{Dw - i_3}{\mathfrak{x}} = -(\mu b + \mu' b'\varrho)\varrho,$$

oder

$$\xi_k = \frac{(\mu a + \mu' a' \varrho)\varrho - Bw + i_1}{Aw - i_0} = - \frac{Dw - i_3}{(\mu b + \mu' b' \varrho)\varrho + Cw - i_2}.$$

Für $w = 0$ erhält man daraus die Wurzeln von h in der Form

$$x'_k = - \frac{i_1 + (a - a'\varrho)\varrho\sqrt{J}}{i_0} = - \frac{i_3}{i_2 - (b - b'\varrho)\varrho\sqrt{J}}.$$

20.

Die biquadratischen Gleichungen.

$m = 4.$

Die assoziierten Kovarianten der biquadratischen Funktion $fx = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ sind gegeben durch die Ausdrücke vierten und sechsten Grades

$$g = -h_2 = f_{,}f_{,} - ff_{,,} = -\tfrac{1}{2}[ff]_2$$
$$= A_1x^4 + 4B_1x^3 + 6C_1x^2 + 4D_1x + E_1,$$

$$A_1 = B^2 - AC, \quad 2B_1 = BC - AD, \quad 6C_1 = 3C^2 - 2BD - AE,$$
$$E_1 = D^2 - CE, \quad 2D_1 = CD - BE,$$

und

$$h = -h_3 = 2(f_{,}g - fg_{,}) = 2[fg]$$
$$= i_0x^6 + 6i_1x^5 + 15i_2x^4 + 20i_3x^3 + 15i_4x^2 + 6i_5x + i_6,$$

$$i_0 = 2(AB_1 - BA_1) = 3ABC - A^2D - 2B^3,$$
$$i_1 = AC_1 - CA_1, \quad 6i_1 = 9AC^2 - A^2E - 2ABD - 6B^2C,$$
$$i_2 = 2(BC_1 - CB_1), \quad 3i_2 = 2(AD_1 - DA_1) = 3ACD - ABE - 2B^2D,$$
$$i_3 = BD_1 - DB_1, \quad 2i_3 = AE_1 - EA_1 = AD^2 - B^2E,$$
$$i_4 = 2(CD_1 - DC_1), \quad 3i_4 = 2(BE_1 - EB_1) = ADE - 3BCE + 2BD^2,$$
$$i_5 = CE_1 - EC_1, \quad 6i_5 = AE^2 + 2BDE + 6CD^2 - 9C^2E,$$
$$i_6 = 2(DE_1 - ED_1) = BE^2 - 3CDE + 2D^3,$$

nebst der *Invariante* der Art. 6 und 10:

$$G = h_4 = AE - 4BD + 3CC = \tfrac{1}{2}[ff]_4.$$

Da h_i vom Gewicht i, so ist für g, h und G das Gewicht $p = 2, 3, 4$. Wir bemerken noch die häufig anwendbaren Formeln

$$3C_1 = BD - AE + \tfrac{1}{2}G, \quad 4C_1 = C^2 - AE + \tfrac{1}{3}G, \qquad C_1 = C^2 - BD - \tfrac{1}{6}G,$$

so wie

$$4i_1i_3 = i_0i_4 + 3i_2i_2, \quad 9i_2i_4 = i_0i_6 + 8i_3i_3,$$
$$4i_3i_5 = i_2i_6 + 3i_4i_4, \quad 2Ci_3 = Ai_5 + Ei_1 = Bi_4 + Di_2.$$

Man kann nun, indem man die Koeffizienten AB.. durch A_1B_1.. ersetzt, die entsprechenden Kovarianten $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{G}$ aus g bilden, und erhält durch direkte Rechnung die Werte

$$\mathfrak{g} = -\tfrac{1}{12}(Gg + 3Hf), \quad \mathfrak{h} = \tfrac{1}{4}Hh, \quad \mathfrak{G} = \tfrac{1}{12}G^2$$

mit den zugehörigen Gewichten 6, 9 und 8, während zur Abkürzung geschrieben ist:

$$H = ACE + 2BCD - AD^2 - B^2E - C^3 = -\tfrac{1}{3}[fg]_4.$$

Diese bereits im Art. 6 betrachtete Größe aber ist als Quotient der Kovarianten $\frac{4\mathfrak{h}}{h}$, neben G selbst eine *zweite Invariante* von f mit dem Gewicht 6. Die Invarianten G und H, deren Ausdrücke bereits Eisenstein, Boole und Cayley gefunden haben, werden bekanntlich von Weierstrass durch g_2 und g_3 bezeichnet. Will man auch die Invariante $\mathfrak{H}$ berechnen, so geht der Wert hervor:

$$\mathfrak{H} = \tfrac{1}{216}(G^3 - 54H^2) = \tfrac{1}{64}\prod(G - 6\lambda^2).$$

Wir wollen noch einen Augenblick die Kovariante

$g_4 = fH + gG$ vom Grade 4, Dimension 4 und Gewicht 6

betrachten, deren höchstes Glied durch $-Jx^4$ gegeben ist, während

$$g_4(0) = EH + (D^2 - CE)G.$$

Nach dem Hermiteschen Satze für $(-1)^p f^{p-\mu} gx$ folgt

$$f^2g_4 = -4f_2^3 - f_3^2 \quad \text{oder} \quad 4g^3 - h^2 = f^2(fH + gG).$$

Dieselbe wichtige Formel ergibt sich für $gx = H$, wodurch

$$f^3H = f_2f_4 - f_2^3 - f_3^2 = f^2h_2h_4 - 4h_2^3 - h_3^2$$
$$= 4g^3 - h^2 - f^2gG$$

oder

$$h^2 = 4g^3 - Ggf^2 - Hf^3 = 4(g - \lambda_0 f)(g - \lambda_1 f)(g - \lambda_2 f)$$

In dieser Gleichung bedeuten $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2$ die Wurzeln der sogenannten *kubischen Resolvente*

$$4\lambda^3 = G\lambda + H.$$ [1]

Man schließt daraus, daß in dem Ausdruck

$$h = 2\sqrt{g - \lambda_0 f} \cdot \sqrt{g - \lambda_1 f} \cdot \sqrt{g - \lambda_2 f}$$

die drei Radikale

$$\sqrt{g - \lambda f} = Px^2 + 2Qx + R$$

rationale Funktionen von x sein müssen.

Hier wird

$$\begin{array}{ll} A_1 - A\lambda = P^2, & B_1 - B\lambda = PQ, \\ E_1 - E\lambda = R^2, & D_1 - D\lambda = QR, \end{array} \quad 3(C_1 - C\lambda) = 2Q^2 + PR.$$

Nun ist aber identisch

$$(BC - AD - 2B\lambda)^2 =$$
$$= \{B^2 - A(C + \lambda)\}\{(C - 2\lambda)^2 - AE\} + A(4\lambda^3 - G\lambda - H),$$

also

$$4(B_1 - B\lambda)^2 = (A_1 - A\lambda)\{(C - 2\lambda)^2 - AE\}$$

oder

$$4Q^2 = (C - 2\lambda)^2 - AE.$$

Damit folgt weiter

$$PR = C^2 - BD - \lambda(C + 2\lambda),$$

und wenn man von der Gleichung

$$4C_1 = C^2 - AE + \tfrac{1}{3}G$$

Gebrauch macht:

$$Q^2 = C_1 - C\lambda + \lambda^2 - \tfrac{1}{12}G, \quad PR = C_1 - C\lambda - 2\lambda^2 + \tfrac{1}{6}G,$$

sodaß

$$Q^2 - PR = 3\lambda^2 - \tfrac{1}{4}G.$$

Es versteht sich übrigens von selbst, daß die Vorzeichen der Radikale PQ und R insoweit unbestimmt sind, als sie *gleichzeitig*

---

1) Man kann diese Gleichung auch in der Form der Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B & C - 2\lambda \\ B & C + \lambda & D \\ C - 2\lambda & D & E \end{vmatrix} = 0, \text{ nebst } H = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}$$

schreiben, wie Aronhold (Crelles Journal Bd. 52, S. 95) bemerkt hat. Die kubische Resolvente findet sich bereits bei Strehlke (Crelle Bd. 12, S. 358).

umgekehrt werden dürfen, damit die Produkte QR, PR und PQ ungeändert bleiben. Auch beweist man leicht das Stattfinden der drei linearen Relationen

$$0 = (C - 2\lambda)P - 2BQ + AR,$$
$$0 = DP - 2(C + \lambda)Q + BR,$$
$$0 = EP - 2DQ + (C - 2\lambda)R,$$

welche durch Multiplikation mit PQR verifiziert werden können.

21.

Die Auflösung der Gleichungen $f = 0$ und $h = 0$ ergibt sich jetzt ohne Schwierigkeit. Denn da neben

$$g - \lambda f = (Px^2 + 2Qx + R)^2,$$

wenn λ' und λ'' die übrigen Wurzeln der Resolvente bezeichnen, auch $g - \lambda' f = (P'x^2 + 2Q'x + R')^2$ und $g - \lambda'' f = (P''x^2 + 2Q''x + R'')^2$, so folgt sogleich

$$(\lambda'' - \lambda')f = (P'x^2 + 2Q'x + R')^2 - (P''x^2 + 2Q''x + R'')^2$$
$$= \{(P' - P'')x^2 + 2(Q' - Q'')x + R' - R''\} \times$$
$$\times \{(P' + P'')x^2 + 2(Q' + Q'')x + R' + R''\},$$

und durch Auflösung quadratischer Gleichungen:

$$(P' - P'')x = \pm S - Q' + Q'' \quad \text{und} \quad (P' + P'')x = \pm T - Q' - Q'',$$

wo

$$S^2 = (Q' - Q'')^2 - (P' - P'')(R' - R''),$$
$$T^2 = (Q' + Q'')^2 - (P' + P'')(R' + R'').$$

gesetzt ist.[1]) Dadurch sind die vier Wurzeln der biquadratischen Funktion fx bestimmt.

Selbstverständlich gehen die den Vertauschungen der Wurzeln $\lambda\,\lambda'\,\lambda''$ entsprechenden Zerlegungen parallel:

$$(\lambda - \lambda'')f = \{(P'' - P)x^2 + 2(Q'' - Q)x + R'' - R\} \times$$
$$\times \{(P'' + P)x^2 + 2(Q'' + Q)x + R'' + R\},$$
$$(\lambda' - \lambda)f = \{(P - P')x^2 + 2(Q - Q')x + R - R'\} \times$$
$$\times \{(P + P')x^2 + 2(Q + Q')x + R + R'\},$$

1) Übrigens wird sich herausstellen, daß die Größen S und T nicht voneinander verschieden sind.

für welche die Wurzelausdrücke zu bilden sind:

$$(P'' - P)x = \pm S' - Q'' + Q, \quad (P'' + P)x = \pm T' - Q'' - Q,$$
$$S'^2 = (Q'' - Q)^2 - (P'' - P)(R'' - R),$$
$$T'^2 = (Q'' + Q)^2 - (P'' + P)(R'' + R),$$

und

$$(P - P')x = + S'' - Q + Q', \quad (P + P')x = \pm T'' - Q - Q',$$
$$S''^2 = (Q - Q')^2 - (P - P')(R - R'),$$
$$T''^2 = (Q + Q')^2 - (P + P')(R + R').$$

Der Wert

$$h = 2\sqrt{(g - \lambda f)(g - \lambda' f)(g - \lambda'' f)} = 2\prod(Px^2 + 2Qx + R)$$

aber liefert, wenn

$$Q^2 - PR = 3\lambda^2 - \tfrac{1}{4}G = \tfrac{1}{4}\mu^2$$

geschrieben wird:

$$x = \frac{\mu - 2Q}{2P} = \frac{-2R}{\mu + 2Q} = \frac{\alpha\mu - 2\alpha Q - 2\beta R}{\beta\mu + 2\alpha P + 2\beta Q},$$

und da die den drei Wurzeln $\lambda\,\lambda'\,\lambda''$ entsprechenden Größen $P^2\,Q^2\,R^2\,\mu^2$ je drei Werte annehmen, während die Radikale $P\,Q\,R\,\mu$ doppelte Vorzeichen besitzen, so sind dadurch die sechs Wurzeln x vollständig bestimmt.

Es ist von Interesse die oben abgeleiteten Zerfällungen von fx in quadratische Faktoren mit einigen weiteren Zerlegungen zu vergleichen, die sich auf folgendem Wege ergeben. Wir schreiben $fx = \xi\xi$ mit den beiden Faktoren zweiten Grades

$$\xi_1\xi_1 = l_1x^2 + 2m_1x + n_1 \quad \text{und} \quad \xi_2\xi_2 = l_2x^2 + 2m_2x + n_2,$$

wodurch

$$A = l_1l_2, \quad 2B = l_1m_2 + l_2m_1, \quad 6C = 4m_1m_2 + l_1n_2 + l_2n_1.$$
$$E = n_1n_2, \quad 2D = m_1n_2 + m_2n_1,$$

Setzt man ferner

$$L = Ax^2 + 2Bx + C, \quad M = Bx^2 + 2Cx + D, \quad N = Cx^2 + 2Dx + E,$$

so folgt

$$f = Lx^2 + 2Mx + N, \quad f_, = Lx + M \quad \text{und} \quad f_{,,} = L.$$

Die Kovarianten g und h aber nehmen die Form an

$$g = \tfrac{1}{12}\xi^2(\xi'\xi' - 2\xi\xi'') = M^2 - LN = L_1x^2 + 2M_1x + N_1,$$
$$h = \tfrac{1}{12}\xi^5\xi''' = 2\{(LM_1 - L_1M)x^2 + (LN_1 - L_1N)x + MN_1 - M_1N\},$$

wo $L_1 M_1 N_1$ ebenso von $A_1 B_1 \ldots$ abhängen, wie $L M N$ von $A B \ldots$

Schreibt man jetzt

$$A \xi_1 \xi_1 = a\{Ax^2 + 2(B-P)x + C - 2\lambda - 2Q\},$$
$$a \xi_2 \xi_2 = \{Ax^2 + 2(B+P)x + C - 2\lambda + 2Q\},$$

wo a einen beliebigen Faktor bedeutet, so ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$3AC = A(C - 2\lambda) + 2(B^2 - P^2),$$
$$AD = B(C - 2\lambda) - 2PQ,$$
$$AE = (C - 2\lambda)^2 - 4Q^2.$$

Diese Gleichungen liefern nicht allein genau die früher abgeleiteten Werte von $P^2 Q^2$ und PQ, sondern geben auch durch Elimination von P und Q die kubische Resolvente für λ. Mithin dürfen wir setzen:

$$l_1 = a, \quad Am_1 = a(B-P), \quad An_1 = a(C - 2\lambda - 2Q),$$
$$a l_2 = A, \quad a m_2 = B + P, \quad a n_2 = C - 2\lambda + 2Q.$$

Aus diesen Werten gehen sogleich die Ausdrücke hervor:

$$m_1 m_2 = C + \lambda, \quad l_1 m_2 - l_2 m_1 = 2P, \quad l_1 n_2 - l_2 n_1 = 4Q,$$
$$l_1 n_2 + l_2 n_1 = 2(C - 2\lambda), \quad 6\lambda = 2m_1 m_2 - l_1 n_2 - l_2 n_1,$$
$$A(m_1 n_2 - m_2 n_1) = 4BQ - 2(C - 2\lambda)P \quad \text{oder} \quad m_1 n_2 - m_2 n_1 = 2R.$$

Damit erhält man auch

$$\pm\sqrt{g - \lambda f} = Px^2 + 2Qx + R = (l_1 x + m_1)(m_2 x + n_2) - (l_2 x + m_2)(m_1 x + n_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}\{(l_1 m_2 - l_2 m_1)x^2 + (l_1 n_2 - l_2 n_1)x + m_1 n_2 - m_2 n_1\}.$$

Man kann ferner die Zerlegung von fx in der Form herbeiführen:

$$(C+\lambda)\xi_1 \xi_1 = a'\{(B+P)x^2 + 2(C+\lambda)x + D - R\},$$
$$a' \xi_2 \xi_2 = \{(B-P)x^2 + 2(C+\lambda)x + D + R\},$$

oder

$$(C+\lambda)l_1 = a'(B+P), \quad m_1 = a', \quad (C+\lambda)n_1 = a'(D-R),$$
$$a' l_2 = B - P, \quad a' m_2 = C + \lambda, \quad a' n_2 = D + R,$$

nebst

$$Aa' = a(B-P), \quad (C+\lambda)(l_1 n_2 + l_2 n_1) = 2(BD + PR),$$
$$AR = 2BQ - (C - 2\lambda)P \quad \text{und} \quad 2(C+\lambda)Q = BR + DP.$$

Endlich wird auch

$$E\xi_1\xi_1 = a''\{(C - 2\lambda + 2Q)x^2 + 2(D + R)x + E\},$$
$$a''\xi_2\xi_2 = \quad \{(C - 2\lambda - 2Q)x^2 + 2(D - R)x + E\},$$

oder

$$El_1 = a''(C - 2\lambda + 2Q), \quad Em_1 = a''(D + R), \quad n_1 = a'',$$
$$a''l_2 = C - 2\lambda - 2Q, \qquad a''m_2 = D - R, \qquad a''n_2 = E,$$

nebst

$$Ea' = a''(D + R), \quad EP = 2DQ - (C - 2\lambda)R.$$

22.

Wenn man von der gegenseitigen Vertauschung der Faktoren ξ_1 und ξ_2 absieht, gibt es offenbar nur drei mögliche Zerlegungen $fx = \xi_1^2\xi_2^2$, welche den drei Wurzeln der kubischen Resolvente entsprechen. Um die im Vorstehenden gefundenen Zerfällungen miteinander zu vergleichen, setzen wir[1])

$$(\lambda'' - \lambda')\xi_1\xi_1 = b\{(P' - P'')x^2 + 2(Q' - Q'')x + R' - R''\},$$
$$b\xi_2\xi_2 = \quad (P' + P'')x^2 + 2(Q' + Q'')x + R' + R'',$$

mithin

$$(\lambda'' - \lambda')l_1 = b(P' - P''), \quad (\lambda'' - \lambda')m_1 = b(Q' - Q''),$$
$$(\lambda'' - \lambda')n_1 = b(R' - R''),$$
$$bl_2 = P' + P'', \quad bm_2 = Q' + Q'', \quad bn_2 = R' + R'',$$

nebst

$$(\lambda'' - \lambda')(l_1m_2 - l_2m_1) = (P' - P'')(Q' + Q'') - (P' + P'')(Q' - Q''),$$

oder $$(\lambda'' - \lambda')P = P'Q'' - P''Q',$$ sowie

$$2(\lambda'' - \lambda')Q = P'R'' - P''R', \quad (\lambda'' - \lambda')R = Q'R'' - Q''R'.$$

Dann erhält man die Relationen:

$$b(P' - P'') = (\lambda'' - \lambda')a = (\lambda'' - \lambda')a'\frac{B+P}{C+\lambda} = (\lambda'' - \lambda')a''\frac{C-2\lambda+2Q}{E},$$
$$a(P' + P'') = Ab, \quad a'(P' + P'') = (B - P)b,$$
$$a''(P' + P'') = (C - 2\lambda - 2Q)b,$$

1) Wollte man $(\lambda - \lambda'')\xi_1\xi_1$ oder $(\lambda' - \lambda)\xi_1\xi_1$ schreiben, so würde man auf Widersprüche geführt werden.

$$b(Q' - Q'') = (\lambda'' - \lambda')a\frac{B-P}{C+\lambda} = (\lambda'' - \lambda')a' = (\lambda'' - \lambda')a''\frac{D+R}{E},$$

$$a(Q' + Q'') = (B + P)b, \quad a'(Q' + Q'') = (C + \lambda)b,$$

$$a''(Q' + Q'') = (D - R)b,$$

$$b(R' - R'') = (\lambda'' - \lambda')a\frac{C-2\lambda-2Q}{A} = (\lambda''-\lambda')a'\frac{D-R}{C+\lambda} = (\lambda''-\lambda')a'',$$

$$a(R' + R'') = (C - 2\lambda + 2Q)b, \quad a'(R' + R'') = (D + R)b,$$

$$a''(R' + R'') = Eb.$$

Die Elimination der Faktoren $a\,a'\,a''\,b$ ergibt:

$$P' - P'' : Q' - Q'' : R' - R'' = A : B - P : C - 2\lambda - 2Q =$$
$$= B + P : C + \lambda : D - R = C - 2\lambda + 2Q : D + R : E,$$

$$P' + P'' : Q' + Q'' : R' + R'' = A : B + P : C - 2\lambda + 2Q =$$
$$= B - P : C + \lambda : D + R = C - 2\lambda - 2Q : D - R : E.$$

Die zyklische Vertauschung von $\lambda\,\lambda'\,\lambda''$ aber liefert:

$$P'' - P : Q'' - Q : R'' - R = A : B - P' : C - 2\lambda' - 2Q' =$$
$$= B + P' : C + \lambda' : D - R' = C - 2\lambda' + 2Q' : D + R' : E,$$

$$P'' + P : Q'' + Q : R'' + R = A : B + P' : C - 2\lambda' + 2Q' =$$
$$= B - P' : C + \lambda' : D + R' = C - 2\lambda' - 2Q' : D - R' : E.$$

$$P - P' : Q - Q' : R - R' = A : B - P'' : C - 2\lambda'' - 2Q'' =$$
$$= B + P'' : C + \lambda'' : D - R'' = C - 2\lambda'' + 2Q'' : D + R'' : E,$$

$$P + P' : Q + Q' : R + R' = A : B + P'' : C - 2\lambda'' + 2Q'' =$$
$$= B - P'' : C + \lambda'' : D + R'' = C - 2\lambda'' - 2Q'' : D - R'' : E.$$

Aus diesen Proportionen lassen sich eine größere Anzahl von Gleichungen zwischen $P\,Q\,R\,P'\,Q'\,R'\,P''\,Q''\,R''$ ableiten. So folgt aus

$$A(Q \mp Q') = (B \mp P'')(P \mp P') \quad \text{und} \quad E(Q \mp Q'') = (D \pm R'')(R \mp R'),$$

$$P'P'' = AQ - BP, \qquad R'R'' = DR - EQ,$$

$$P''P = AQ' - BP', \qquad R''R = DR' - EQ',$$

$$PP' = AQ'' - BP'', \qquad RR' = DR'' - EQ'',$$

Ferner erhält man die Werte

$$2Q'Q'' = BR - DP = P'R'' + P''R',$$
$$2Q''Q = BR' - DP' = P''R + PR'',$$
$$2QQ' = BR'' - DP'' = PR' + P'R,$$

und wenn man die gefundenen Gleichungen resp. mit PRQ multipliziert:

$$PP'P'' = AB_1 - BA_1 = \tfrac{1}{2}i_0,$$
$$RR'R'' = DE_1 - ED_1 = \tfrac{1}{2}i_6,$$
$$2QQ'Q'' = BD_1 - DB_1 = i_3,$$

Auch wird

$$P'R'' = (\lambda'' - \lambda')Q + Q'Q'', \qquad P''R' = (\lambda' - \lambda'')Q + Q'Q'',$$
$$P''R = (\lambda - \lambda'')Q' + Q''Q, \qquad PR'' = (\lambda'' - \lambda)Q' + Q''Q,$$
$$PR' = (\lambda' - \lambda)Q'' + QQ', \qquad P'R = (\lambda - \lambda')Q'' + QQ'.$$

23.

Wir können jetzt den Wurzeln $y = x_k$ der Gleichung $fy = 0$ eine einfachere Form geben, wenn wir

$$x_k = \frac{\alpha s - \alpha m - \beta n}{\beta s + \alpha l + \beta m}, \quad s^2 = m^2 - ln$$

setzen, wo $\alpha\beta$ und das Vorzeichen des Radikals s beliebig gewählt werden dürfen. Untersucht man die verschiedenen Zerlegungen von fx, so ergibt sich

1) für $l_1 = b\dfrac{P' - P''}{\lambda'' - \lambda'}, \quad l_2 = \dfrac{1}{b}(P' + P'')$, usw.

$$s_1^2 = m_1^2 - l_1 n_1 = \left(\frac{bS}{\lambda'' - \lambda'}\right)^2 = b^2, \quad s_1^2 s_2^2 = G - 3\lambda^2 = (\lambda' - \lambda'')^2,$$

$$s_2^2 = m_2^2 - l_2 n_2 = \left(\frac{T}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2}(\lambda'' - \lambda')^2, \quad S = T = \pm(\lambda' - \lambda'').$$

In der Tat wird wegen

$$Q^2 - PR = 3\lambda^2 - \tfrac{11}{4}G, \quad 2QQ' = P'R'' - P''R',$$
$$S^2 = (Q'^2 - P'R') + (Q''^2 - P''R'') - (2QQ' - P'R'' - P''R')$$
$$= 3(\lambda'^2 + \lambda''^2) - \tfrac{1}{2}G = (\lambda' - \lambda'')^2.$$

2) für $l_1 = a$, $l_2 = \frac{A}{a}$, usw.

$$s_1^2 = \frac{a^2}{A^2}\{(B-P)^2 - A(C-2\lambda-2Q)\} = \left(\frac{a}{A}\right)^2 (P'+P'')^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{a^2}\{(B+P)^2 - A(C-2\lambda+2Q)\} = \frac{1}{a^2}(P'-P'')^2,$$

$$s_1^2 s_2^2 = \frac{1}{A^2}(P'^2 - P''^2)^2 = (\lambda'-\lambda'')^2.$$

3) für $l_1 = a'\frac{B+P}{C+\lambda}$, $l_2 = \frac{1}{a'}(B-P)$, usw.

$$s_1^2 = \left(\frac{a'}{C+\lambda}\right)^2\{(C+\lambda)^2 - (B+P)(D-R)\} = \left(\frac{a'}{C+\lambda}\right)^2 (Q'+Q'')^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{a'^2}\{(C+\lambda)^2 - (B-P)(D+R)\} = \frac{1}{a'^2}(Q'-Q'')^2,$$

$$s_1^2 s_2^2 = G - 3\lambda^2 = \left\{\frac{Q'^2 - Q''^2}{C+\lambda}\right\}^2 = (\lambda'-\lambda'')^2.$$

4) Für $l_1 = a''\frac{C-2\lambda+2Q}{E}$, $l_2 = \frac{1}{a''}(C-2\lambda-2Q)$, usw.

$$s_1^2 = \left(\frac{a''}{E}\right)^2\{(D+R)^2 - E(C-2\lambda+2Q)\} = \left(\frac{a''}{E}\right)^2 (R'+R'')^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{a''^2}\{(D-R)^2 - E(C-2\lambda-2Q)\} = \frac{1}{a''^2}(R'-R'')^2,$$

$$s_1^2 s_2^2 = \frac{1}{E^2}(R'^2 - R''^2)^2 = (\lambda'-\lambda'')^2.$$

Aus dem Vorstehenden entspringen die Wurzelausdrücke

$$(P'-P'')y = \pm(\lambda'-\lambda'') - Q' + Q'',$$

$$(P'+P'')y = \pm(\lambda'-\lambda'') - Q' - Q'';$$

$$Ay = -B + P \pm (P'+P''),$$

$$Ay = -B - P \pm (P'-P'');$$

$$(B+P)y = -C - \lambda \pm (Q'+Q''),$$

$$(B-P)y = -C - \lambda \pm (Q'-Q'');$$

$$(C-2\lambda+2Q)y = -D - R \pm (R'+R''),$$

$$(C-2\lambda-2Q)y = -D + R \pm (R'-R'');$$

oder

$$\frac{R'-R''}{y} = \mp(\lambda'-\lambda'') - Q' + Q'',$$

$$\frac{R'+R''}{y} = \mp(\lambda'-\lambda'') - Q' - Q'';$$

$$\frac{C-2\lambda-2Q}{y}=-B+P\mp(P'+P''),$$
$$\frac{C-2\lambda+2Q}{y}=-B-P\mp(P'-P'');$$
$$\frac{D-R}{y}=-C-\lambda\mp(Q'+Q''),$$
$$\frac{D+R}{y}=-C-\lambda\mp(Q'-Q'');$$
$$\frac{E}{y}=-D-R\mp(R'+R''),$$
$$\frac{E}{y}=-D+R\mp(R'-R'').$$

Durch zyklische Vertauschung von $\lambda\lambda'\lambda''$ resp. $PP'P'$, $QQ'Q''$ und $RR'R''$ gehen selbstverständlich weitere analoge Ausdrücke für die Wurzeln y hervor, von deren Hinschreiben wir jedoch absehen dürfen.

Da die Radikale PQR durch ihre Quadrate gegeben sind, während nicht bloß die Produkte QR, RP und PQ, sondern auch die Werte von

$$PP'P''=\tfrac{1}{2}i_0,\quad QQ'Q''=\tfrac{1}{2}i_3,\quad RR'R''=\tfrac{1}{2}i_6$$

rational bleiben, so darf man gleichzeitig die Vorzeichen von je zweien unter ihnen umkehren und erhält dadurch aus einer Wurzel x_k die drei übrigen, z. B.

$$Ax_0+B=P+P'+P'',\qquad Ax_1+B=P-P'-P'',$$
$$Ax_2+B=-P+P'-P'',\quad Ax_3+B=-P-P'+P'',$$

sowie entsprechend bei den übrigen Formeln.

Bildet man die Produkte $(v-P^2)(v-P'^2)(v-P''^2)$, $(v-Q^2)(v-Q'^2)(v-Q''^2)$ und $(v-R^2)(v-R'^2)(v-R''^2)$, so folgen zur Bestimmung von $P^2Q^2R^2$ die kubischen Gleichungen

$$\prod(v-P^2)=v^3-3A_1v^2+\tfrac{3}{2}(Ai_1-Bi_0)v-\tfrac{1}{4}i_0^2=0,$$
$$\prod(v-Q^2)=v^3-3(C_1+\tfrac{1}{12}G)v^2+\tfrac{3}{4}(Bi_4-Di_2)v-\tfrac{1}{4}i_3^2=0,$$
$$\prod(v-R^2)=v^3-3E_1v^2+\tfrac{3}{2}(Di_6-Ei_5)v-\tfrac{1}{4}i_6^2=0,$$

wie man leicht durch direkte Rechnung findet. Ebenso erhält man

$$\prod(w-PQ)=w^3-3B_1w^2+\tfrac{1}{2}(Ai_3-Di_0)w-\tfrac{1}{4}i_0i_3,$$
$$\prod(w-PR)=w^3-3(C_1-\tfrac{1}{6}G)w^2+\tfrac{3}{2}[Ai_5-Bi_4=Di_2-Ei_1]w-\tfrac{1}{4}i_0i_6,$$
$$\prod(w-QR)=w^3-3D_1w^2+\tfrac{1}{2}(Bi_6-Ei_3)w-\tfrac{1}{4}i_3i_6.$$

Die Wurzeln der Gleichung $g(y') = 0$ ergeben sich auf folgendem Weg. Im Art. 20 hatten wir beim Übergang von f zu g die Kovarianten

$$\mathfrak{g} = -\tfrac{1}{12}(Gg + 3Hf), \quad \mathfrak{h} = \tfrac{1}{4}Hh$$

und die Invarianten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ abgeleitet, wodurch die Diskriminante

$$\mathfrak{G}^3 - 27\mathfrak{H}^2 = \tfrac{1}{16}H^2(G^3 - 27H^2)$$

hervorgeht. Bezeichnet man die entsprechende kubische Resolvente durch

$$4\lambda_g^3 = \mathfrak{G}\lambda_g + \mathfrak{H},$$

so überzeugt man sich ohne Schwierigkeit, daß

$$\lambda_g = \tfrac{1}{6}G - \lambda^2.^{1)}$$

Damit erhält man dem Ausdruck $g - \lambda f$ entsprechend

$$\mathfrak{g} - \lambda_g g = \lambda'\lambda''(g - \lambda f),$$

so daß beim Übergang von f zu g der Faktor $\lambda'\lambda''$ zu $g - \lambda f$ hinzutritt. Mithin geht auch $A_1 - A\lambda = P^2$ über in $\lambda'\lambda''P^2$ und

$$A_1 y' + B_1 = \mathrm{S} \pm \sqrt{\lambda'\lambda''(A_1 - A\lambda)},$$

wenn das Produkt der in der Summe enthaltenen Radikale mit Hi_0 im Vorzeichen übereinstimmt.

24.

Um jetzt zur biquadratischen *typischen* Gleichung überzugehen, deren Koeffizienten die assoziierten Kovarianten von f sind, setzen wir für

$$z = \frac{f}{x - y} - f_1:$$

$$(x-y)z = (Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D)y + (Bx^3 + 3Cx^2 + 3Dx + E),$$

nebst

$$f^3 xfy = (x-y)^4(z^4 + 6f_2z^2 + 4f_3z + f_4) = (x-y)^4 \prod_i (z - z_i),$$

oder da

$$f_4 = f^2h_4 - 3h_2^2 = Gf^2 - 3g^2,$$

$$f^3 xfy = (x-y)^4(z^4 - 6gz^2 - 4hz - 3g^2 + Gf^2).$$

---

1) In meiner Abhandlung *Zur Reduktion elliptischer Integrale*, S. 67 ist im Werte von $\mu = \lambda_g = -\frac{1}{3}(\lambda^2 + 2\lambda_1\lambda_2)$ der Faktor 2 irrtümlich ausgefallen.

Für $fy = 0$ folgt hieraus die typische Gleichung

$$z^4 = 6gz^2 + 4hz + 3g^2 - Gf^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\sigma_2 z^2 + \tfrac{1}{3}\sigma_3 z + \tfrac{1}{4}(\sigma_4 - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2),$$

also

$$\sigma_2 = 12g, \quad \sigma_3 = 12h, \quad \sigma_4 = 4(21g^2 - Gf^2),$$

nebst

$$z = (Ay + B)x^2 + (Ay^2 + 4By + 3C)x - D - \frac{E}{y}.$$

Die Invarianten G und H gehen über in Gf^2 und Hf^3, die Wurzel λ in λf.

Zur Auflösung dieser Gleichung setzen wir

$$z = u_0 + u_1 + u_2 = \mathrm{S}\,u,$$
$$w = u_1 u_2 + u_2 u_0 + u_0 u_1 = \mathrm{S}\,u u_1$$

und erhalten

$$z^2 = 2w + \mathrm{S}\,u^2, \quad w^2 = 2u_0 u_1 u_2 z + \mathrm{S}\,u^2 u_1^2,$$

sowie durch fernere Quadrierung:

$$z^4 = 8u_0 u_1 u_2 z + 4\,\mathrm{S}\,u^2 u_1^2 + 4w\,\mathrm{S}\,u^2 + \mathrm{S}\,u^2\,\mathrm{S}\,u^2.$$

Vergleicht man damit den Ausdruck

$$6gz^2 + 4hz + 3g^2 - Gf^2 = 12gw + 4hz + 6g\,\mathrm{S}\,u^2 + 3g^2 - Gf^2,$$

so erkennt man leicht, daß beide Werte identisch werden, wenn man

$$h = 2u_0 u_1 u_2, \quad 3g = \mathrm{S}\,u^2 \quad \text{und}$$
$$3g^2 - \tfrac{1}{4}Gf^2 = \mathrm{S}\,u^2 u_1^2, \text{ also auch } \tfrac{1}{4}h^2 = u_0^2 u_1^2 u_2^2$$

setzt. Hieraus folgt, daß für $u^2 = v$ die kubische Gleichung

$$v^3 - 3gv^2 + 3(g^2 - \tfrac{1}{12}f^2 G)v - \tfrac{1}{4}h^2 = 0$$

die Wurzeln u_0^2 u_1^2 und u_2^2 liefert.

Diese Gleichung aber geht durch die Substitution $v = g - \lambda f$ nach leichter Reduktion in die kubische Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H$$

über, sodaß als die gesuchten Wurzelwerte sich die Ausdrücke ergeben:

$$u^2 = g - \lambda f = (Px^2 + 2Qx + R)^2 \text{ und } z = \mathrm{S}\sqrt{g - \lambda f};$$

die Vorzeichen der Radikale müssen dabei der Gleichung

$$\sqrt{g - \lambda f} \cdot \sqrt{g - \lambda' f} \cdot \sqrt{g - \lambda'' f} = \tfrac{1}{2}h$$

entsprechen, wodurch die vier Wurzeln $z_0 z_1 z_2 z_3$ völlig bestimmt sind.

Schreibt man wie Art. 15 $z = x^2\zeta$ und läßt x unendlich wachsen, so folgt

$$\zeta^4 = 6A_1\zeta^2 + 4i_0\zeta + 3A_1^2 - A^2G,$$

nebst

$$\zeta = Ay + B = \mathrm{S}\sqrt{A_1 - A\lambda} = \mathrm{S}P.$$

Dieser Ausdruck endlich liefert wegen $y = x_k$ die Wurzeln $x_0 x_1 x_2 x_3$ der Funktion fx, wenn die Vorzeichen der Radikale der Gleichung

$$\sqrt{A_1 - A\lambda}\cdot\sqrt{A_1 - A\lambda'}\,.\sqrt{A_1 - A\lambda''} = PP'P'' = \tfrac{1}{2}i_0$$

genügen. Man sieht, daß ähnlich wie bei den kubischen Gleichungen die Benutzung der typischen Gleichung auf direktem Wege zur einfachsten Form der Wurzeln der biquadratischen Funktion führt.

Die für $v = g - \lambda f$ gefundene Gleichung liefert

$$\prod(v - g + \lambda f) = v^3 - 3gv^2 + 3(g^2 - \tfrac{1}{12}f^2G)v - \tfrac{1}{4}h^2,$$

und wenn man die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x vergleicht:

$$\prod(v - P^2) = v^3 - 3A_1v^2 + 3(A_1^2 - \tfrac{1}{12}A^2G)v - \tfrac{1}{4}i_0^2,$$

während für $x = 0$:

$$\prod(v - R^2) = v^3 - 3E_1v^2 + 3(E_1^2 - \tfrac{1}{12}E^2G)v - \tfrac{1}{4}i_6^2.$$

Die Formel

$$g^2 - \tfrac{1}{12}Gf^2 = \tfrac{1}{2}[fh] = \tfrac{1}{2}(f_{,}h - fh_{,})$$

ergibt identisch

$$A_1^2 - \tfrac{1}{12}A^2G = \tfrac{1}{2}(Ai_1 - Bi_0),$$
$$E_1^2 - \tfrac{1}{12}E^2G = \tfrac{1}{2}(Di_6 - Ei_5),$$

in Übereinstimmung mit den Resultaten des Art. 23.

Vergleicht man die Ausdrücke

$$\sqrt{g - \lambda f} = Px^2 + 2Qx + R,$$

$$z = x^2\mathrm{S}P + 2x\mathrm{S}Q + \mathrm{S}R$$
$$= (Ay + B)x^2 + (Ay^2 + 4By + 3C)x - D - \frac{E}{y},$$

so folgt

$$\mathrm{S}P = Ay + B, \quad \mathrm{S}R = -D - \frac{E}{y},$$

$$\mathrm{S}Q = \tfrac{1}{2}(Ay^2 + 4By + 3C) = -\tfrac{1}{2}\left(3C + 4\frac{D}{y} + \frac{E}{y^2}\right),$$

wo die vier Wurzelwerte von y den zulässigen Zeichenwechseln von $PP'P''$ usw. entsprechen. Man findet nunmehr leicht

$$\mathrm{S}P'P'' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{S}P)^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{S}P^2 = A\mathrm{S}Q - B\mathrm{S}P$$
$$= \tfrac{1}{2}A(Ay^2 + 2By + C) - A_1$$

und analog:

$$\mathrm{S}Q'Q'' = -\tfrac{1}{2}\left(ADy + 2BD + \frac{BE}{y}\right),$$
$$\mathrm{S}R'R'' = \tfrac{1}{2}E\left(C + 2\frac{D}{y} + \frac{E}{y^2}\right) - E_1,$$

nebst

$$PP'P'' = \tfrac{1}{2}i_0, \quad QQ'Q'' = \tfrac{1}{2}i_3, \quad RR'R'' = \tfrac{1}{2}i_6.$$

Damit gehen die drei Produkte hervor:

$$\prod(u - P) = u^3 - (Ay + B)u^2 + [\tfrac{1}{2}A(Ay^2 + 2By + C) - A_1]u - \tfrac{1}{2}i_0,$$
$$\prod(u - Q) = u^3 - [\tfrac{1}{4}(Ay^2 - \frac{E}{y^2}) + By - \frac{D}{y}]u^2 - \tfrac{1}{2}(ADy + 2BD + \frac{BE}{y})u - \tfrac{1}{2}i_3,$$
$$\prod(u - R) = u^3 + (D + \frac{E}{y})u^2 + [\tfrac{1}{2}E(C + 2\frac{D}{y} + \frac{E}{y^2}) - E_1]u - \tfrac{1}{2}i_6,$$

welche den oben gefundenen Werten von $\prod(v - P^2)\ldots$ und $\prod(w - PQ)\ldots$ zur Seite stehen.

25.

Es sollen jetzt die bei der Untersuchung der biquadratischen Funktion auftretenden Größen durch die Wurzeln x_k ausgedrückt werden. Wenn ξ_1 für $x = x_0$ und x_1, ξ_2 für $x = x_2$ und x_3 verschwindet, so ergeben die Zerlegungen der Art. 21/22:

$$x_0 + x_1 = -2\frac{m_1}{l_1} = -2\frac{B - P}{A} = -2\frac{C + \lambda}{B + P}$$
$$= -2\frac{D + R}{C - 2\lambda + 2Q} = -2\frac{Q' - Q''}{P' - P''},$$
$$x_2 + x_3 = -2\frac{m_2}{l_2} = -2\frac{B + P}{A} = -2\frac{C + \lambda}{B - P}$$
$$= -2\frac{D - R}{C - 2\lambda - 2Q} = -2\frac{Q' + Q''}{P' + P''},$$
$$x_0x_1 = \frac{n_1}{l_1} = \frac{C - 2\lambda - 2Q}{A} = \frac{D - R}{B + P} = \frac{E}{C - 2\lambda + 2Q} = \frac{R' - R''}{P' - P''},$$
$$x_2x_3 = \frac{n_2}{l_2} = \frac{C - 2\lambda + 2Q}{A} = \frac{D + R}{B - P} = \frac{E}{C - 2\lambda - 2Q} = \frac{R' + R''}{P' + P''}.$$

Hieraus folgt nicht allein

$$4P = A(x_0 + x_1 - x_2 - x_3),$$
$$4Q = A(x_2 x_3 - x_0 x_1),$$
$$4R = A\{x_0 x_1 (x_2 + x_3) - x_2 x_3 (x_0 + x_1)\},$$

neben

$$4B = -A(x_0 + x_1 + x_2 + x_3),$$
$$6C = A\{x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_0 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3\},$$
$$4D = -A\{x_0 x_1 (x_2 + x_3) + x_2 x_3 (x_0 + x_1)\},$$
$$E = A x_0 x_1 x_2 x_3,$$

sondern auch

$$4P' = A(x_0 - x_1 + x_2 - x_3), \quad 4P'' = A(x_0 - x_1 - x_2 + x_3),$$
$$4Q' = A(x_1 x_3 - x_0 x_2), \quad 4Q'' = A(x_1 x_2 - x_0 x_3),$$
$$4R' = A\{x_0 x_2 (x_1 + x_3) - x_1 x_3 (x_0 + x_2)\},$$
$$4R'' = A\{x_0 x_3 (x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_0 + x_3)\}.$$

Schreibt man ferner

$$\varpi = (x_0 - x_1)(x_2 - x_3), \quad \varpi' = (x_0 - x_2)(x_3 - x_1),$$
$$\varpi'' = (x_0 - x_3)(x_1 - x_2), \quad \varpi + \varpi' + \varpi'' = 0,$$

so geht die Gleichung

$$6\lambda = 2 m_1 m_2 - l_1 n_2 - l_2 n_1$$

über in

$$\lambda = \tfrac{1}{12} A(\varpi' - \varpi'') \quad \text{nebst} \quad \lambda' = \tfrac{1}{12} A(\varpi'' - \varpi)$$

und $\lambda'' = \tfrac{1}{12} A(\varpi - \varpi')$, folglich auch

$$\lambda' - \lambda'' = -\tfrac{1}{4} A \varpi, \quad \lambda'' - \lambda = -\tfrac{1}{4} A \varpi', \quad \lambda - \lambda' = -\tfrac{1}{4} A \varpi''.$$ [1]

---

1) Es mögen noch die Summen $\mathrm{S}\,\varpi P$, $\mathrm{S}\,\varpi Q$ und $\mathrm{S}\,\varpi R$ untersucht werden. Man findet leicht die Ausdrücke

$$\mathrm{S}\,\varpi P = \tfrac{1}{2} A (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1),$$
$$\mathrm{S}\,\varpi Q = -\tfrac{1}{2} A x_0 (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1),$$
$$\mathrm{S}\,\varpi R = \tfrac{1}{2} A x_0^2 (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1),$$

mithin auch

$$\mathrm{S}\,\varpi (P x^2 + 2 Q x + R) = \tfrac{1}{2} A (x_1 - x_2 \cdot x_2 - x_3 \cdot x_3 - x_1)(x - x_0)^2.$$

Daraus folgt, daß die Summe

$$\mathrm{S}\,(\lambda'' - \lambda')\sqrt{g - \lambda f},$$

Die entwickelten Formeln zeigen, daß zwischen der biquadratischen Gleichung und der kubischen Resolvente eine gewisse Reziprozität besteht, sofern nicht allein die Wurzeln x_k mittelst der λ, sondern auch die Wurzeln λ durch die x_k ausgedrückt werden, sodaß die Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen aufeinander reduktibel ist.[1]) Übrigens ist leicht ein-

---

abgesehen von konstanten Faktoren, die Quadrate der linearen Faktoren der Funktion f darstellt, wenn man die Vorzeichen zweier Radikale beliebig annimmt. In der Tat erhält man durch Multiplikation der vier Aggregate

$$(\lambda'' - \lambda')\sqrt{g - \lambda f} \pm (\lambda - \lambda'')\sqrt{g - \lambda' f} \pm (\lambda' - \lambda)\sqrt{g - \lambda'' f},$$

wie schon Cayley andeutet, für beliebige Werte von f und g den Wert

$$\tfrac{1}{16} ff(G^3 - 27H^2).$$

1) Man wird, um die Wurzeln einer kubischen Gleichung durch die x_k zu bestimmen, diese Gleichung einfach auf die Form $4\lambda^3 = G\lambda + H$ zu bringen und damit eine biquadratische Funktion f mit den Invarianten G und H zu vergleichen haben. Dazu reicht es aus, etwa die beiden Koeffizienten A und E durch die willkürlich gewählten BCD mittelst der Gleichungen

$$G = AE - 4BD + C^2 \quad \text{und} \quad H = ACE - AD^2 - B^2E + 2BCD - C^3$$

auszudrücken. Man erhält sogleich durch Auflösung einer quadratischen Gleichung für

$$Q^2 = 16(C^2 - BD)^3 - 4(2C^4 - 3BC^2D + B^2D^2)G + \\ + 4C(2C^2 - 3BD)H + (CG - H)^2:$$

$$2AD^2 = CG - H - 2C(2C^2 - 3BD) + Q,$$

$$2B^2E = CG - H - 2C(2C^2 - 3BD) - Q.$$

Setzt man beispielsweise $C = 0$, also $\sum x_0 x_1 = 0$, so folgt

$$2AD^2 = Q - H, \quad 2B^2E = -Q - H$$

nebst

$$Q^2 = -16B^3D^3 - 4B^2E^2G + H^2.$$

Analog findet man für $B = 0$:

$$AD^2 = CG - H - 4C^3, \quad E = \frac{G - 3C^2}{A} = \frac{D^2(G - 3C^2)}{CG - H - 4C^3},$$

folglich für $B = C = 0$ und $D = 1$:

$$A = -H, \quad E = -\frac{G}{H},$$

sodaß die x_k der biquadratischen Gleichung entsprechen:

$$H^2x^4 - 4Hx + G = 0.$$

zusehen, daß man an Stelle von $\lambda = \frac{1}{12}A(\varpi' - \varpi'')$ eine kubische Resolvente für $\Lambda = \lambda' - \lambda'' = -\frac{1}{4}A\varpi$ konstruieren kann, welche die Form hat

$$4\Lambda^3 = 3G\Lambda \pm \sqrt{G^3 - 27H^2}.$$

Verwandte Betrachtungen lassen sich bei den Gleichungen fünften und sechsten Grades anstellen, weil nicht allein, wie seit Lagrange bekannt, die Funktionen fünften Grades *bikubische Resolventen* besitzen, sondern auch gewisse bikubische Gleichungen eine Graderniedrigung um eine Einheit gestatten.[1])

26.

Die kubische Resolvente liefert für die Wurzeln λ die Gleichungen

$$\mathrm{S}\lambda = 0, \quad \mathrm{S}\lambda\lambda' = -\frac{1}{4}G \quad \text{und} \quad \lambda\lambda'\lambda'' = \frac{1}{4}H = \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{4}G);$$

die Diskriminante erhält man aus dem Werte der Invariante J, wenn man

$$A = 4, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{3}G \quad \text{und} \quad D = -H$$

setzt. Damit wird

$$A_1 = \frac{4}{3}G, \quad B_1 = 4H, \quad C_1 = \frac{1}{9}G^2, \quad \text{folglich}$$

$$J = -\frac{16}{27}(G^3 - 27H^2) = -\frac{256}{27}(\lambda - \lambda' \cdot \lambda' - \lambda'' \cdot \lambda'' - \lambda)^2$$

$$= -\frac{1}{16 \cdot 27}A^6\varpi^2\varpi'^2\varpi''^2 = -\frac{1}{16 \cdot 27}A^6\prod{}^*(x_i - x_k)^2,$$

oder

$$D_4(f) = G^3 - 27H^2 = -\frac{27}{16}J = \frac{1}{256}A^6\prod{}^*(x_i - x_k)^2,$$

während durch Einführung der Koeffizienten i_k von h:

$$G^3 - 27H^2 = 36(4i_2i_4 - \quad i_1i_5 - 3i_3i_3)$$
$$= \frac{9}{2}(3i_0i_6 + 5i_2i_4 - 8i_1i_5)$$
$$= 4(4i_0i_6 + 5i_3i_3 - 9i_1i_5).$$

Wir bemerken noch die identische Gleichung

$$G^3 - 27H^2 = (12\lambda^2 - G)^2(G - 3\lambda^2) +$$
$$+ 12(4\lambda^3 - G\lambda + H)(4\lambda^3 - G\lambda - H),$$

---

1) Man vergleiche z. B. die Abhandlung von Brioschi, Math. Annalen Bd. 13, S. 139.

oder wenn zur Abkürzung geschrieben wird

$$\mu^2 = 12\lambda^2 - G = 4(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda''),$$

$$\nu^2 = G - 3\lambda^2 = (\lambda' - \lambda'')^2 = \lambda^2 - \frac{H}{\lambda} = 9\lambda^2 - \mu^2:$$

$$G^3 - 27H^2 = \mu^4\nu^2.$$

Zugleich schließen wir, daß für einen reellen Wert von λ^2, ν^2 gleiches Vorzeichen mit $G^3 - 27H^2$ haben muß. Für reelle Werte von G und H werden die Wurzeln $\lambda\lambda'\lambda''$ sämtlich reell, wenn $G^3 > 27H^2$ oder $G > 3\lambda^2$, während im entgegengesetzten Falle λ' und λ'' konjugierte komplexe Werte annehmen. Dann hat man $G < 3\lambda^2$, und ν wird rein imaginär.

Es ergeben sich ferner ohne Schwierigkeit die Werte

$$\mu^2 = -\tfrac{1}{4}A^2\varpi'\varpi'', \quad \mu'^2 = -\tfrac{1}{4}A^2\varpi\varpi'', \quad \mu''^2 = -\tfrac{1}{4}A^2\varpi\varpi',$$

$$\nu^2 = \tfrac{1}{16}A^2\varpi^2, \quad \nu'^2 = \tfrac{1}{16}A^2\varpi'^2, \quad \nu''^2 = \tfrac{1}{16}A^2\varpi''^2,$$

und wegen

$$\mathrm{S}\lambda^2 = \tfrac{1}{2}G, \quad \mathrm{S}\lambda^2\lambda'^2 = \tfrac{1}{16}G^2, \quad \lambda^2\lambda'^2\lambda''^2 = \tfrac{1}{16}H^2:$$

$$\mathrm{S}\mu^2 = 3G, \quad \mathrm{S}\mu^2\mu'^2 = 0,$$

$$\mu^2\mu'^2\mu''^2 = \prod(12\lambda^2 - G) = -4(G^3 - 27H^2);$$

$$\mathrm{S}\nu^2 = \tfrac{3}{2}G, \quad \mathrm{S}\nu^2\nu'^2 = \tfrac{9}{16}G^2,$$

$$\nu^2\nu'^2\nu''^2 = \prod(G - 3\lambda^2) = \tfrac{1}{16}(G^3 - 27H^2).$$

Die Invarianten G und H aber sind gegeben durch

$$G = \tfrac{1}{24}A^2(\varpi^2 + \varpi'^2 + \varpi''^2) = 2(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2) = -4(\lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda + \lambda\lambda')$$

$$= \tfrac{2}{3}\{(\lambda' - \lambda'')^2 + (\lambda'' - \lambda)^2 + (\lambda - \lambda')^2\} = \tfrac{1}{24}A^2\sum_3 (x_0 - x_1)^2(x_2 - x_3)^2,$$

$$H = \tfrac{1}{432}A^3(\varpi' - \varpi'')(\varpi'' - \varpi)(\varpi - \varpi') = 4\lambda\lambda'\lambda''$$

$$= \tfrac{1}{432}A^3\sum_6 (x_0 - x_1)^2(x_2 - x_3)^2(x_0 - x_2)(x_1 - x_3).$$

Für die Kovarianten endlich erhält man die symmetrischen Summen:

$$g = \tfrac{1}{48}A^2\sum_6 (x_0 - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)^2,$$

$$h = \tfrac{1}{32}A^3\sum_4 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)^2.$$

resp. mit sechs und mit vier Gliedern.

Es möge noch die direkte Bestimmung der Wurzeln λ der Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H,$$

in welche die allgemeine Gleichung $Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D = 0$ übergeht, wenn man

$$Ax = 2\lambda - B, \quad G = 3A_1 \quad \text{und} \quad H = \tfrac{1}{2}i_0$$

schreibt, als Beispiel für die Auflösung einer kubischen Gleichung Platz finden. Man erhält sogleich nach dem Früheren der Artt. 17, 18

$$\lambda = \frac{a+a'}{4} = -\frac{b-b'}{a-a'} = \frac{H}{b+b'-\frac{1}{3}G},$$

$$\lambda' = \frac{-aj+a'j^2}{4} = -\frac{b+b'j}{a+a'j} = \frac{H}{-bj+b'j^2-\frac{1}{3}G},$$

$$\lambda'' = \frac{aj^2-a'j}{4} = -\frac{b'+bj}{a'+aj} = \frac{H}{bj^2-b'j-\frac{1}{3}G},$$

nebst den Gleichungen

$$aa' = \tfrac{4}{3}G, \quad bb' = \tfrac{1}{9}G^2, \quad ab'+a'b = 4H, \quad ab'-a'b = \sqrt{J},$$

$$a^3+a'^3 = i_0 = 16H, \quad a^3-a'^3 = A\sqrt{J} = 16W,$$

$$b^3+b'^3 = i_3 = 2(H^2+W^2), \quad b^3-b'^3 = D\sqrt{J} = -4HW,$$

wo

$$W^2 = H^2 - (\tfrac{1}{3}G)^3 \quad \text{oder} \quad 4W = \sqrt{J}$$

geschrieben ist. Damit ergeben sich die Werte:

$$a = 2(H+W)^{\frac{1}{3}}, \quad a' = 2(H-W)^{\frac{1}{3}},$$

$$b = (H-W)^{\frac{2}{3}}, \qquad b' = (H+W)^{\frac{2}{3}},$$

folglich auch

$$2\lambda = (H+W)^{\frac{1}{3}} + (H-W)^{\frac{1}{3}},$$

$$2\lambda' = -j(H+W)^{\frac{1}{3}} + j^2(H-W)^{\frac{1}{3}},$$

$$2\lambda'' = j^2(H+W)^{\frac{1}{3}} - j(H-W)^{\frac{1}{3}},$$

nebst

$$2(\lambda'-\lambda'')i = \sqrt{3}\,\{(H+W)^{\frac{1}{3}} - (H-W)^{\frac{1}{3}}\},$$

$$2(\lambda-\lambda'')i = \sqrt{3}\,\{j(H+W)^{\frac{1}{3}} + j^2(H-W)^{\frac{1}{3}}\},$$

$$2(\lambda-\lambda')i = \sqrt{3}\,\{j^2(H+W)^{\frac{1}{3}} + j(H-W)^{\frac{1}{3}}\}.$$

Schreibt man endlich zur Bestimmung des Vorzeichens von ν

$$\nu = \lambda' - \lambda'', \quad \nu' = \lambda'' - \lambda, \quad \nu'' = \lambda - \lambda',$$

so wird

$$\mu^2 = -4\nu'\nu'' = G + 3\{(H+W)^{\frac{2}{3}} + (H-W)^{\frac{2}{3}}\},$$

$$\mu'^2 = -4\nu''\nu = G + 3\{j^2(H+W)^{\frac{2}{3}} - j(H-W)^{\frac{2}{3}}\},$$

$$\mu''^2 = -4\nu\nu' = G + 3\{-j(H+W)^{\frac{2}{3}} + j^2(H-W)^{\frac{2}{3}}\}.$$

27.

Im Folgenden wollen wir unter λ_0 in jedem Falle diejenige reelle Wurzel verstehen, welche von gleichem Vorzeichen mit H ist. Daß nur *eine* solche stets vorhanden sein muß, ergeben die Relationen

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{und} \quad H = \lambda_0\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0(4\lambda_0^2 - G).$$

Durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda_0\lambda + \lambda_0^2 - \tfrac{1}{4}G = 0$$

folgt sogleich

$$2\lambda_1 = -\lambda_0 + \nu_0, \quad 2\lambda_2 = -\lambda_0 - \nu_0.$$

Ist nun $G^3 > 27H^2$ oder $W^2 < 0$, so soll, da ν_0 reell oder $\nu_0^2 > 0$ ist, λ_1 die mittlere der drei reellen Wurzeln bezeichnen. Dann wird

$$\text{für} \quad H > 0, \quad \lambda_0 > 0 > \lambda_1 > \lambda_2,$$

$$\text{für} \quad H < 0, \quad \lambda_0 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2,$$

mithin haben

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \nu_0, \quad \lambda_0 - \lambda_1 = \nu_2 \quad \text{und} \quad \lambda_0 - \lambda_2 = -\nu_1$$

das Vorzeichen von H. Daraus folgt, daß

$$\mu_0^2 = -4\nu_1\nu_2 \quad \text{und} \quad \mu_2^2 = -4\nu_0\nu_1$$

positiv, also μ_0 und μ_2 reell werden, während $\mu_1^2 = -4\nu_0\nu_2$ negativ und μ_1 imaginär sein muß.

Geht man zu den Wurzelquadraten über, so folgt nicht allein

$$\mu^2 + \nu^2 = 9\lambda^2 > \mu^2,$$

sondern es gelten in jedem Falle die Ungleichungen

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = \lambda_0^2 > \lambda_2^2 > \lambda_1^2,$$

sodaß λ_2^2 das *mittlere Wurzelquadrat* ist. Man kann diese Ungleichung vervollständigen und schreiben:

$$\tfrac{1}{3}G > \lambda_0^2 > \tfrac{1}{4}G > \lambda_2^2 > \tfrac{1}{12}G > \lambda_1^2 > 0,$$

wie die Werte der symmetrischen Produkte

$$\prod(G - 3\lambda^2) > 0, \quad \prod(12\lambda^2 - G) < 0 \quad \text{und} \quad \prod(4\lambda^2 - G) = 4H^2$$

ohne Schwierigkeit ergeben.

Besteht aber die Ungleichung $G^3 < 27H^2$ oder $W^2 > 0$, so hat man auch

$$\nu_0^2 = G - 3\lambda_0^2 = \lambda_0^2 - \frac{H}{\lambda_0} = 9\lambda_0^2 - \mu_0^2 < 0.$$

Folglich ist ν_0 rein imaginär, μ_0 reell und λ_0 die einzige reelle Wurzel, während λ_1 und λ_2, ν_1 und ν_2, sowie μ_1^2 und μ_2^2 konjugierte Werte haben. Auch ergibt sich, da für

$$G^3 = 27H^2, \quad G = 3\lambda_0^2 = 12\lambda_1^2 = 12\lambda_2^2,$$

und in diesem Grenzfalle die Werte

$$\lambda^2 = \tfrac{1}{3}G \quad \text{und} \quad \lambda = H^{\frac{1}{3}}$$

zusammengehören, die doppelte Ungleichung[1]):

$$H^{\frac{2}{3}} > \lambda_0^2 > \tfrac{1}{3}G,$$

die für $G < 0$ durch $H^{\frac{2}{3}} > \lambda_0^2 > 0$ zu ersetzen ist. Das Produkt der beiden komplexen Wurzeln gibt

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{H}{4\lambda_0} = \lambda_0^2 - \tfrac{1}{4}G,$$

auch hat man

$$\mu_0^2 > 9\lambda_0^2 > 3G \text{ resp. } > 0.$$

28.

Wir untersuchen noch die Realitätsbedingungen für die Wurzeln $y = x_k$ der biquadratischen Gleichung $fy = 0$.

1) In der Tat erhält man

$$\text{für } \lambda^2 = \tfrac{1}{3}G > H^{2/3}, \quad (4\lambda^3 - G\lambda)^2 > H^2,$$

$$\text{und für } \lambda^2 = H^{2/3} > \tfrac{1}{3}G, \quad (4\lambda^3 - G\lambda)^2 < H^2,$$

sodaß zwischen $\frac{1}{3}G$ und $H^{2/3}$ das Quadrat einer Wurzel $\pm\lambda_0$ liegen muß, für welche $(4\lambda^3 - G\lambda)^2 = H^2$.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, da die drei Wurzeln λ der kubischen Resolvente den drei möglichen Zerlegungen der biquadratischen Funktion in Faktoren zweiten Grades entsprechen, daß die Realität einer Zerlegung von der Realität der Größen λPQR abhängt. Nun ist die Realität von $P^2Q^2R^2$ an die der zugehörigen Wurzeln λ geknüpft, dagegen muß, wenn auch die Radikale PQR reell sein sollen, die Ungleichung $A_1 > A\lambda$ erfüllt sein. Dann ist nicht allein $P = \sqrt{A_1 - A\lambda}$ reell, sondern neben den Produkten PQ und PR auch Q und R. Folglich wird zugleich $(C - 2\lambda)^2 > AE$ und $E_1 > E\lambda$, sodaß diese drei Ungleichungen sich gegenseitig bedingen. Früher fanden wir

$$PP'P'' = \tfrac{1}{2} i_0 \quad \text{oder} \quad i_0 i_0 = 4 \prod (A_1 - A\lambda),$$

und von diesen drei Faktoren muß mindestens *einer* reell und positiv sein, während das Gleiche nur von dem *Produkt* der beiden übrigen behauptet werden kann. Für $G^3 < 27 H^2$ sind $A_1 - A\lambda'$ und $A_1 - A\lambda''$ konjugiert komplex, sodaß $A_1 - A\lambda > 0$ und die zugehörigen Werte von PQR reell werden. Von den Wurzeln x_k der Funktion f sind alsdann zwei reell und zwei konjugiert komplex, wie sich sogleich aus der Ungleichung

$$s_1^2 s_2^2 = (m_1^2 - l_1 n_1)(m_2^2 - l_2 n_2) = G - 3\lambda^2 < 0$$

ergibt, da die reellen und komplexen Wurzeln von ξ_1 und ξ_2 sich durch das Vorzeichen von $s^2 = m^2 - ln$ unterscheiden.

Minder einfach ist die Entscheidung über das Vorzeichen von $A_1 - A\lambda$ für $G^3 > 27 H^2$, wenn alle drei Wurzeln λ reell sind, sodaß

für $\quad AH > 0 \quad A_1 - A\lambda_0 < A_1 < A_1 - A\lambda_1 < A_1 - A\lambda_2$

oder $\quad P^2 < A_1 < P'^2 < P''^2$, während

für $\quad AH < 0 \quad P^2 > A_1 > P'^2 > P''^2$.[1])

Um den für die Vorzeichen der P^2 gesuchten Bedingungen eine übersichtliche Form zu geben, gehen wir mit Clebsch und Noether aus von der Formel des Art. 24:

$$\prod (v - g + \lambda f) = v^3 - 3gv^2 + 3(g^2 - \tfrac{1}{12} G f^2) v - \tfrac{1}{4} h^2 = 0.$$

1) Das Kriterium für die Existenz von vier reellen oder vier komplexen Wurzeln kann nicht von den Invarianten allein (ohne Zuziehung der Kovarianten) abhängen, weil eine lineare (nicht reelle) Transformation, welche beide Wurzeln ineinander überführt, die Invarianten gleichwohl ungeändert läßt.

Da diese Gleichung für reelle Werte von x und λ nur reelle Wurzeln hat, so ist nach einem bekannten Satze von Descartes die Anzahl der positiven Wurzeln gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in den Koeffizienten, also ist für *jede* Wurzel λ

$$g > \lambda f, \text{ wenn } g > 0 \text{ und } g^2 - \tfrac{1}{12}Gf^2 = \tfrac{1}{2}[fh] > 0,$$

mit anderen Worten, wenn $g > \sqrt{\tfrac{1}{12}Gf^2} > 0$. Anderenfalls hat man nur *einen* Zeichenwechsel, also einen positiven und zwei negative Werte für $v = (Px^2 + 2Qx + R)^2$.

Da PQR gleichzeitig entweder reelle oder imaginäre Werte annehmen, während die Variable x *reell* sein soll, so reicht zur Unterscheidung der beiden Fälle aus, daß v für *einen beliebigen* Wert von x das einer Wurzel λ entsprechende Vorzeichen erhält, um dasselbe für *alle* Werte von x zu behalten. Man kann folglich behaupten, daß, wenn die Ungleichungen

$$G^3 > 27H^2 \quad \text{und} \quad g > \sqrt{\tfrac{1}{12}Gf^2} > 0$$

für *einen beliebigen* reellen Wert von x erfüllt sind, alle drei Zerlegungen $f = \xi_1^2\xi_2^2$ reell werden. Dies kann jedoch offenbar nur statthaben, wenn die Wurzeln x_k sämtlich reell sind, und umgekehrt. Es bleibt also schließlich noch der Fall von zwei Paaren konjugierter Wurzeln x_k, deren Existenz an das Stattfinden der Ungleichungen

$$G^3 > 27H^2 \quad \text{und} \quad g < +\sqrt{\tfrac{1}{12}Gf^2}$$

bei *einer* reellen Zerlegung geknüpft sein muß.

Wir werden bald sehen, daß den gefundenen Ungleichungen noch verschiedene andere Formen gegeben werden können. Für jetzt mag bemerkt werden, daß die früher für die Produkte $\prod(v - P^2)$, $\prod(v - Q^2)$ und $\prod(v - R^2)$ aufgestellten Gleichungen durch die Zeichenwechsel ihrer Koeffizienten gleichfalls Bedingungen für die Realität von PQR, also auch der Wurzeln x_k liefern. Es ergeben sich danach für $G^3 > 27H^2$ vier reelle Wurzeln

1) wenn $A_1 > 0$ und $Ai_1 > Bi_0$, oder $A_1 > +\sqrt{\tfrac{1}{12}A^2G}$,

2) wenn $C_1 + \tfrac{1}{12}G > 0$ und $Bi_4 > Di_2$,

3) wenn $E_1 > 0$ und $Di_6 > Ei_5$, oder $E_1 > +\sqrt{\tfrac{1}{12}E^2G}$.

Anderenfalls hat f vier komplexe Wurzeln. Man sieht zugleich, daß die Formen 1) und 3) den Werten $x = \infty$ und $x = 0$ entsprechen.

29.

Bekanntlich sind durch Sturm allgemeine Kriterien für die Realität der Wurzeln algebraischer Gleichungen aufgestellt worden, aus denen hervorgeht, daß die Anzahl der konjugierten Wurzelpaare einer Funktion $\overset{m}{f}(x)$ mit reellen Koeffizienten übereinstimmt mit der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_m,$$

wo die Determinanten

$$S_i = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{i-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{i-1} & s_i & \ldots & s_{2i-2} \end{vmatrix}$$

aus den Potenzsummen der Wurzeln zu bilden sind. Wir wenden den Satz an auf die typische Gleichung

$$z^4 = 6gz^2 + 4hz + 3g^2 - Gf^2$$

und erhalten wegen

$$m = s_0 = 4,\quad s_1 = 0,\quad s_2 = 12g,\quad s_3 = 12h,\quad s_4 = 4(21g^2 - Gf^2):$$

$$S_1 = 4,\quad S_2 = 48g,\quad S_3 = 192f^2(2Gg + 3Hf),$$

während nach Art. 6

$$S_4 = \prod\nolimits_{ik}^{*} (z_i - z_k)^2 = 256f^6(G^3 - 27H^2).$$

Man hat folglich die Zeichenwechsel in der Reihe

$$1,\ g,\ 2Gg + 3Hf \text{ und } G^3 - 27H^2$$

zu untersuchen. Vier reelle Wurzeln erfordern lauter positive Vorzeichen, während für $G^3 < 27H^2$ nur *ein* Zeichenwechsel möglich[1]) ist, also zwei Wurzeln reell werden. Für *zwei* Zeichen-

1) Die Identität

$$(G^3 - 27H^2)(h^2 - 4g^3) = G^3h^2 + (3Hf - Gg)(3Hf + 2Gg)$$

zeigt, daß *drei* Zeichenwechsel unmöglich sind, denn für $g < 0$ ist

$$h^2 - 4g^3 = -f^2(Gg + Hf) > 0, \text{ d. h. } Gg + Hf < 0.$$

Ist nun $2Gg + 3Hf > 0$, so wird $Hf > 0$, $Gg < 0$, mithin

$$G > 0 \text{ und } 3Hf - Gg > 0, \text{ also } G^3 > 27H^2.$$

wechsel endlich überzeugt man sich leicht, daß $G^3 > 27H^2$ bleibt, mithin existieren nur komplexe Wurzeln, sobald g und $2Gg + 3Hf$ nicht gleichzeitig positiv sind.

Es ist auch nicht schwer, direkt nachzuweisen, daß für $g > 0$ die Ungleichung $g^2 > \frac{1}{12}f^2G$ durch die andere $2Gg + 3Hf > 0$ ersetzt werden darf. Denn durch Multiplikation mit $4G^2$ folgt für $G^3 > 27H^2$

$$4g^2G^2 > \tfrac{1}{3}f^2G^3 > 9f^2H \quad \text{oder} \quad 2gG > \pm 3fH,$$

und umgekehrt zeigt die Formel

$$h^2 = 4g^3 - f^2gG - f^3H \quad \text{oder}$$
$$g(12g^2 - f^2G) = 3h^2 + f^2(2gG + 3fH),$$

daß mit $2gG + 3fH$ auch $12g^2 - f^2G$ positiv wird. Die beiden resp. Ungleichungen sind folglich äquivalent.

30.

Um die Wurzeln der allgemeineren biquadratischen Funktion

$$wf - g = \mathfrak{A}(x - \mathfrak{x}_0)(x - \mathfrak{x}_1)(x - \mathfrak{x}_2)(x - \mathfrak{x}_3) = \mathfrak{f}\ ^{1})$$

mit dem Differential

$$d\mathfrak{f} = f\,dw + \frac{2h}{f}dx$$

zu finden, oder die Gleichung

$$(Aw - A_1)x^4 + 4(Bw - B_1)x^3 + 6(Cw - C_1)x^2 +$$
$$+ 4(Dw - D_1)x + (Ew - E_1) = 0$$

aufzulösen, bilde man die Resolvente

$$4\lambda_w^3 - G_w\lambda_w - H_w = 0,$$

wo

$$G_w = Gw^2 + 3Hw + \tfrac{1}{12}G^2,$$
$$H_w = Hw^3 + \tfrac{1}{6}G^2w^2 + \tfrac{1}{4}GHw - \tfrac{1}{216}G^3 + \tfrac{1}{4}H^2,$$

und für

$$\omega = \sqrt{4w^3 - Gw - H}:$$

$$G_w^3 - 27H_w^2 = \tfrac{1}{16}\omega^4(G^3 - 27H^2),$$
$$g_w = gw^2 - \tfrac{1}{6}Gfw - \tfrac{1}{12}(Gg + 3Hf),$$
$$h_w = \tfrac{1}{4}h\omega^2,$$
$$\lambda_w = \lambda w + \lambda^2 - \tfrac{1}{6}G.$$

---

1) Nach Art. 21 wird $\frac{g}{f} = w = \frac{1}{12}(\xi'\xi' - 2\xi\xi'')$ neben $\frac{h}{f} = \frac{1}{12}\xi^2\xi'''$.

Damit folgt

$$(Aw - A_1)x + (Bw - B_1) = \mathrm{S} \pm \sqrt{(A_1 - A\lambda)(w - \lambda')(w - \lambda'')}$$

$$= \mathrm{S}\sqrt{(A_1 - A\lambda)(w^2 + \lambda w + \lambda^2 - \tfrac{1}{4}G)} = \tfrac{1}{2}\omega\,\mathrm{S}\sqrt{\frac{A_1 - A\lambda}{w - \lambda}}.$$

Das Produkt der in den Summen S enthaltenen Radikale muß für positive Werte von ω das Vorzeichen von $(i_0)_w = \frac{1}{4}i_0\omega^2$, d. h. von i_0 besitzen. Für $w = 0$ ergeben sich die Art. 23 abgeleiteten Wurzeln von g, für $w = \lambda$ dagegen fallen je zwei Wurzeln der biquadratischen Gleichung zusammen, und man bekommt

$$(A_1 - A\lambda)x + (B_1 - B\lambda) = \tfrac{1}{2}\mu\sqrt{A_1 - A\lambda} \quad \text{oder} \quad Px + Q = \pm\tfrac{1}{2}\mu,$$

mit unseren früheren Resultaten übereinstimmend.

Bei dieser Gelegenheit sei noch bemerkt, daß für $G_w = 0$ die Gleichung $f \cdot w = g$ übergeht in

$$j = \tfrac{1}{3}Gg^2 + Hfg + \tfrac{1}{36}G^2f^2 = h_, h_, - hh_{,,} = -\tfrac{1}{2}[hh]_2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Kovariante achten Grades, Dimension 6, Gewicht 8, werden folglich durch Auflösung der Gleichung $f \cdot w - g = 0$ erhalten, wenn man

$$w = \frac{-3H + \sqrt{-\frac{1}{3}D_4(f)}}{2G}, \quad \text{mithin } \omega^2 = -\frac{4D_4}{3G^2}w$$

setzt, wo wie früher die Diskriminante $D_4 = G^3 - 27H^2$ geschrieben ist. In analoger Weise ergeben sich die Wurzeln der Kovarianten

$$g_, g_, - gg_{,,} = -\tfrac{1}{2}[gg]_2 = -\tfrac{1}{12}(Gg + 3Hf) \quad \text{für} \quad w = = \frac{3H}{G},$$

$$f_, h - fh_, = [fh] = 2g^2 - \tfrac{1}{6}Gf^2 \quad \text{für} \quad w = \pm\sqrt{\tfrac{1}{12}G},$$

$$g_, h - gh_, = [gh] = \tfrac{1}{6}f(2Gg + 3Hf) \quad \text{für} \quad w = -\frac{3H}{2G}.$$

Vergleicht man namentlich in den Ausdrücken für f, g, $[fh]$ und $[gh]$ die Summen

$$\mathrm{S}\sqrt{A_1 - A\lambda}, \quad \mathrm{S}\sqrt{(A_1 - A\lambda)\lambda'\lambda''},$$

$$\mathrm{S}\sqrt{(A_1 - A\lambda)(\tfrac{1}{12}G + \lambda\sqrt{\tfrac{1}{12}G} + \lambda^2 - \tfrac{1}{4}G)},$$

und

$$\mathrm{S}\sqrt{(A_1 - A\lambda)(\tfrac{9}{4}\frac{H^2}{G^2} - \tfrac{3}{2}\frac{H}{G}\lambda + \lambda^2 - \tfrac{1}{4}G)},$$

so erkennt man sogleich, daß wenn für $A_1 > A\lambda$ f vier reelle Wurzeln hat, die Kovarianten g, $[fh]$ und $[gh]$ für reelle Werte von x nicht verschwinden, also ihr Vorzeichen nicht verändern können. Denn da

$$\mathrm{S}\,\lambda'\lambda'' = -\tfrac{1}{4}G, \quad \mathrm{S}\,(\lambda^2 + \lambda\sqrt{\tfrac{1}{12}G} - \tfrac{1}{6}G) = 0$$

und

$$\mathrm{S}\,(4G^2\lambda^2 - 6GH\lambda - G^3 + 9H^2) = 27H^2 - G^3,$$

so folgt, daß für reelle Werte der Wurzeln λ, oder $G^3 > 27H^2$, die verschiedenen Faktoren von $A_1 - A\lambda$ nicht sämtlich positiv sein können, also unter dem Wurzelzeichen negative Glieder liefern müssen.

Statt der Gleichung $\mathfrak{f} = f\cdot w - g = 0$ mit den Wurzeln $\mathfrak{x}$ kann man die allgemeinere Gleichung untersuchen, deren Wurzeln $\mathfrak{y} = \frac{1}{x - \mathfrak{x}}$ für reelle Werte von x gleichzeitig mit $\mathfrak{x}$ reell oder komplex sind. Man erhält sogleich

$$\mathfrak{f}\mathfrak{y}^4 - \mathfrak{f}'\mathfrak{y}^3 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{f}''\mathfrak{y}^2 - \tfrac{1}{6}\mathfrak{f}'''\mathfrak{y} + \tfrac{1}{24}\mathfrak{f}^{\mathrm{IV}} = 0$$

oder

$$\mathfrak{f}\mathfrak{y}^4 - 4\mathfrak{f}_{,}\mathfrak{y}^3 + 6\mathfrak{f}_{,,}\mathfrak{y}^2 - 4\mathfrak{f}_{,,,}\mathfrak{y} + \mathfrak{f}_{\mathrm{IV}} = 0,$$

woraus für

$$\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{y} = \mathfrak{z} + \mathfrak{f}_{,}$$

die typische Gleichung hervorgeht:

$$\mathfrak{z}^4 = \{6gw^2 - Gfw - \tfrac{1}{2}(Gg + 3Hf)\}\,\mathfrak{z}^2 + h\omega^2\mathfrak{z} + 3g_w^2 - G_w\mathfrak{f}^2.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind gegeben durch

$$\mathfrak{z} = \mathrm{S}\sqrt{g_w - \lambda_w\mathfrak{f}} = \mathrm{S}\sqrt{(g - \lambda f)(w - \lambda')(w - \lambda'')} = \tfrac{1}{2}\omega\,\mathrm{S}\sqrt{\frac{g - \lambda f}{w - \lambda}}.$$

Um umgekehrt von dem Ausdruck dieser Wurzeln zur biquadratischen Gleichung für $\mathfrak{z}$ zurückzukehren, schreiben wir für

$$\gamma = \sqrt{(g - \lambda f)(w - \lambda')(w - \lambda'')}, \quad \gamma^3 - \alpha\gamma^2 + \beta\gamma - \tfrac{1}{8}h\omega^2 = 0$$

und berechnen die Werte

$$\mathrm{S}\,\gamma^2 = 3gw^2 - \tfrac{1}{2}Gfw - \tfrac{1}{4}(Gg + 3Hf),$$

$$\mathrm{S}\,\gamma^2\gamma'^2 = \tfrac{1}{16}\omega^2\{(12g^2 - Gf^2)w - (2Gg + 3Hf)f\}.$$

Da nun

$$\mathrm{S}\,\gamma = \alpha, \quad \mathrm{S}\,\gamma\gamma' = \beta, \quad \gamma\gamma'\gamma'' = \tfrac{1}{8}h\omega^2,$$

so findet man leicht

$$\alpha^2 = \mathrm{S}\gamma^2 + 2\,\mathrm{S}\gamma\gamma' = 3gw^2 - \tfrac{1}{2}Gfw - \tfrac{1}{4}(Gg + 3Hf) + 2\beta,$$
$$\beta^2 = \mathrm{S}\gamma^2\gamma'^2 + 2\gamma\gamma'\gamma''\,\mathrm{S}\gamma$$
$$= \tfrac{1}{4}\omega^2\{h\alpha + \tfrac{1}{4}(12g^2 - Gf^2)w - \tfrac{1}{4}(2Gg + 3Hf)f\},$$

und hieraus ergibt die Elimination von β sogleich die oben aufgestellte Gleichung für $\mathfrak{z} = \alpha$.

31.

Exkurs über die numerische Berechnung und die graphische Konstruktion der Wurzeln kubischer und biquadratischer Gleichungen.

Die numerische Berechnung der reellen Wurzeln λ der kubischen Resolvente

$$4\lambda^3 = G\lambda + H$$

läßt sich durch geeignete Tafeln erleichtern, wenn man sich eines der Gauss'schen Auflösungsmethode dreigliedriger Gleichungen (Gauss' *Werke* Bd. 3, S. 85) analogen Verfahrens bedient.

Wir führen hierzu die sogenannte absolute Invariante

$$\Omega = \frac{G^3}{H^2} \quad \text{ein und setzen} \quad G\lambda = H\omega,$$

wodurch

$$4\omega^3 = \Omega(\omega + 1) \quad \text{oder} \quad \Omega = \frac{4\omega^3}{\omega + 1}$$

wird. Für $x > 1$ hat man, um alle reellen Werte von ω zu umfassen,

$$\omega_1 = \frac{1}{x}, \quad \omega_2 = x, \quad \omega_3 = -\frac{1}{x}, \quad \omega_4 = -x$$

zu setzen. Damit folgt

$$0 < \frac{4}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \Omega_1 < 2 < \frac{4x^2}{1 + \frac{1}{x}} = \Omega_2 < \infty,$$
$$0 > -\frac{4}{x^2}\,\frac{x}{x-1} = \Omega_3 > -\infty,$$

sodaß ω und Ω gleiche Vorzeichen erhalten, während für $\omega_4 < -1$

$$\Omega_4 = 4x^2\frac{x}{x-1} > 27$$

sowohl wenn $\frac{3}{2} < x < \infty$, als wenn $\frac{3}{2} > x > 1$, alle positiven Werte > 27 durchläuft. Entnimmt man den Tafeln der sogenannten

Additions- und Subtraktionslogarithmen zum Argument $\xi = \lg x$ die Werte von

$$\eta = \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad \zeta = \lg \frac{x}{x-1},$$

so sind zu berechnen:

$$\lg \Omega_1 = 0.60206 - 3\xi - \eta, \quad \lg \Omega_2 = 0.60206 + 2\xi - \eta,$$

$$\lg(-\Omega_3) = 0.60206 - 3\xi + \eta, \quad \lg \Omega_4 = 0.60206 + 2\xi + \eta.$$

Auf drei Dezimalen erhält man mit leichter Mühe für die Logarithmen der Invariante $\pm\Omega$ zum Argument $\xi = \lg(\pm\omega)$ die Werte der nachstehenden Tabelle:

ω	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\Omega > 0$
8.	4.598	4.897	5.195	5.493	5.791	6.089	6.385	6.681	6.975	7.269	7.561
9.	7.561	7.851	8.138	8.423	8.705	8.983	9.257	9.526	9.790	0.048	0.301
0.	0.301	0.548	0.790	1.026	1.257	1.483	1.705	1.923	2.138	2.351	2.561
1.	2.561	2.769	2.975	3.181	3.385	3.589	3.791	3.993	4.195	4.397	4.598
$-\omega$											$\Omega < 0$
8.	4.606	4.908	5.209	5.511	5.813	6.116	6.420	6.724	7.030	7.338	7.648
9.	7.648	7.960	8.277	8.599	8.928	9.267	9.623	0.004	0.435	0.989	∞
9.7	0.004	0.044	0.085	0.127	0.168	0.211	0.254	0.298	0.343	0.388	0.435
9.8	0.435	0.483	0.531	0.582	0.633	0.687	0.742	0.799	0.859	0.922	0.989
9.9	0.989	1.060	1.136	1.219	1.311	1.416	1.538	1.688	1.889	2.215	∞
$-\omega$											$\Omega > 27$
0 0	∞	2.265	1.989	1.838	1.738	1.666	1.611	1.569	1.536	1.510	1.489
0.1	1.489	1.472	1.459	1.449	1.442	1.437	1.433	1.432	1.431	1.433	1.435
0.2	1.435	1.438	1.443	1.448	1.454	1.461	1.468	1.477	1.485	1.494	1.504
0.	∞	1.489	1.435	1.504	1.623	1.767	1.928	2.099	2.277	2.460	2.648
1.	2.648	2.838	3.030	3.224	3.420	3.616	3.813	4.011	4.209	4.408	4.606

Als Beispiel wählen wir einen Fall dreier reeller Wurzeln und setzen

$$G = 28, \quad H = 24, \quad \Omega = \tfrac{343}{9} = 38 \cdot 1.$$

Dann gibt die Tafel zu $\lg \Omega = 1.581$:

$$\lg \omega = 0.544, \quad \lg \omega' = 0.067\, n, \quad \lg \omega'' = 0.368\, n.$$

Bei der Interpolation zwischen 0.4 und 0.3 hat man mit Rücksicht auf den geringen Umfang der Tafel in der Nähe von 1.623 nicht eine der Nachbardifferenzen 119 oder 144, sondern deren arithmetisches Mittel 131 zu benutzen. In der Tat wird wegen

$$1623 - 1581 = 42, \quad 3.68 = 4 - \tfrac{42}{131}.$$

Mittelst

$$\lambda = \frac{H}{G}\omega, \quad \lg\frac{H}{G} = \lg\tfrac{6}{7} = 9\cdot 933$$

erhält man nunmehr:

$$\lg\lambda = 0.477, \quad \lg\lambda' = 0.000\,n, \quad \lg\lambda'' = 0.301\,n,$$

oder

$$\lambda = 3, \qquad \lambda' = -1, \qquad \lambda'' = -2.$$

Da jede kubische Gleichung auf die Form $4\lambda^3 = G\lambda + H$ gebracht werden kann, so läßt sich die vorstehende Tabelle allgemein zur Auffindung der reellen Wurzeln kubischer Gleichungen benutzen. Die biquadratischen Gleichungen mit den Invarianten G und H aber sind mit Hilfe von λ auf quadratische Gleichungen reduziert worden.

32.

Vielleicht ist hier der Ort, an die berühmte Konstruktion des DESCARTES[1]) für die Wurzeln kubischer und biquadratischer Gleichungen mittelst einer *gegebenen Parabel* zu erinnern, welche

1) *Géométrie*, p. 389: *Or quand on est assuré que le Probléme proposé est solide, soit que l'équation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, soit qu'elle ne monte que jusques au cube, on peut toujours en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu' elle puisse être; en ne se servant au reste que de lignes droites, et de cercles.* [*Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des essais de cette Méthode. Leyde*, 1637.] Die Anwendung der Kegelschnitte zur Lösung solcher Probleme war schon Archimedes (Eutokios) und den arabischen Mathematikern bekannt. Vergl. das Kapitel „*Konstruktion der kubischen Gleichungen*" in HANKELS *Geschichte der Mathematik*, S. 274—280. Unter den neueren Bearbeitern der Aufgabe ist vor allen CHASLES zu nennen. *(Construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré*, Liouville Journal T. XX, p. 329).

von NEWTON in der *Arithmetica universalis*[1]) weiter entwickelt worden ist.

Die Parabel $y^2 = px$ mit dem Parameter p und der Kreis $x^2 + y^2 = 2ax + 2by$ mit dem Halbmesser $h = \sqrt{a^2 + b^2}$ haben außer dem Koordinatenursprung die Punkte gemein, deren Ordinaten die kubische Gleichung

$$y^3 = (2a - p)py + 2bp^2$$

erfüllen. Setzt man daher $y = 2p\lambda$, so wird

$$4\lambda^3 = \frac{2a - p}{p}\lambda + \frac{b}{p} = G\lambda + H,$$

woraus

$$a = \tfrac{1}{2}(G + 1)p, \quad b = Hp$$

als Mittelpunktskoordinaten des durch den Scheitel der Parabel gezogenen Kreises folgen, während die Wurzeln $\lambda = \frac{y}{2p}$ sich durch die Ordinaten der übrigen Schnittpunkte beider Kurven bestimmen. Wie man zur gegebenen Parabel Achse und Parameter findet, braucht hier nicht erörtert zu werden; dagegen fragt sich, wie für $G^3 < 27H^2$ die beiden konjugierten Wurzeln zu konstruieren sind. Dieselben ergeben sich als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda'\lambda' + \frac{y}{2p}\lambda' + \frac{b}{2y} = 0,$$

oder für

$$y' = 2p\lambda' = \varrho e^{\varphi i}$$

$$y'y' + yy' + \frac{2bp^2}{y} = 0,$$

mithin

$$\varrho = 2p\sqrt{\frac{b}{2y}}, \quad \varrho\cos\varphi = -\tfrac{1}{2}y.$$

In analoger Weise konstruiert man die Wurzeln der biquadratischen Gleichung $fx = 0$ mittelst der Ordinaten der Durchschnittspunkte der Parabel $y^2 = px$ und des Kreises $(x-a)^2 + (y-b)^2 = h^2$. Die Elimination von x ergibt

$$y^4 = (2a - p)py^2 + 2bp^2y + (h^2 - a^2 - b^2)p^2.$$

Vergleicht man damit die Art. 24 entwickelte Gleichung

$$\zeta^4 = 6A_1\zeta^2 + 4i_0\zeta + 3A_1^2 - A^2G,$$

---

1) im *Appendix de Aequationum Constructione lineari.*

so erhält man für

$$y = p\zeta = p(Ax + B):$$

$$6A_1 = \frac{2a-p}{p}, \quad 4i_0 = \frac{2b}{p}, \quad 3A_1^2 - A^2G = \frac{h^2 - a^2 - b^2}{p^2},$$

folglich

$$a = (3A_1 + \tfrac{1}{2})p, \qquad b = 2pi_0,$$

$$h = p\sqrt{(3A_1 + \tfrac{1}{2})^2 + 4i_0^2 + 3A_1^2 - A^2G},$$
$$= 2p\sqrt{4(A_1 + \tfrac{1}{4})^3 - A^2(A_1 + \tfrac{1}{4})G - A^3H},$$
$$= 4p\sqrt{(A_1 + \tfrac{1}{4} - A\lambda)(A_1 + \tfrac{1}{4} - A\lambda')(A_1 + \tfrac{1}{4} - A\lambda'')}.$$

Selbstverständlich sind keine reellen Wurzeln vorhanden, wenn der reelle Kreis die Parabel nicht schneidet, sowie wenn für $A_1 > A\lambda$ und $A_1 < A\lambda' < A\lambda''$ die Ungleichung $A\lambda' < A_1 + \frac{1}{4} < A\lambda''$ erfüllt ist, denn in diesem Falle wird der Halbmesser h imaginär.

Die beiden komplexen Wurzeln sind für $G^3 < 27H^2$ leicht zu konstruieren, nachdem die reellen Wurzeln

$$y_1 = p(Ax_1 + B) \quad \text{und} \quad y_2 = p(Ax_2 + B)$$

gefunden worden sind. Denn da für

$$y' = p(Ax' + B) = \varrho e^{\varphi i}$$

$$y'y' + (y_1 + y_2)y' + \frac{a^2 + b^2 - h^2}{y_1 y_2} p^2 = 0,$$

so ergibt sich

$$\varrho = p\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - h^2}{y_1 y_2}} \quad \text{nebst} \quad \varrho\cos\varphi = -\tfrac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Bei *vier* komplexen Wurzeln dagegen sind zwei konjugierte Paare $y' = \varrho e^{\varphi i}$ und $\varrho_1 e^{\varphi_1 i}$ zu bestimmen. Die Identität

$$y'^4 - 6A_1p^2y'^2 - 4i_0p^3y' + (A^2G - 3A_1^2)p^4 =$$
$$= (y'^2 - 2y'\varrho\cos\varphi + \varrho^2)(y'^2 - 2y'\varrho_1\cos\varphi_1 + \varrho_1^2)$$

liefert die Koeffizientengleichungen

$$\varrho\cos\varphi + \varrho_1\cos\varphi_1 = 0,$$
$$\varrho^2 + \varrho_1^2 + 4\varrho\varrho_1\cos\varphi\cos\varphi_1 = -6A_1p^2,$$
$$\varrho\varrho_1(\varrho_1\cos\varphi + \varrho\cos\varphi_1) = 2i_0p^3,$$
$$\varrho^2\varrho_1^2 = (A^2G - 3A_1^2)p^4.$$

Eliminiert man die Winkel φ und φ_1 und setzt

$$\varrho^2 + \varrho_1^2 = -2(2A\lambda + A_1)p^2,$$

so geht die kubische Resolvente $4\lambda^3 = G\lambda + H$ hervor, welche wie oben für $y = 2p\lambda$ durch

$$y^3 = (2a - p)py + 2bp^2$$

konstruiert werden kann. Dann wird wegen

$$\varrho^2 + \varrho_1^2 = -2(Ay + A_1 p)p, \quad \varrho^2\varrho_1^2 = (A^2 G - 3A_1^2)p^4,$$

$$\varrho^4 + 2(Ay + A_1 p)p\varrho^2 + (A^2 G - 3A_1^2)p^4 = 0,$$

und für

$$q^2 = (Ay + A_1 p)^2 - (A^2 G - 3A_1^2)p^2:$$

$$\varrho = \sqrt{(\pm q - A_1 p - Ay)p}, \quad \varrho\cos\varphi = \mp\frac{p^2 i_0}{q}.$$

Es versteht sich, daß derjenige Wert der Ordinate y genommen werden muß, für welchen die bei einer reellen Zerlegung notwendige und ausreichende Bedingung erfüllt ist:

$$A_1 > A\lambda \quad \text{oder} \quad 2A_1 p > Ay,$$

denn nur dann wird

$$q + A_1 p + Ay < 0 \text{ und } \varrho q > \pm p^2 i_0.$$

III. Anwendungen auf die Transformation elliptischer Differentiale.

33.

Im 12. Bande der Abhandlungen der Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften S. 62 (math. phys. Klasse), sowie im 34. Bande der Mathematischen Annalen S. 529 findet sich der Satz entwickelt, daß für

$$fx = Ax^4 + 4Bx^3 \ldots = \xi\xi \quad \text{und} \quad \mathfrak{f}y = \mathfrak{A}y^4 + 4\mathfrak{B}y^3 \ldots = \eta\eta$$

die transszendente Gleichung

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\eta}$$

durch die algebraische Relation

$$\frac{\xi_1\xi_2^0 + \xi_2\xi_1^0}{x - x_0} = \frac{\eta_1\eta_2^0 + \eta_2\eta_1^0}{y - y_0}$$

ersetzt werden kann, falls fx und $\mathfrak{f}y$ die nämlichen Invarianten

$$G = \mathfrak{G} \quad \text{und} \quad H = \mathfrak{H}$$

besitzen. Hier ist wie bisher $\xi = \xi_1 \xi_2$, $\eta = \eta_1 \eta_2$ geschrieben, wo

$$\xi_i^2 = l_i x^2 + 2 m_i x + n_i, \quad \eta_i^2 = \mathfrak{l}_i y^2 + 2 \mathfrak{m}_i y + \mathfrak{n}_i$$

$$\xi^0 = \xi(x_0), \quad \eta^0 = \eta(y_0), \quad m_1 m_2 = C + \lambda, \quad \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{C} + \lambda,$$

während λ eine Wurzel der Resolvente $4\lambda^3 = G\lambda + H$ darstellt.

Wir schreiben ferner

$$\varpi(x\lambda) = \frac{\xi_1 \xi_2^0 + \xi_2 \xi_1^0}{2(x - x_0)}, \quad \chi(y\lambda) = \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_2 \eta_1^0}{2(y - y_0)},$$

$$\varpi^2 = X - \lambda, \quad \chi^2 = Y - \lambda, \quad L^0 = A x_0^2 + 2 B x_0 + C,$$

$$M^0 = B x_0^2 + 2 C x_0 + D, \quad N^0 = C x_0^2 + 2 D x_0 + E,$$

wodurch

$$L^0 x^2 + 2 M^0 x + N^0 = L x_0^2 + 2 M x_0 + N,$$

ferner

$$L_1^0 = A_1 x_0^2 + 2 B_1 x_0 + C_1 \text{ und analog } M_1^0 \text{ und } N_1^0,$$

dann wird

$$X = \frac{L^0 x^2 + 2 M^0 x + N^0 + \xi \xi^0}{2(x - x_0)^2} = \frac{\xi^0 \xi + f^0}{2(x - x_0)^2} + \frac{f_{,}^0}{x - x_0} + \tfrac{1}{2} f_{,,}^0$$

$$= \left(\frac{1}{2} \frac{\xi + \xi^0}{x - x_0}\right)^2 - \tfrac{1}{4} A (x + x_0)^2 - B(x + x_0) - C.$$

Da somit X von der Wurzel λ unabhängig ist, so erhält man das Produkt

$$2 \varpi \varpi' \varpi'' = \sqrt{4 X^3 - G X - H}$$

und ebenso

$$2 \chi \chi' \chi'' = \sqrt{4 Y^3 - G Y - H},$$

während durch Elimination des Radikals $\xi^0 \xi$ die in Bezug auf X und $x - x_0$ quadratische Gleichung hervorgeht:

$$(X^2 - \tfrac{1}{12} G)(x - x_0)^2 = (L^0 x^2 + 2 M^0 x + N^0) X - (L_1^0 x^2 + 2 M_1^0 x + N_1^0)$$

oder

$$(X^2 - f_{,,}^0 X + g_{,,}^0 - \tfrac{1}{12} G)(x - x_0)^2 - 2 (f_{,}^0 X - g_{,}^0)(x - x_0) - (f^0 X - g^0) = 0.$$

In diesen Ausdrücken dürfen x und x_0 vertauscht werden, wobei X ungeändert bleibt.

Nun ist seit Euler bekannt, daß, wenn

$$F(\overset{2}{x}\overset{2}{y}) = p y^2 + 2 p_1 y + p_2 = q x^2 + 2 q_1 x + q_2 = 0$$

eine in Bezug auf x und y quadratische Gleichung darstellt, die Differentialformel

$$(qx + q_1)dx + (py + p_1)dy = 0$$

in die Gleichung mit getrennten Variabeln übergeht:

$$\frac{dx^2}{p_1^2 - pp_2} = \frac{dy^2}{q_1^2 - qq_2},$$

oder für

$$f = p_1^2 - pp_2 = \xi\xi \quad \text{und} \quad \mathfrak{f} = q_1^2 - qq_2 = \eta\eta:$$

$$\frac{dx}{\xi} = \varepsilon \frac{dy}{\eta}.$$

Hier besitzen die biquadratischen Funktionen f und $\mathfrak{f}$ *gleiche Invarianten*, die Radikale ξ und η sollen als *positiv* vorausgesetzt werden, und ε bedeutet die positive oder negative Einheit, je nachdem x und y sich in gleichem oder entgegengesetztem Sinne ändern. Man hat daher auch

$$\xi = \pm (py + p_1), \quad \eta = \mp \varepsilon (qx + q_1)$$

und schließt, daß für reelle Werte von x und y, ξ und η reell sind, während für reelle Werte von x und ξ auch y, und für reelle Werte von y und η auch x reell wird. Also müssen solche reelle Werte von x, welche ξ imaginär machen, komplexen Werten von y und reelle Werte von y, welche η imaginär machen, komplexen Werten von x entsprechen.

34.

Die Gleichung $F(xy) = 0$ liefert zugleich die *vollständige* Integralgleichung der aufgestellten Differentialgleichung, da sie im Allgemeinen von *acht* Konstanten abhängt, während die Differentialformel, wegen der Gleichheit der Invarianten von ξ und η, nur *sieben* unabhängige Konstanten enthält. In Art. 8 und 9 der zitierten Abhandlung ist gezeigt, wie die Konstanten der Integralformel durch die der Differentialgleichung — in Verbindung mit $x_0 y_0 \xi^0 \eta^0$ — rational ausgedrückt werden. Schreibt man nun

$$p = (x - x_0)^2, \quad q = X^2 - f_{,,}^0 X + g_{,,}^0 - \tfrac{1}{12} G,$$

$$p_1 = -\tfrac{1}{2}\{ f_{,,}^0 (x - x_0)^2 + 2 f_{,}^0 (x - x^0) + f^0 \}, \quad q_1 = -(f_{,}^0 X - g_{,}^0),$$

$$p_2 = (g_{,,}^0 - \tfrac{1}{12} G)(x - x_0)^2 + 2 g_{,}^0 (x - x_0) + g^0, \quad q_2 = -(f^0 X - g^0),$$

so erhält man nach einigen Reduktionen[1]), wegen

$\xi\xi = f^0 + 4f_{,}^0(x - x_0) + 6f_{,,}^0(x - x_0)^2 + 4f_{,,,}^0(x - x_0)^3 + f_{IV}^0(x - x_0)^4$:

$$\frac{dx^2}{\xi\xi} = \frac{dX^2}{4X^3 - GX - H} = \frac{dX^2}{\Xi\Xi},$$

also

$$\frac{dx}{\xi} = \mp \frac{d\varpi}{\varpi'\varpi''} = \mp \frac{dX}{\Xi}.$$

Da X für $x = x_0$ über alle Grenzen wächst, so wird

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \pm \int_{X}^{\infty} \frac{dX}{\Xi},$$

wo das Vorzeichen von $x - x_0$ zu nehmen ist.

Selbstverständlich erhält man ebenso

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta} = \pm \int_{Y}^{\infty} \frac{dY}{T}, \quad T^2 = 4Y^3 - GY - H.$$

Hieraus folgt, daß die algebraische Gleichung $X = Y$ mit den Konstanten $x_0\, y_0$ die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{\xi}\right)^2 = \left(\frac{dy}{\eta}\right)^2$ oder $\frac{dx}{\xi} = \varepsilon \frac{dy}{\eta}$ vollständig integriert, wenn ε *das Vorzeichen von* $(x - x_0)(y - y_0)$ *bedeutet.* Zugleich sieht man, daß für

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \varepsilon \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta}$$

die Gleichung

$$X = Y \text{ durch } \varpi = \varepsilon\chi$$

ersetzt werden kann.[2])

---

1) mittelst $g = f_{,}f_{,} - ff_{,,}, \quad 2g_{,} = f_{,}f_{,,} - ff_{,,,},$

$$4(g_{,,} - \tfrac{1}{12}G) = f_{,,}f_{,,} - ff_{IV},$$
$$\tfrac{1}{6}Gf = 2f_{,}g_{,} - f_{,,}g - fg_{,,},$$
$$\tfrac{1}{12}(Gg + 3Hf) = gg_{,,} - g_{,}g_{,}.$$

2) Bei der Integration der Differentialgleichung $\frac{dx}{\xi} = \varepsilon \frac{dy}{\eta}$ vertreten die Größen x_0 und y_0 die Stelle *einer* Integrationskonstanten und können durch zwei andere $x'y'$ ersetzt werden, welche dergestalt

Die Auflösung der quadratischen Gleichung für X und $x-x_0$ liefert

$$x - x_0 = \frac{f^0 X - g^0}{\frac{1}{2}\xi^0 \Xi - (f_{,}^0 X - g_{,}^0)} = \frac{f X - g}{\frac{1}{2}\xi \Xi + f_{,} X - g_{,}},$$

wo $\Xi^2 = 4 X^3 - G X - H$, und dieser Ausdruck wird *identisch* für

$$\Xi = -\xi \frac{dX}{dx} = \frac{f^0 \xi + f \xi^0}{(x-x_0)^3} + \frac{f_{,}^0 \xi - f_{,} \xi^0}{(x-x_0)^2}$$

$$= \frac{2}{\xi^0}\left\{\frac{f^0 X - g^0}{x - x_0} + f_{,}^0 X - g_{,}^0\right\} = \frac{2}{\xi}\left\{\frac{f X - g}{x - x_0} - f_{,} X + g_{,}\right\}.$$

Bildet man in derselben Weise die Funktion $\Upsilon = -\eta \frac{dY}{dy}$, so folgt nicht allein $\Xi^2 = \Upsilon^2$ für $X = Y$, sondern es wird auch

$$\Xi \frac{dx}{\xi} = \Upsilon \frac{dy}{\eta}, \quad \text{mithin} \quad \Xi = \varepsilon \Upsilon.$$

Vertauscht man daher in dem obigen Ausdruck von $x - x_0$ X mit Y und Ξ mit $\varepsilon\Upsilon$, so ergibt sich die Gleichung

$$x - x_0 = \frac{f^0 Y - g^0}{\frac{1}{2}\varepsilon \xi^0 \Upsilon - f_{,}^0 Y + g_{,}^0} = \frac{q x_0^2 + 2 q_1 x_0 + q_2}{\pm \varepsilon \eta - q x_0 - q_1},$$

nebst

$$\xi = \varepsilon \eta \frac{dx}{dy} = \pm (py + p_1), \quad \eta = \varepsilon \xi \frac{dy}{dx} = \mp (qx + q_1)$$

als die *Substitution*, durch welche $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi}$ in $\varepsilon \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{\eta}$ übergeht. Umgekehrt hat man natürlich auch

---

einander entsprechen, daß $\int\limits_{x_0}^{x'} \frac{dx}{\xi} = \varepsilon \int\limits_{y_0}^{y'} \frac{dy}{\eta}$, mit anderen Worten, daß für $x = x'$ $y = y'$ werde. In der Gleichung $\varpi = \varepsilon \chi$ oder $X = Y$ werden für $x = x_0$, $y = y_0$ beide Seiten unendlich, wenigstens solange wir die positiven Vorzeichen der Radikale $\xi\, \xi_1\, \xi_2$ in X und ϖ voraussetzen. Für die Ableitung der quadratischen Gleichung zwischen X und $x - x_0$ sind die Vorzeichen zwar gleichgültig, aber für die Werte

$$X = \frac{L^0 x^2 + 2 M^0 x + N^0 - \xi \xi^0}{2 (x - x_0)^2} \quad \text{oder} \quad \varpi = \pm \frac{\xi_1 \xi_2^0 - \xi_2 \xi_1^0}{2 (x - x_0)}$$

wird wenn $x = x_0$:

$$X = \frac{g^0}{f^0} \quad \text{und} \quad \varpi = \frac{1}{\xi^0} \sqrt{g^0 - \lambda f^0} = \frac{P x_0^2 + 2 Q x_0 + R}{\xi^0}.$$

$$y - y_0 = \frac{\mathfrak{f}^0 X - \mathfrak{g}^0}{\frac{1}{2}\varepsilon\eta^0 \Xi - \mathfrak{f}^0_{,} X + \mathfrak{g}^0_{,}}$$

als Wurzel der quadratischen Gleichung

$$(X^2 - \tfrac{1}{12}G)(y-y_0)^2 = (\mathfrak{L}y_0^2 + 2\mathfrak{M}y_0 + \mathfrak{N})X - (\mathfrak{L}_1 y_0^2 + 2\mathfrak{M}_1 y_0 + \mathfrak{N}_1).$$

Die entwickelten Gleichungen enthalten in verschiedenen Formen die allgemeinste algebraische Transformation elliptischer Differentiale mit gleichen Invarianten.

35.

Die den drei Wurzeln λ entsprechenden Gleichungen

$$\varpi = \varepsilon\chi, \quad \varpi' = \varepsilon\chi', \quad \varpi'' = \varepsilon\chi''$$

sind offenbar vollkommen gleichberechtigt. Vielleicht ist die Bemerkung nicht überflüssig, daß, wenn die gewählte Wurzel der kubischen Resolvente auf eine komplexe Zerlegung $\xi = \xi_1\xi_2$ führt, dennoch das Aggregat $\xi_1\xi_2^0 + \xi_2\xi_1^0$ reell bleibt, weil ξ_1 und ξ_2 konjugierte Werte haben. Auch ist dasselbe für $x = x_0$ positiv und kann nur gleichzeitig mit $\eta_1\eta_2^0 + \eta_2\eta_1^0$ durch Null hindurchgehen. Es braucht selbst der Fall nicht ausgeschlossen zu werden, in welchem x_0 und y_0 komplexe Werte annehmen, nur müssen diese für unseren Zweck so bestimmt werden, daß die Substitution $\varpi = \varepsilon\chi$ reelle Werte von x und y liefere. Denn dann können in der Integralgleichung $\int\limits_{x'}^{x}\frac{dx}{\xi} = \varepsilon\int\limits_{y'}^{y}\frac{dy}{\eta}$ für x' und y' irgend zwei *reelle* zusammengehörige Werte von x und y gesetzt werden. Da jede Gleichung zwischen komplexen Größen in zwei zerfällt, so muß eine Bedingung hinzutreten, damit aus der Gleichheit der reellen und der imaginären Teile die nämliche reelle Substitution hervorgehe. Wir werden auf diesen Punkt noch zurückzukommen haben.

Die allgemeinen Transformationsformeln lassen sich zur Reduktion des elliptischen Differentials namentlich auf verschiedene *kanonische* Formen anwenden. Durch Spezialisierungen treten wesentliche Vereinfachungen ein, wie wenn z. B. ξ^0 resp. η^0 verschwinden, oder wenn x_0 resp. y_0 Null oder unendlich werden. Für $\xi_1^0 = 0$ wird x_0 eine Wurzel der biquadratischen Gleichung $f = 0$, und wenn diese Wurzel komplex ist, so wird im Allgemeinen

auch y komplex sein müssen. Es fragt sich dann, wie y_0 zu bestimmen ist, damit die Substitution in Bezug auf die zusammengehörigen Werte der Variabeln x und y reell bleibe.

Bezeichnet man durch x_1 und y_1 die konjugierten Werte von x_0 und y_0, so hat man für $\xi_1^0 = 0$ gleichzeitig

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0}{x - x_0} = \varepsilon \frac{\eta_1 \eta_2^0 + \eta_2 \eta_1^0}{y - y_0} \quad \text{und} \quad \frac{\xi_1 \xi_2^1}{x - x_1} = \varepsilon \frac{\eta_1 \eta_2^1 + \eta_2 \eta_1^1}{y - y_1}.$$

Die Multiplikation ergibt wegen $\xi_1 \xi_1 = l_1 (x - x_0)(x - x_1)$

$$l_1 \xi_2^0 \xi_2^1 = \frac{(\eta_1 \eta_2^0 + \eta_2 \eta_1^0)(\eta_1 \eta_2^1 + \eta_2 \eta_1^1)}{(y - y_0)(y - y_1)}.$$

Man findet aber durch eine leichte Rechnung

$$\begin{aligned} l_1 \xi_2^0 \xi_2^1 &= l_1 \sqrt{(l_2 x_0^2 + 2 m_2 x_0 + n_2)(l_2 x_1^2 + 2 m_2 x_1 + n_2)} \\ &= \sqrt{(l_1 n_2 - l_2 n_1)^2 - 4 (l_1 m_2 - l_2 m_1)(m_1 n_2 - m_2 n_1)} = 2\mu. \end{aligned}$$

Folglich erfüllen die konjugierten Werte von y_0 und y_1 die Bedingung

$$\begin{aligned} 2\mu (y - y_0)(y - y_1) &= (\eta_1 \eta_2^0 + \eta_2 \eta_1^0)(\eta_1 \eta_2^1 + \eta_2 \eta_1^1) \\ &= \eta_1 \eta_1 \eta_2^0 \eta_2^1 + \eta_2 \eta_2 \eta_1^0 \eta_1^1 + \eta (\eta_1^0 \eta_2^1 + \eta_2^0 \eta_1^1). \end{aligned}$$

Wegen der Rationalität der linken Seite erfordert diese Gleichung, daß $\eta_1^0 \eta_2^1 + \eta_2^0 \eta_1^1$ verschwinde, und dies ist, wie leicht zu sehen, nur möglich, wenn $\eta_1 \eta_1 = \mathfrak{l}_1 (y - y_0)(y - y_1)$, d. h. wenn y_0 und y_1 konjugierte Wurzeln von $\eta = 0$ sind. Dieser Fall wird später betrachtet werden.

Zunächst folgt für $f^0 = 0$

$$g^0 = f_{,}^0 f_{,}^0, \quad g_{,}^0 = \tfrac{1}{2} f_{,}^0 f_{,,}^0, \quad g_{,,}^0 = \tfrac{1}{12} G + \tfrac{1}{4} f_{,,}^0 f_{,,}^0,$$

und damit

$$X = \frac{f_{,}^0}{x - x_0} + \tfrac{1}{2} f_{,,}^0, \quad \Xi = \frac{f_{,}^0 \xi}{(x - x_0)^2}, \quad x - x_0 = \frac{f_{,}^0}{X - \frac{1}{2} f_{,,}^0}.$$

In diesem Falle kann man leicht die Variable x mittelst der Argumente der koordinierten Thetafunktionen $\vartheta_i(uq)$ ausdrücken, wo u das elliptische Integral

$$u = M \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = M \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad q = e^{-\pi \frac{M}{M'}},$$

und M das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen m und n, M' dagegen das Mittel zwischen m und $n' = \sqrt{m^2 - n^2}$ bezeichnet.

Den Vorschriften in Bd. 34 der *Mathem. Annalen* S. 140/1 entsprechend erhält man für $G^3 > 27 H^2$, wenn $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ die Wurzeln der kubischen Resolvente sind:

$$m = M\vartheta_3^2 = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3},\ n = M\vartheta^2 = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2},\ n' = M\vartheta_2^2 = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}}{\varpi_3}, \quad \cos\varphi = \frac{\varpi_1}{\varpi_3}, \quad \Delta(\varphi\varkappa) = \frac{\varpi_2}{\varpi_3},$$

$$u = \frac{M}{m}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi\varkappa)}, \quad \varkappa = \frac{n'}{m} = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}}, \quad \varkappa' = \frac{n}{m} = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3}}.$$

Weiter ergibt sich

$$x - x_0 = \frac{2 f_{,}^0 \vartheta_1^2(u, q)}{(2\lambda - f_{,,}^0)\vartheta_1^2 u + \mu\vartheta_3^2 u},$$

wenn für $\lambda = \lambda_1$ die *größte* Wurzel genommen wird, also $\mu = 2mn$. Für $\lambda = \lambda_2$ geht $\mu\vartheta_3^2 u$ über in $2nn'\vartheta_3^2 u$, für $\lambda = \lambda_3$ endlich in $2mn'\vartheta^2 u$, während

$$X = \lambda_1 + \frac{m^2}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \lambda_2 + m^2\frac{\Delta^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \lambda_3 + \frac{m^2}{\sin^2\varphi}.$$

Für $G^3 < 27 H^2$ dagegen ist nur *eine* Wurzel $\lambda = \frac{1}{6}M^2(\vartheta^4 - \vartheta_2^4)$ reell und wegen $\mu^2 = 12\lambda^2 - G$ hat man zu setzen:

$$m = M\vartheta_3^2 = \sqrt{2\mu}, \quad n = M\vartheta^2 = \sqrt{\mu + 3\lambda}, \quad n' = M\vartheta_2^2 = \sqrt{\mu - 3\lambda}.$$

Damit folgt

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q})}{\vartheta_2(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q})} = \frac{1}{\varpi}\sqrt{\tfrac{1}{2}\mu}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{\mu - 3\lambda}{2\mu}},$$

mithin gehen jetzt die Ausdrücke hervor:

$$x - x_0 = \frac{2 f_{,}^0 \vartheta_1^2(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q})}{(2\lambda - f_{,,}^0)\vartheta_1^2(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q}) + \mu\vartheta_2^2(\frac{1}{2}u, i\sqrt{q})}, \quad X = \lambda + \frac{m^2}{4\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Zur numerischen Berechnung der Argumente q und u kann man sich bekanntlich verschiedener Methoden bedienen, welche sich zumeist auf die Transformation des Gauss'schen arithmetisch-geometrischen Mittels gründen. Sei

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \quad n_1 = \sqrt{mn}, \quad m_2 = \frac{m_1 + n_1}{2}, \quad n_2 = \sqrt{m_1 n_1}, \text{ usw.},$$

so setze man

$$l = \lg\frac{m}{n}, \quad \lambda = \lg\left(1 + \frac{n}{m}\right), \quad l_1 = \lg\frac{m_1}{n_1} = \tfrac{1}{2}l + \lambda - \lg 2,$$

$$\lambda_1 = \lg\left(1 + \frac{n_1}{m_1}\right), \quad l_2 = \lg\frac{m_2}{n_2} = \tfrac{1}{2}l_1 + \lambda_1 - \lg 2, \text{ usw.}$$

Dann wird für das Argument des Moduls:

$$\lg q = 2 \lg \frac{\varkappa}{4} + l - \tfrac{3}{2}(l_1 + \tfrac{1}{2} l_2 + \tfrac{1}{4} l_3 + \tfrac{1}{8} l_4 \ldots),$$

nebst

$$\lg \vartheta \;= - \tfrac{1}{4}(l + l_1 + l_2 + l_3 \ldots),$$
$$\lg \vartheta_2 = \tfrac{1}{2} \lg \varkappa + \tfrac{1}{4}(l - l_1 - l_2 - l_3 \ldots),$$
$$\lg \vartheta_3 = \tfrac{1}{4}(l - l_1 - l_2 - l_3 \ldots).$$

Da ferner für $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$,

$$m \operatorname{tg}^2 \psi = n \operatorname{tg}^2 \frac{\psi_1}{2}, \quad m_1 \operatorname{tg}^2 \psi_1 = n_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi_2}{2}, \text{ usw.}$$

$$\frac{\pi}{2} - u = M \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \sin^2 \varphi + n^2 \cos^2 \varphi}} = \tfrac{1}{2} M \int_0^{\psi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{m_1^2 \sin^2 \varphi + n_1^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$= \tfrac{1}{4} M \int_0^{\psi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{m_2^2 \sin^2 \varphi + n_2^2 \cos^2 \varphi}} \cdots = \lim_{p=\infty} \frac{1}{2^p} \psi_p,$$

so ist dadurch auch das Argument der Amplitude bestimmt.[1])

36.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung des Falles, in welchem ξ_1^0 und η_1^0 *gleichzeitig* verschwinden, also $f x_0 = \mathfrak{f} y_0 = 0$ ist. Alsdann wird die Substitution $X = Y$ zugleich *rational* und *linear*, und man erhält das folgende Formelsystem:

$$\frac{f_{\prime}^0}{x - x_0} + \tfrac{1}{2} f_{\prime\prime}^0 = \frac{\mathfrak{f}_{\prime}^0}{y - y_0} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{f}_{\prime\prime}^0$$

oder

$$f_{\prime}^0 \mathfrak{f}_{\prime}^0 = \{ (f_{\prime\prime}^0 - \mathfrak{f}_{\prime\prime}^0)(x - x_0) + 2 f_{\prime}^0 \} \{ (\mathfrak{f}_{\prime\prime}^0 - f_{\prime\prime}^0)(y - y_0) + 2 \mathfrak{f}_{\prime}^0 \},$$

$$\frac{\xi_1 \xi_2^0}{x - x_0} = \varepsilon \frac{\eta_1 \eta_2^0}{y - y_0}, \quad \frac{f_{\prime}^0 \xi}{(x - x_0)^2} = \varepsilon \frac{\mathfrak{f}_{\prime}^0 \eta}{(y - y_0)^2},$$

$$\frac{L^0 x_0 + M^0}{(x - x_0)^2} \xi = \varepsilon \frac{\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0}{(y - y_0)^2} \eta,$$

$$x - x_0 = \frac{(L^0 x_0 + M^0)(y - y_0)}{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{L}^0 - L^0)(y - y_0) + \mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0},$$

$$y - y_0 = \frac{(\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0)(x - x^0)}{\tfrac{1}{2}(L^0 - \mathfrak{L}^0)(x - x_0) + L^0 x_0 + M^0},$$

---

1) S. 135 meiner Abhandlung *zur Reduktion elliptischer Integrale* ist Z. 8 v. o. $\cot \varphi$ statt $\operatorname{tg} \varphi$ zu lesen.

$$\xi_1 = \varepsilon\,\eta_1\,\frac{\eta_2^0}{\xi_2^0}\cdot\frac{L^0 x_0 + M^0}{\frac{1}{2}(\mathfrak{L}^0 - L^0)(y - y_0) + \mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0},$$

$$\xi_2 = \quad \eta_2\,\frac{\xi_2^0}{\eta_2^0}\cdot\frac{\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0}{\frac{1}{2}(\mathfrak{L}^0 - L^0)(y - y_0) + \mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0},$$

$$\xi \;= \varepsilon\,\eta\cdot\frac{(L^0 x_0 + M^0)(\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0)}{\{\frac{1}{2}(\mathfrak{L}^0 - L^0)(y - y_0) + \mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0\}^2},$$

$$\eta_1 = \varepsilon\,\xi_1\,\frac{\xi_2^0}{\eta_2^0}\cdot\frac{\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0}{\frac{1}{2}(L^0 - \mathfrak{L}^0)(x - x_0) + L^0 x_0 + M^0},$$

$$\eta_2 = \xi_2\,\frac{\eta_2^0}{\xi_2^0}\cdot\frac{L^0 x_0 + M^0}{\frac{1}{2}(L^0 - \mathfrak{L}^0)(x - x_0) + L^0 x_0 + M^0},$$

$$\eta \;= \varepsilon\,\xi\cdot\frac{(L^0 x_0 + M^0)(\mathfrak{L}^0 y_0 + \mathfrak{M}^0)}{\{\frac{1}{2}(L^0 - \mathfrak{L}^0)(x - x_0) + L^0 x_0 + M^0\}^2}.$$

Die vorstehenden Formeln erfahren eine weitere Vereinfachung, wenn y_0 verschwindet oder unendlich wird, mit anderen Worten, für $\mathfrak{E} = 0$ oder $\mathfrak{A} = 0$. Da beide Fälle auseinander hervorgehen, wenn man $\frac{1}{y}$ statt y setzt und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ vertauscht, so beschränken wir uns hier auf die Transformation

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = \varepsilon\int_{y}^{\infty}\frac{dy}{\eta}$$

und bemerken, daß zur *direkten* Ableitung aus den allgemeinen Formeln der linearen Substitution, für $\mathfrak{A} = 0$, $y_0 = \infty$

$$\mathfrak{f}y = \left(1 - \frac{y}{y_0}\right)(4\mathfrak{B}y^3 + 6\mathfrak{C}y^2 + 4\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})$$

zu setzen ist. Man erhält:

$$\frac{f_{\prime}^0}{x - x_0} + \tfrac{1}{2}f_{\prime\prime}^0 = \mathfrak{B}y + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C} = \frac{L^0 x_0 + M^0}{x - x_0} + \tfrac{1}{2}L^0$$

$$= \frac{1}{2(x - x_0)}\left(L^0 x - \frac{N^0}{x_0}\right),$$

$$\eta_1^2 = 4\mathfrak{B}y + 2(\mathfrak{C} - 2\lambda), \qquad \eta_2^2 = y^2 + \frac{\mathfrak{C} + \lambda}{\mathfrak{B}}y + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{C} - 2\lambda},$$

$$x - x_0 = 2\,\frac{L^0 x_0 + M^0}{2\mathfrak{B}y + \mathfrak{C} - L^0}, \qquad y = \frac{L^0 x_0 + M^0}{\mathfrak{B}(x - x_0)} + \frac{L^0 - \mathfrak{C}}{2\mathfrak{B}},$$

$$\eta_1 = \frac{\varepsilon\,\xi_2^0\,\xi_1}{x - x_0}, \qquad \eta_2 = \frac{\xi_2\,(L^0 x_0 + M^0)}{\mathfrak{B}\,\xi_2^0(x - x_0)},$$

$$\xi_1 = \varepsilon\,\frac{2\eta_1}{\xi_2^0}\cdot\frac{L^0 x_0 + M^0}{2\mathfrak{B}y + \mathfrak{C} - L^0}, \quad \xi_2 = 2\mathfrak{B}\xi_2^0\cdot\frac{\eta_2}{2\mathfrak{B}y + \mathfrak{C} - L^0},$$

$$\eta = \varepsilon\,\xi\cdot\frac{L^0 x_0 + M^0}{\mathfrak{B}(x - x_0)^2}, \quad \mathfrak{x} = 4\varepsilon\mathfrak{B}\eta\cdot\frac{L^0 x_0 + M^0}{(2\mathfrak{B}y + \mathfrak{C} - L^0)^2}.$$

37.

Da jetzt ξ und η gleichzeitig verschwinden, so müssen die sämtlichen Wurzeln von f und $\mathfrak{f}$ einander zugeordnet, und sofern die lineare Substitution *als reell vorausgesetzt* werden soll, gleichzeitig reell oder komplex sein. Aus der Gleichheit der Invarianten folgt, daß für $G^3 < 27H^2$ ξ und η ein reelles und ein komplexes Wurzelpaar besitzen, während für $G^3 > 27H^2$ unentschieden bleibt, ob zwei reelle oder zwei komplexe Wurzelpaare stattfinden. Eine lineare Substitution, welche vier reelle Wurzeln in zwei konjugierte Paare überführt, oder umgekehrt, kann jedoch trotz der Unveränderlichkeit der Invarianten nicht reell sein, sodaß der Fall, wo ξ vier reelle und η vier komplexe Wurzeln besitzt, oder umgekehrt, hier auszuschließen ist.

Eine lineare Substitution von der Form

$$axy + bx + cy + d = 0, \quad ad - bc = \pm 1$$

läßt die Invarianten ungeändert. Setzt man

$$\xi\mathfrak{x} = A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

$$\eta\mathfrak{y} = \mathfrak{A}(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3),$$

wo

$$\mathfrak{A} = A(c + ax_0)(c + ax_1)(c + ax_2)(c + ax_3),$$

so sind neben $ad - bc = \pm 1$ die vier Gleichungen

$$ax_i y_i + bx_i + cy_i + d = 0$$

zu erfüllen, folglich muß die Determinante

$$\Delta = |\, x_i y_i, \quad x_i, \quad y_i, \quad 1 \,|$$

verschwinden. Diese Bedingung liefert

$$(x_0 - x_1)(x_2 - x_3)(y_0 y_1 + y_2 y_3) + (x_0 - x_2)(x_3 - x_1)(y_0 y_2 + y_1 y_3) +$$
$$+ (x_0 - x_3)(x_1 - x_2)(y_0 y_3 + y_1 y_2) = 0$$

oder

$$\frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1}\cdot\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_0 - y_2}{y_0 - y_1}\cdot\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3},$$

mit anderen Worten, das Doppelverhältnis der vier Wurzeln bleibt infolge linearer Transformation invariant (vgl. Art. 3). Wenn

$y_0 y_1$ nebst $y_2 y_3$ konjugierte Werte haben, so ist diese Gleichung reell, ebenso wie $\mathfrak{A}$ und die übrigen Koeffizienten in η, während allerdings $abcd$ nicht reell sein können, weil die lineare Substitution reelle Wurzeln in komplexe verwandelt hat.

Anders verhält es sich, wenn allein $y_0 = z_0 + z_1 i$ und $y_1 = z_0 - z_1 i$ komplex sind. Dann zerfällt die Gleichung $\Delta = 0$ in zwei, nämlich

$$y_2 y_3 - (y_2 + y_3) z_0 + z_0^2 + z_1^2 = 0 \qquad (1)$$

und

$$(x_0 - x_2 \cdot x_1 - x_3) + (x_0 - x_3 \cdot x_1 - x_2) = -\frac{12\lambda}{A} = 0. \qquad (2)$$

Folglich müssen jetzt die Invarianten $H = \mathfrak{H}$ verschwinden und außerdem die Gleichung (1) erfüllt sein. Dadurch wird aber der Wert von $\mathfrak{A}$ *rein imaginär*, d. h. die Gleichung $G = \mathfrak{G}$ kann nur stattfinden, wenn die Koeffizienten in η^2 rein imaginäre Werte haben. Läßt man den Faktor i fort, so erhalten G und $\mathfrak{G}$ entgegengesetzte Vorzeichen, mithin auch $G^3 - 27 H^2$ und $\mathfrak{G}^3 - 27 \mathfrak{H}^2$, wodurch der scheinbare Widerspruch gehoben wird, der darin liegt, daß eine lineare Substitution, durch welche ein reelles und ein konjugiertes Wurzelpaar in vier reelle Wurzeln, oder in zwei konjugierte Paare verwandelt werden, die Invarianten nicht ändern soll, während die Ungleichung $G^3 > 27 H^2$ in $\mathfrak{G}^3 < 27 \mathfrak{H}^2$ übergeht.[1])

38.

Setzt man

$$\xi_1 \xi_1 = l_1 (x - x_0)(x - x_1), \quad \eta_1 \eta_1 = \mathfrak{l}_1 (y - y_0)(y - y_1),$$

so ändert sich die betrachtete lineare Substitution nicht, wenn

---

1) Als Beispiel diene

$$x_0 = \tfrac{7}{3},\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ y_0 = \tfrac{37}{3},\ y_1 = 1,\ y_2 = 4 + 5i,\ y_3 = 4 - 5i$$

$$\xi\xi = \tfrac{1}{12} A (12x^4 - 4 \cdot 25 x^3 + 6 \cdot 50 x^2 - 4 \cdot 95 x + 168),$$

$$\eta\eta = \tfrac{1}{3} \mathfrak{A} (3y^4 - 4 \cdot 16 y^3 + 6 \cdot 80 y^2 - 4 \cdot 484 y + 1517),$$

$$G = \tfrac{1}{9} A^2, \quad H = 0, \quad \mathfrak{G} = -(\tfrac{85}{3} \mathfrak{A})^2, \quad \mathfrak{H} = 0,$$

folglich

$$A^2 + (85 \mathfrak{A})^2 = 0, \quad a = \frac{6 - 9i}{\sqrt{340}}, \qquad b = \frac{11 + 26i}{\sqrt{340}},$$

$$ad - bc = 1, \quad c = \frac{-16 + 19i}{\sqrt{340}}, \ d = \frac{-1 - 36i}{\sqrt{340}} \cdot$$

man in den Formeln des Art. 36 x_0 und y_0 mit x_1 und y_1 vertauscht. Es geht dies aus der Relation

$$l_1 \xi_2^0 \xi_2^1 = \mathfrak{l}_1 \eta_2^0 \eta_2^1 = 2\mu$$

des Art. 35 hervor, vermöge deren

$$\frac{\xi_1 \xi_1 \xi_2^0 \xi_2^1}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{\eta_1 \eta_1 \eta_2^0 \eta_2^1}{(y-y_0)(y-y_1)} \quad \text{oder} \quad \frac{\xi_1 \xi_2^1}{x-x_1} = \varepsilon \frac{\eta_1 \eta_2^1}{y-y_1}$$

wird. Durch Verbindung mit der früheren Gleichung erhält man die symmetrische Formel

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} \cdot \frac{\xi_2^0}{\eta_2^0} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{\xi_2^1}{\eta_2^1}.$$

Wenn hier $x_0 x_1$ und $y_0 y_1$ *konjugierte* Wurzelpaare sind, so nimmt diese Formel die Gestalt an $P + Qi = P - Qi$ oder $Q = 0$.

Aus der gefundenen Gleichung lassen sich die Radikale entfernen, wenn man die Relation

$$l_1 \frac{\xi_2^0}{\eta_2^0} = \mathfrak{l}_1 \frac{\eta_2^1}{\xi_2^1} \quad \text{oder} \quad l_1 \frac{\xi_2^1}{\eta_2^1} = \mathfrak{l}_1 \frac{\eta_2^0}{\xi_2^0}$$

benutzt. Damit wird

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{l_1}{\mathfrak{l}_1} \cdot \frac{\xi_2^1 \xi_2^1}{\eta_2^1 \eta_2^1} \cdot \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{\mathfrak{l}_1}{l_1} \cdot \frac{\eta_2^0 \eta_2^0}{\xi_2^0 \xi_2^0} \cdot \frac{y-y_1}{x-x_1},$$

sodaß man nach Belieben schreiben kann:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} \sqrt{\frac{l_2 x_0^2 + 2 m_2 x_0 + n_2}{\mathfrak{l}_2 y_0^2 + 2 \mathfrak{m}_2 y_0 + \mathfrak{n}_2}} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \sqrt{\frac{l_2 x_1^2 + 2 m_2 x_1 + n_2}{\mathfrak{l}_2 y_1^2 + 2 \mathfrak{m}_2 y_1 + \mathfrak{n}_2}},$$

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{l_1}{\mathfrak{l}_1} \cdot \frac{l_2 x_1^2 + 2 m_2 x_1 + n_2}{\mathfrak{l}_2 y_1^2 + 2 \mathfrak{m}_2 y_1 + \mathfrak{n}_2} \cdot \frac{y-y_1}{x-x_1},$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{l_1}{\mathfrak{l}_1} \cdot \frac{l_2 x_0^2 + 2 m_2 x_0 + n_2}{\mathfrak{l}_2 y_0^2 + 2 \mathfrak{m}_2 y_0 + \mathfrak{n}_2} \cdot \frac{y-y_0}{x-x_0},$$

oder mit Hilfe der Wurzeln $x_2 x_3$ und $y_2 y_3$:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} \sqrt{\frac{x_0 - x_2 \cdot x_0 - x_3}{y_0 - y_2 \cdot y_0 - y_3}} = \frac{y-y_1}{x-x_1} \sqrt{\frac{x_1 - x_2 \cdot x_1 - x_3}{y_1 - y_2 \cdot y_1 - y_3}},$$

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{A}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{x_1 - x_2 \cdot x_1 - x_3}{y_1 - y_2 \cdot y_1 - y_3} \cdot \frac{y-y_1}{x-x_1},$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{A}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{x_0 - x_2 \cdot x_0 - x_3}{y_0 - y_2 \cdot y_0 - y_3} \cdot \frac{y-y_0}{x-x_0}.$$

Für $A = 0$, $x_k = \infty$ hat man $A x_k = -4B$ zu setzen, weil

$$4B = -A(x_0 + x_1 + x_2 + x_3),$$

Übrigens ist immer festzuhalten, daß das Entsprechen der Wurzeln $x_0 y_0$ und $x_1 y_1$ durch die Gleichung $m_1 m_2 - \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 = C - \mathfrak{C}$ der Artt. 21 und 33 bedingt ist, damit die Zerlegung von $\xi = \xi_1 \xi_2$ und $\eta = \eta_1 \eta_2$ auf der nämlichen Wurzel λ der kubischen Resolvente beruhe. Die Formeln des Art. 36 besitzen dagegen den Vorzug, daß man neben $x_0 y_0$ die zugeordneten Wurzeln x_1 und y_1 nicht zu kennen braucht.

Die vorstehenden Gleichungen gelten nicht bloß für reelle Werte von $x_1 y_1$, sondern auch dann, wenn $x_0 x_1$ und $y_0 y_1$ *gleichzeitig* konjugierte Wurzelpaare bedeuten; also mit anderen Worten, wenn die Determinanten $m_1^2 - l_1 n_1$ und $\mathfrak{m}_1^2 - \mathfrak{l}_1 \mathfrak{n}_1$ von gleichem Vorzeichen sind. Nun ist aber

$$(m_1^2 - l_1 n_1)(m_2^2 - l_2 n_2) = G - 3\lambda^2 = (\mathfrak{m}_1^2 - \mathfrak{l}_1 \mathfrak{n}_1)(\mathfrak{m}_2^2 - \mathfrak{l}_2 \mathfrak{n}_2)$$

oder

$$\frac{m_1^2 - l_1 n_1}{\mathfrak{m}_1^2 - \mathfrak{l}_1 \mathfrak{n}_1} = \frac{\mathfrak{m}_2^2 - \mathfrak{l}_2 \mathfrak{n}_2}{m_2^2 - l_2 n_2},$$

sodaß, was vom ersten Wurzelpaare gilt, bei dem zweiten von selbst erfüllt ist. Sollten aber die Wurzeln von ξ sämtlich reell, von η sämtlich komplex sein, so würde, wie schon hervorgehoben wurde, unser Verfahren keine reelle Substitution liefern.

Die hier entwickelten Formeln für die Theorie der linearen Substitutionen bei der Transformation elliptischer Differentiale empfehlen sich durch Einfachheit und Durchsichtigkeit. Die *rationalen* Transformationen *zweiten* Grades führen notwendigerweise auf *verschiedene* Invarianten.

39.

Zum Schlusse betrachten wir noch die Substitutionen dritten und vierten Grades

$$w = x - \frac{f}{f_{\prime}} = -\frac{Mx + N}{Lx + M} = -\frac{Bx^3 + 3Cx^2 + 3Dx + E}{Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D}$$

und

$$w = \frac{g}{f} = \tfrac{1}{12}(\xi'\xi' - 2\xi\xi'') = \frac{A_1 x^4 + 4B_1 x^3 + 6C_1 x^2 + 4D_1 x + E_1}{Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E},$$

welche HERMITE zuerst untersucht hat.[1])

1) Crelles Journal Bd. 52, S. 8 und Bd. 60, S. 304.

Vermöge der ersteren gehen die Kovarianten $f\,g$ resp. über in

$$f(w) = f - 4f_{,}\frac{f}{f_{,}} + 6f_{,,}\left(\frac{f}{f_{,}}\right)^2 - 4f_{,,,}\left(\frac{f}{f_{,}}\right)^3 + f_{\text{IV}}\left(\frac{f}{f_{,}}\right)^4$$
$$= \frac{f}{f_{,}^4}(Gf^2 - 3g^2) = \mathfrak{f},$$
$$g(w) = g - 4g_{,}\frac{f}{f_{,}} + 6g_{,,}\left(\frac{f}{f_{,}}\right)^2 - 4g_{,,,}\left(\frac{f}{f_{,}}\right)^3 + g_{\text{IV}}\left(\frac{f}{f_{,}}\right)^4$$
$$= \frac{1}{f_{,}^4}(g^3 - 3Hf^3) = \mathfrak{g},$$

mithin $Gg + Hf$ in

$$G\mathfrak{g} + H\mathfrak{f} = \frac{g^2}{f_{,}^4}(Gg - 3Hf).$$

Da nun durch Differentiation erhalten wird:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{3g}{f_{,}f_{,}},$$

so folgt

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 9\frac{g^2}{f_{,}^4} = 9\frac{G\mathfrak{g} + H\mathfrak{f}}{Gg - 3Hf}$$

oder

$$\frac{dw}{\sqrt{G\mathfrak{g} + H\mathfrak{f}}} = 3\varepsilon\frac{dx}{\sqrt{Gg - 3Hf}},$$

also wenn f für $x = x_0$ verschwindet:

$$\int_{x_0}^{w}\frac{dx}{\sqrt{Gg + Hf}} = 3\varepsilon\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{Gg - 3Hf}},$$

ε bedeutet das Vorzeichen von $\frac{w - x_0}{x - x_0} = 1 - \frac{f}{(x - x_0)f_{,}}$.

Die umgekehrte Substitution ergibt sich durch Auflösung der kubischen Gleichung

$$(Aw + B)x^3 + 3(Bw + C)x^2 + 3(Cw + D)x + (Dw + E) = 0,$$

deren Invariante durch

$$J_w = -(G\mathfrak{g} + H\mathfrak{f})$$

gegeben ist, während nach dem Früheren $J = -(A_1G + AH)$ wird. Schreibt man nun

$$2\lambda_w = (Aw + B)x + Bw + C,$$

so hat man

$$4\lambda_w^3 = \mathfrak{G}\lambda_w + \mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{G} = 3\{A_1 w^2 + (BC - AD)w + (C^2 - BD)\},$$

$$\mathfrak{H} = \tfrac{1}{2}\{i_0 w^3 + (ABC + 3AC^2 - 3B^2C - A^2E)w^2 +$$
$$+ (3ABC + 2B^2D - 3BC^2 - 2ABE)w + 3(BCD - B^2E - 2C^3)\},$$

während als zugehörige Invariante erhalten wird:

$$\mathfrak{J} = -\tfrac{16}{27}(\mathfrak{G}^3 - 27\mathfrak{H}^2) = 4(Aw + B)^2 J_w.$$

Da nun

$$4\mathfrak{W} = \sqrt{\mathfrak{J}} = 2(Aw + B)\sqrt{J_w}$$

oder

$$\mathfrak{W} = \tfrac{1}{2}(Aw + B)\sqrt{-(G\mathfrak{g} + H\mathfrak{h})},$$

so folgt zur Bestimmung von x die Gleichung

$$(Aw + B)x + Bw + C = (\mathfrak{H} + \mathfrak{W})^{\frac{1}{3}} + (\mathfrak{H} - \mathfrak{W})^{\frac{1}{3}}.$$

Führt man dagegen die neue Variable

$$w = \frac{g}{f} = \tfrac{1}{12}(\xi'\xi' - 2\xi\xi'')$$

ein, so gilt nicht allein die Formel

$$\omega^2 = 4w^3 - Gw - H = (\tfrac{1}{12}\xi^2\xi''')^2 = \frac{h^2}{f^3},$$

sondern es wird auch

$$\frac{dw}{dx} = -\tfrac{1}{6}\xi\xi''', \quad \frac{dx}{\xi} = -6\frac{dw}{\xi^2\xi'''},$$

nebst

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\xi} = 6\int_{w}^{\infty}\frac{dw}{\xi^2\xi'''} = \tfrac{1}{2}\varepsilon\int_{w}^{\infty}\frac{dw}{\omega}.$$

Hier verschwindet ξ für $x = x_0$, und ε bedeutet das Vorzeichen der Differenz $x - x_0$, wenn w als positiv wachsend vorausgesetzt wird.

Die Formeln der umgekehrten Substitution sind bereits Art. 30 entwickelt worden, wonach

$$(Aw - A_1)x + (Bw - B_1) = \tfrac{1}{2}\omega\,\mathrm{S}\sqrt{\frac{A_1 - A\lambda}{w - \lambda}},$$

wenn das Produkt der in S enthaltenen Radikale das Vorzeichen von i_0 besitzt. Mittelst der Gleichung

$$\xi = -\varepsilon\omega\frac{dx}{dw}$$

endlich leitet man den Wert ab:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\varepsilon \frac{i_0 \omega}{(A w - A_1)^2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon \frac{A\omega\omega}{(A w - A_1)^2} \,\mathrm{S} \sqrt{\frac{A_1 - A\lambda}{w - \lambda}} -$$

$$- \frac{\varepsilon}{A w - A_1} \,\mathrm{S}\, (2 w + \lambda) \sqrt{(A_1 - A\lambda)(w - \lambda)}.$$

Man sieht, daß hier x und ξ *nicht* auf *rationale* Weise von w und ω abhängen. In der Tat erhält man zufolge des Art. 36 bei Einführung einer Variablen y, für welche

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\xi} = \varepsilon \int_{y}^{\infty} \frac{dy}{\eta} = \varepsilon \int_{w}^{y} \frac{dw}{\omega},$$

$$\eta\eta = 4y^3 - Gy - H, \quad x - x_0 = 2\,\frac{L^0 x_0 + M^0}{2y - L^0},$$

neben

$$\eta\omega = 2y(y - w)^2 - (y + w)(2yw - \tfrac{1}{2}G) + H$$

$$= 2y^3 + \tfrac{1}{2}Gy + H - w(6y^2 - \tfrac{1}{2}G)$$

$$= \frac{2y^6 - \frac{5}{2}Gy^4 - 10Hy^3 - \frac{5}{8}G^2y^2 - \frac{1}{2}GHy + \frac{1}{32}G^3 - H^2}{4y^3 - Gy - H}:$$

$$2\,\frac{y - w}{\sqrt{w - \lambda}} = \frac{\omega}{w - \lambda} + \frac{\eta}{y - \lambda},$$

oder

$$y = w + \tfrac{1}{2}\omega \,\mathrm{S} \sqrt{\frac{1}{w - \lambda}},$$

$$w = \frac{(y^2 + \frac{1}{4}G)^2 + 2Hy}{4y^3 - Gy - H}.$$

Letztere Substitutionen dienen zur Halbierung resp. Verdoppelung des Integrals

$$u = \int_{w}^{\infty} \frac{dw}{\omega} = 2\int_{y}^{\infty} \frac{dy}{\eta},$$

wo nach Weierstrass

$$w = \wp(u)$$

die möglich einfachste doppeltperiodische Funktion bezeichnet.

Inhaltsübersicht.

Druckfehler.

S. 201, Z. 10 v. u. lies „Funktionen wie".
„ 211, „ 1 v. u. lies $= \beta_2$
„ 217, „ 11 v. u. lies $(\xi - \xi_i)^{k_i}$
„ 219, „ 10 v. u. lies a_i
„ 222, „ 2 u. 6 v. o. sowie Z. 7 v. u. lies $f, g,$
„ 229, „ 11 v. o. lies $(\xi + f_i)^m$
„ „ „ 17 v. o. fehlt $= \frac{1}{2}[ff]_2$
„ 231, „ 13 u. 16 v. u. lies $\mathfrak{g}_i$ statt g_i
„ 232, „ 3 v. o. lies $\mathfrak{g}_i$
„ 237, „ 10 v. u. lies $\widehat{m}_2$ statt m_2
„ 332, „ 12 v. u. lies $\frac{1}{54}\,\Pi$ statt $\frac{1}{64}$.

Druckfertig erklärt 13. I. 1904.

Die komplexen Bewegungen.

Von

E. von Weber.

Die komplexen Bewegungen des dreidimensionalen euklidischen Raumes spielen bekanntlich in manchen geometrischen Fragen, besonders des Lieschen Ideenkreises, eine fundamentale Rolle, scheinen aber gleichwohl, soviel mir bekannt geworden ist, bisher fast nur ihrer analytischen, nicht aber ihrer geometrischen Bedeutung nach gewürdigt worden zu sein. In der vorliegenden Mitteilung versuchen wir daher eine reell-geometrische Interpretation der genannten Raumtransformationen zu entwickeln, und zwar auf Grund der beiden naheliegenden Bemerkungen, daß erstens jede komplexe Bewegung die vierfach unendlich vielen Minimalebenen des Raumes unter sich vertauscht, und zweitens diese Ebenen den ∞^4 orientierten Geraden, d. h. also, nach Herrn Studys Ausdruck, den *Speeren* des Raums umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können. *Wir betrachten also die komplexen Bewegungen als Speertransformationen des R_3.*

Zu diesem Zwecke untersuchen wir in § 1 zunächst, welche reellen Raumgebilde in der Geometrie der Speere den komplexen Punkten und Geraden des R_3 entsprechen. Das Prinzip dieser Abbildung ist natürlich keineswegs neu; es steht vielmehr mit der bekannten von M. Chasles und E. Laguerre studierten Repräsentation der Punkte des R_3 durch orientierte Kreise, sowie mit zahlreichen neueren Untersuchungen, von denen wir außer den weiter unten zu nennenden Arbeiten E. Studys nur noch G. Tarrys[1]) Imaginärtheorie hervorheben wollen, in der allerengsten Beziehung. Dagegen dürfte die hier durchgeführte prinzipielle Verwertung der Speere, insbesondere auch zu konstruktiven Zwecken, in manchen Punkten über Bekanntes hinausgehen. Der folgende

1) Assoc. Fr. C. R. Séance XVIII—XXII (1889—93).

§ 2, in dem wir die durch eine komplexe Bewegung definierte Speertransformation des nähern untersuchen, handelt nur von den Bewegungen im engern Sinne, während die Umlegungen und jene durch C. Juels und C. Segres Arbeiten wichtig gewordenen Umformungen des Raumes, die man als „uneigentliche“ oder „Anti-Bewegungen“ bezeichnen könnte, einer besonderen Abhandlung vorbehalten bleiben. Im dritten § endlich beantworten wir die fundamentale Frage nach der reellen geometrischen Deutung der Invarianten, die das Speerquadrupel gegenüber der Gruppe Γ_{12} aller komplexen Bewegungen aufweist.

Es bedarf wohl kaum des besondern Hinweises, daß die hier behandelten Probleme alle in der Geometrie der komplexen nicht-euklidischen Bewegungen ihr Analogon finden und ihre Lösungen erst dort von der Asymmetrie befreit erscheinen, die der euklidischen Betrachtung notwendig anhaftet. Aus dieser Bemerkung ergibt sich von selbst auch der innige Zusammenhang der vorliegenden Untersuchungen mit Herrn Studys neueren Arbeiten[1]), worin die Gruppe der komplexen nicht-euklidischen Bewegungen wiederholt untersucht, und auch auf den hier behandelten Grenzfall hingewiesen wird.

§ 1. Komplexe Punkte und Gerade.

1. Unter einem „Speer“ verstehen wir (nach Study) eine orientierte, d. h. mit Richtungssinn begabte, reelle, im Endlichen liegende Gerade des R_3; jede solche Gerade „enthält“ also zwei entgegengesetzte Speere. Durch jedes System von 7 reellen Zahlen p_{ik}, π, welche die Bedingungen:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0, \quad \pi^2 = p_{41}^2 + p_{42}^2 + p_{43}^2$$
$$\pi \neq 0$$

erfüllen, ist ein und nur ein Speer definiert. Von diesen „Speerkoordinaten“ sind die p_{ik} nichts anderes als die Plückerschen Koordinaten der geraden Linie, die den Speer enthält, während mittels der siebenten π die Kosinus der Winkel, die die Speerrichtung mit den 3 positiven Achsenrichtungen des zugrunde gelegten kartesischen Koordinatensystem einschließt, in der Form

$$\frac{p_{41}}{\pi}, \quad \frac{p_{42}}{\pi}, \quad \frac{p_{43}}{\pi}$$

1) Vgl. insbesondere: „Über nicht-euklidische und Liniengeometrie.“ Greifswald 1900, sowie die „Geometrie der Dynamen“ Lpz. 1903.

dargestellt werden. Eine komplexe Ebene

$$ux + vy + wz + \varpi = 0$$

heißt nach Lie eine „Minimalebene", wenn die Relation

$$(1) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

besteht, ohne daß uvw gleichzeitig verschwinden. Jede Minimalebene enthält eine im Endlichen liegende reelle Gerade und umgekehrt gehen durch jede solche Gerade zwei konjugiert imaginäre Minimalebenen, die sich den beiden auf der Geraden liegenden Speeren eindeutig zuordnen lassen. Dies geschieht mittelst der Formeln:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varrho u = -p_{21}p_{24} - p_{31}p_{34} + i\pi p_{23} \\ \varrho v = -p_{32}p_{34} - p_{12}p_{14} + i\pi p_{31} \\ \varrho w = -p_{13}p_{14} - p_{23}p_{24} + i\pi p_{12} \\ \varrho \varpi = \quad p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{31}^2 \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \sigma p_{12} = \varpi' w'' - \varpi'' w'; \quad \sigma p_{41} = v' w'' - w' v''; \\ \sigma p_{23} = \varpi' u'' - \varpi'' u'; \quad \sigma p_{42} = w' u'' - u' w''; \\ \sigma p_{31} = \varpi' v'' - \varpi'' v'; \quad \sigma p_{43} = u' v'' - v' u'', \\ \quad \sigma\pi = u'^2 + v'^2 + w'^2 = u''^2 + v''^2 + w''^2; \end{cases}$$

worin $u = u' + iu''$ etc. gesetzt wurde. Jeder Speer ist sonach in umkehrbar eindeutiger Weise einer Minimalebene zugewiesen und soll als reelle Repräsentation der letzteren aufgefaßt werden; unter „Speerkoordinaten" können wir also fortan auch irgend vier komplexe Zahlen $uvw\varpi$ verstehen, die an die Gleichung (1) geknüpft sind, ohne daß uvw gleichzeitig verschwinden.

2. Den Inbegriff der ∞^2 Speere, welche die durch einen reellen oder komplexen Punkt P gehenden Minimalebenen repräsentieren, nennen wir einen „Speerzyklus" oder kurz den Zyklus P. Ist P ein reeller Punkt, so wird der Zyklus P mit dem „Speerbündel P", d. h. dem Inbegriff der durch P gehenden Speere, identisch. Ist P ein komplexer unendlich ferner Punkt, so bilden die durch ihn gehenden Minimalebenen einen „uneigentlichen Zyklus"; die zugehörigen Speere verteilen sich auf zwei verschiedene Bündel syntaktischer[1]) Speere. Diese Bündel sind entgegengesetzt, wenn P ein reeller unendlich ferner Punkt ist, sie fallen zusammen, wenn P auf dem unendlich fernen Kugelkreis liegt.

1) d. h. paralleler und gleichgerichteter Speere (Study).

Sind $a + ia'$, $b + ib'$, $c + ic'$ die auf unser kartesisches Achsenkreuz bezogenen Koordinaten von P, und A, A' die reellen Raumpunkte mit den Koordinaten abc bezw. $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$, so wollen wir das Punktepaar AA' als den zu dem Zyklus P gehörigen „Pfeil", A als den Anfangspunkt, A' als den Endpunkt dieses Pfeils bezeichnen; A heißt auch das Zentrum, die positive Strecke $AA' = r$ der Radius, die Gerade AA' die Achse des Zyklus P. Da dieser durch die reellen Punkte AA' vollständig definiert ist, so sprechen wir wohl auch von dem „Zyklus $[AA']$". Wird der reelle Punkt A'' so bestimmt, daß A die Mitte der Strecke $A''A'$ ist, so gehört der Pfeil AA'' zu dem konjugiert imaginären Punkt $\overline{P}$, und es ist A die Mitte der rein imaginären Strecke $P\overline{P}$.

In der Ebene, die im Punkte A auf der Achse AA' senkrecht steht, konstruieren wir den einteiligen Kreis K mit dem Zentrum A und dem Radius r und versehen ihn mit der Umlaufsrichtung, die vom Punkte A' aus ebenso erscheint, wie von einem Punkte der positiven Z-Achse aus betrachtet die Umdrehung, durch welche die positive X-Achse auf dem kürzesten Wege in die positive Y-Achse übergeführt wird. Dieser orientierte Kreis K heißt der Äquator des Zyklus P. Die Speere dieses Zyklus bestehen jetzt, wie man leicht verifiziert, aus dem Inbegriff aller Erzeugenden der konfokalen einschaligen Rotationshyperboloide, die den Äquator K zum Fokalkreis haben, und zwar sind diese Erzeugenden so orientiert, daß ihre in der Äquatorebene liegenden Vertikalprojektionen den Punkt A in demselben Sinne umkreisen wie der Äquator selbst. Unter den Speeren des Zyklus P befinden sich auch die ∞^1 orientierten Tangenten von K. Durch Umkehrung des Sinnes aller Speere eines Zyklus P erhält man natürlich den konjugierten Zyklus $\overline{P}$.

3. Durch jeden reellen Punkt Q gehen zwei Speere $\sigma_1 \sigma_2$ des Zyklus P; sie sind die Erzeugenden des durch Q gehenden einschaligen Rotationshyperboloids mit dem Fokalkreis K, also leicht konstruierbar, wenn A, A', Q gegeben werden. Sie gehen in die an K zu ziehenden orientierten Tangenten über, wenn Q auf der Äquatorebene außerhalb K angenommen wird, und koinzidieren dann und nur dann, wenn Q auf K selbst liegt. Die beiden in der Achse liegenden Speere sind die einzigen entgegengesetzten des Zyklus.

4. Ist ein Speer σ beliebig gegeben, so existiert im Zyklus P ein und nur ein dazu syntaktischer Speer. Um diesen zu finden, ziehe man durch den Punkt A den zu dem gegebenen syntaktischen Speer σ' und trage auf ihm von A aus in der Speerrichtung den Punkt Q so auf, daß $AQ = r$ wird. Ist dann Q' die Projektion von Q auf die Äquatorebene, ferner Q'' auf dieser Ebene so bestimmt, daß die Strecke AQ' gleich und senkrecht zu AQ'' wird und die Drehung um 90^0, die AQ'' in die Lage AQ' bringt, im Sinne des Äquators erfolgt, so ist der durch Q'' zu σ syntaktisch gezogene Speer der gesuchte.

5. Ist umgekehrt ein Speer σ und ein reeller Punkt A gegeben, so verstehe man unter B den Fußpunkt der von A auf σ gefällten Senkrechten und bestimme den Punkt B' durch die Forderung, daß die Strecke AB' senkrecht zur Ebene (A, σ) und gleich AB sei, so zwar, daß die Richtung von σ, die von B nach A weisende und die von A nach B' weisende Richtung in analoger Weise aufeinander folgen wie die X-, die Y- und die Z-Richtung unseres Koordinatensystems. Dann ist die durch B' parallel zu σ gezogene Gerade der Ort aller Punkte A' der Eigenschaft, daß der Zyklus $[AA']$ den Speer σ enthält. Wir erhalten so eine einfache geometrische Definition der ∞^4 Pfeile, die zu den Punkten einer gegebenen Minimalebene gehören.

6. Die ∞^2 komplexen Punkte, die auf einer reellen Geraden γ liegen, werden repräsentiert durch den Inbegriff der Pfeile, die ihren Anfangs- und Endpunkt auf γ haben. Wir betrachten zweitens eine *niederimaginäre* Gerade γ, d. h. eine komplexe Gerade, die einen reellen Punkt besitzt und in einer reellen Ebene liegt, und zwar zunächst unter der Annahme, daß der reelle Punkt unendlich fern ist. Dann gehen durch γ zwei Minimalebenen, die durch antitaktische Speere σ, σ' repräsentiert werden; umgekehrt ist durch zwei solche Speere eine komplexe Gerade mit reeller Richtung als Schnittlinie der beiden zugehörigen Minimalebenen definiert. Zu den ∞^1 orientierten Kreisen, die von den Speeren σ nnd σ' berührt werden, gehören dann ebensoviele Pfeile, deren Anfangs- bezw. Endpunkte je eine zu σ und σ' parallele Gerade h bezw. h' erfüllen; h liegt in der Ebene der Speere $\sigma\sigma'$ in gleichem Abstand d von ihnen, h' im Abstand d von h, und die Ebene $(\sigma\sigma')$ ist zu der Ebene der Geraden h, h' senkrecht. Diese letztere Ebene enthält die Gerade γ. Die ∞^2 komplexen Punkte dieser Geraden werden jetzt dargestellt durch die Pfeile, die ihren Anfangspunkt

auf h, ihren Endpunkt auf h' haben. Damit umgekehrt die Verbindungslinie zweier komplexer Punkte $[AA']$ und $[BB']$ eine gegebene reelle Richtung habe, ist notwendig und hinreichend, daß die reellen Geraden AB und $A'B'$ jener Richtung parallel seien.

7. Es bedeute jetzt γ eine niederimaginäre Gerade mit dem reellen Punkt O; sie sei auf der durch O gehenden reellen Ebene e enthalten. Dann liegen in e die Pfeile aller komplexen Punkte von γ. Umgekehrt liegen zwei Pfeile A_1A_1' und A_2A_2' in derselben reellen Ebene e, ohne daß die Linien A_1A_2 und $A_1'A_2'$ parallel sind, so enthält die Verbindungslinie der komplexen Punkte $[A_1A_1']$ und $[A_2A_2']$ einen im Endlichen liegenden reellen Punkt O.

8. Wir denken uns die Ebene e orientiert, d. h. die Gebiete, in die sie den Raum zerlegt, als positive und negative Seite unterschieden; von den zwei Bündeln syntaktischer Speere, die auf e senkrecht stehen, nennen wir dasjenige das erste (zweite), dessen Speere in die positive (negative) Seite von e hineinweisen. Die Minimalebenen, welche durch das erste (zweite) Speerbündel definiert werden, schneiden dann aus e das erste (zweite) System von Minimalgeraden aus.

Ist A_iA_i' ein in e liegender Pfeil, so kann man von den zwei Punkten, in denen der zugehörige Äquator die Ebene e schneidet, einen ersten P_i und einen zweiten P_i' unterscheiden, je nachdem der Speer, der in dem betr. Punkt den Äquatorkreis berührt, nach der positiven oder negativen Seite von e weist; $P_iA_iP_i'$ liegen in einer Geraden, die zu A_iA_i' senkrecht ist, und man hat $P_iA_i = A_iP_i' = A_iA_i'$. Da sonach zu jedem auf e liegenden Punktepaar A_iA_i' das Paar P_iP_i' vollkommen unzweideutig konstruiert werden kann, und umgekehrt, so läßt sich das eine ebenso zur Definition eines auf e liegenden komplexen Punktes verwenden wie das andere, und zwar repräsentiert P_iP_i' denjenigen komplexen Punkt von e, in dem sich die durch P_i gehende Minimallinie des ersten und die durch P_i' gehende des zweiten Systems schneiden; der konjugiert komplexe Punkt wird durch $P_i'P_i$ dargestellt.

9. Wir betrachten die Ebene als Gauss'sche Zahlenebene und beziehen sie demgemäß auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz ξ, η, sodaß das erste bezw. zweite System von Minimallinien durch die Gleichungen

$$\xi + i\eta = \text{const.}; \quad \xi - i\eta = \text{const.}$$

gegeben ist. Bedeuten ferner die komplexen Zahlen ξ, η die Koordinaten des Punktes $[A_i A_i']$, die Zahlen z, z' die Gauss'schen Affixe der oben definierten reellen Punkte P_i, P_i', so hat man offenbar:

$$(4) \qquad z = \xi + i\eta; \quad \bar{z}' = \xi - i\eta.$$

Die komplexe Gerade γ sei durch die Gleichung:

$$(5) \qquad a\xi + b\eta + c = 0$$

definiert; vermöge (4) schreibt sich dieselbe folgendermaßen:

$$\bar{z}' = \alpha z + \beta,$$

worin gesetzt wurde:

$$\alpha = -\frac{a - ib}{a + ib}; \quad \beta = \frac{-2c}{a + ib}.$$

Diese Relation definiert eine indirekte Ähnlichkeitstransformation $\mathfrak{A}$ der Ebene e in sich; ihr Fixpunkt O ist unter der über γ gemachten Annahme im Endlichen gelegen, was sich analytisch darin ausspricht, daß $|\alpha| \neq 1$, also das Verhältnis von a und b nicht reell ist.

10. Ist also eine niederimaginäre Gerade γ durch zwei auf ihr liegende Punkte, d. h. durch zwei in einer Ebene e liegende Pfeile $A_1 A_1'$ und $A_2 A_2'$ gegeben, so findet man ihren reellen Punkt O als Fixpunkt der indirekten Ähnlichkeitstransformation $\mathfrak{A}$, welche die nach Nr. 8 zu konstruierenden Punkte P_1, P_2 bezw. in P_1' und P_2' überführt. Durch γ gehen zwei Minimalebenen, deren Speere $\sigma\sigma'$ den Punkt O enthalten und als gemeinsame Speere der Zyklen $[A_i A_i']$ nach Nr. 3 leicht konstruiert werden können. Um jetzt die Pfeile $A_i A_i'$ aller komplexen Punkte von γ zu finden, bestimme man zu einem willkürlich auf e anzunehmenden Punkt A_3 den Punkt A_3' nach Nr. 5 als gemeinsamen Schnittpunkt der Ebene e und zweier zu σ und σ' paralleler Gerader; oder man ermittele den Fixpunkt P_3 der indirekten Ähnlichkeitstransformation, die durch die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{A}$ und der Spiegelung am Punkte A_3 entsteht, und konstruiere die Punkte P_3' und A_3' nach der in Nr. 8 gegebenen Vorschrift.

11. Die Betrachtung der Nr. 9 erleidet eine Ausnahme, wenn in Gleichung (5) der Koeffizient b gleich ia (resp. gleich $-ia$) wird, also γ eine Minimalgerade des ersten (zweiten) Systems bedeutet. Dann wird der erste (zweite) Punkt jedes

der Paare $P_i P_i'$ mit dem reellen Punkt O von γ identisch, die Speere $\sigma\sigma'$ koinzidieren in den durch O gehenden auf e senkrecht stehenden Speer des ersten (zweiten) Bündels, und man erhält zu jedem in e liegenden Punkt A_i den Punkt A_i' als Schnittpunkt von e mit der nach Nr. 5 zu konstruierenden Parallelen zu σ. Eine niederimaginäre Minimalgerade γ ist also durch den Speer σ der durch sie gehenden Minimalebene und den auf γ und σ liegenden reellen Punkt O vollständig charakterisiert.

12. Es sei jetzt eine hochimaginäre Gerade γ als Verbindungslinie zweier komplexer Punkte $[A_1 B_1]$ und $[A_2 B_2]$ gegeben. Die 4 Punkte $A_i B_i$ liegen also nunmehr nicht in derselben Ebene. Es sei e die durch A_1 und A_2 gehende Ebene, die zur Geraden $B_1 B_2$ parallel ist, ebenso e' die durch B_1 und B_2 gehende zu $A_1 A_2$ parallele Ebene. Die Pfeile $A_i B_i$ der ∞^2 Punkte von γ liegen dann so, daß die Punkte A_i die Ebene e, die B_i die Ebene e' erfüllen. Die Ebene e ist parallel zu γ und der dazu konjugiert komplexen Geraden $\bar{\gamma}$.

Die in e liegende Vertikalprojektion des zu einem komplexen Punkt P gehörigen Pfeils ist offenbar identisch mit dem Pfeil der Vertikalprojektion von P auf e. Liegen also die komplexen Punkte $[A_i B_i]$ auf γ und bedeutet A_i' die Vertikalprojektion von B_i auf e, so liegen die komplexen Punkte $[A_i A_i']$ auf der niederimaginären Geraden γ', in die sich γ projiziert. Mittels der gegebenen Punkte $A_1 A_1'$ und $A_2 A_2'$ konstruieren wir nach Nr. 10 den reellen Punkt O der Geraden γ', sowie den Fußpunkt P der von O auf e' gefällten Senkrechten. Die Gerade OP schneidet γ und $\bar{\gamma}$ senkrecht, und es ist $[OP]$ ihr auf γ liegender Fußpunkt. Sind ferner σ und σ' die beiden durch O gehenden Speere der durch γ' zu legenden Minimalebenen, τ und τ' die Speere, welche die durch γ gehenden Minimalebenen repräsentieren, so ist wegen des Parallelismus von γ und γ' offenbar σ zu τ und σ' zu τ' syntaktisch. Man konstruiert also τ und τ' nach Nr. 4 leicht mittels der Bemerkung, daß diese Speere irgend einem der Zyklen $[A_i B_i]$, z. B. auch dem Zyklus $[OP]$ angehören.

13. Ist die Verbindungslinie γ der Punkte $[A_i B_i]$ eine hochimaginäre Minimalgerade, so bleibt die Konstruktion der Ebenen e, e' sowie der Punkte O, P dieselbe, während die Speere τ, τ' mit einem der in die Gerade OP fallenden Speere koinzidieren.

Eine hochimaginäre Minimalgerade kann demnach durch einen Speer τ und einen auf ihm liegenden Pfeil OP vollständig charakterisiert werden; denn die Ebenen e und e' stehen auf τ bezw. in den Punkten O und P senkrecht, und man erhält zu dem auf e beliebig angenommenen Punkt A_i den zugehörigen B_i als Schnitt von e' mit einer zu τ parallelen Geraden (Nr. 5).

14. Nach dem Bisherigen besitzen zwei Zyklen $[A_1 B_1]$ und $[A_2 B_2]$ im allgemeinen zwei verschiedene gemeinsame Speere, deren Konstruktion aus dem in Nr. 10—12 Gesagten unmittelbar hervorgeht. Dann und nur dann, wenn die Punkte $[A_i B_i]$ auf einer Minimalgeraden liegen, ihre Entfernung also verschwindet, haben die beiden Zyklen einen einzigen doppelt zählenden Speer gemein.

Der Punkt B_2' sei so gewählt, daß die Pfeile $A_1 B_2'$ und $A_2 B_2$ gleich und gleichgerichtet seien. Damit dann die Punkte $[A_1 B_1]$ und $[A_2 B_2]$ die Entfernung Null haben, ist notwendig und hinreichend, daß die Strecken $A_1 A_2$ und $B_1 B_2'$ gleichlang und die sie enthaltenden Geraden rechtwinklig seien.[1])

15. Unter der „Mittelebene" zweier nicht paralleler Speere verstehen wir die reelle Ebene, welche durch die gemeinsame normale Sekante beider Speere geht und mit ihnen gleiche Winkel bildet, so zwar, daß die Vertikalprojektionen der Speere auf die genannte Ebene antitaktisch sind. Sind die Speere selber antitaktisch, so bezeichnen wir als ihre Mittelebene die zur Ebene beider Speere senkrechte und zu ihnen parallele Ebene, die von beiden denselben Abstand hat.

Offenbar ist die in Nr. 12 genannte Ebene e Mittelebene sowohl des Speerpaares $\sigma\sigma'$ als auch des Paares $\tau\tau'$. Wir wollen die komplexe Schnittlinie γ zweier Minimalebenen, die durch die Speere τ und τ' repräsentiert sind, kurz die Gerade $(\tau\tau')$ nennen; die Gerade $\bar{\gamma}$ wird dann durch das entgegengesetzte Speerpaar $(\bar{\tau}\bar{\tau}')$ definiert sein. Die Anfangspunkte A_i der zu den Punkten von γ gehörigen Pfeile liegen nach Nr. 10—12 auf der Mittelebene von τ und τ' und erfüllen dieselbe vollständig, falls diese Speere nicht antitaktisch sind. Zu jedem Punkt A_i erhält man den Punkt B_i nach Nr. 5 als Schnittpunkt gewisser zu τ und τ' paralleler Linien.

---

1) Weiteres über diese sog. „Minimallage" zweier Zyklen s. in meiner demnächst im Arch. f. Math. erscheinenden Note „Zur Geometrie der Kreise im Raum".

16. Die Resultate der vorigen Nr. liefern die Lösung der fundamentalen Aufgabe, den Pfeil $[AA']$ eines Zyklus zu konstruieren, wenn 3 Speere $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ desselben gegeben sind[1]), d. h. also den Schnittpunkt dreier gegebener Minimalebenen zu finden. Es genügt, das Zentrum A unseres Zyklus zu bestimmen; denn dann erhält man den Punkt A' als Schnittpunkt dreier Geraden, die zu den Speeren σ_i bezw. parallel sind (Nr. 5).

Im allgemeinen ist nun A Schnittpunkt der Mittelebenen der 3 Speerpaare $\sigma_i \sigma_k$. Dann und nur dann, wenn die 3 Speere derselben reellen Ebene e parallel sind, schneiden sich die 3 genannten Ebenen nach einer zu e senkrechten Geraden h. In diesem Falle sei P_i der Punkt, wo die durch h gehende auf σ_i senkrechte Ebene diesen Speer trifft; dann ist A der Schnittpunkt von h mit der Ebene $P_1 P_2 P_3$.

Auch die letztgenannte Konstruktion wird hinfällig, wenn die 3 Speere σ_i von derselben Geraden h senkrecht geschnitten werden. Wir bezeichnen dann mit M_i den Schnittpunkt von σ_i mit h, und denken uns die Gerade h orientiert, so daß die Strecken AM_i, $M_i M_k$ auch dem Vorzeichen nach bestimmt sind. Ist jetzt ϑ_i einer der Winkel, den die durch h gehende Äquatorebene des gesuchten Zyklus mit σ_i bildet, ferner r der (positive) Radius unseres Zyklus, so hat man:

$$AM_i = r \cos \vartheta_i \tag{6}$$

und mithin:

$$M_i M_k = r (\cos \vartheta_i - \cos \vartheta_k) \tag{7}$$

$$M_2 M_1 (\cos \vartheta_3 - \cos \vartheta_1) = M_3 M_1 (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1). \tag{8}$$

Diese letzte Gleichung liefert folgende Konstruktion: Sei e eine reelle Ebene, die auf h im Punkte M senktecht steht und σ_i' die Vertikalprojektion von σ_i auf e. Dann trage man von M aus auf σ_i' in der Richtung dieses Speeres den Punkt Q_i so auf, daß $MQ_i = 1$ wird, und lege in der Ebene e durch M eine Gerade l derart, daß das Verhältnis der Projektionen der Strecken $Q_2 Q_1$ und $Q_3 Q_1$ auf l gleich $M_2 M_1 : M_3 M_1$ wird. Diese letztere elementar-geometrische Konstruktion besitzt offenbar eine und nur eine Lösung. Die Ebene der Geraden h und l ist die Äquatorebene des gesuchten Zyklus, und man kennt nunmehr die absoluten

1) Die Annahme, daß zwei der Speere σ_i oder alle drei syntaktisch sind, führt auf uneigentliche Zyklen.

Beträge von $\cos\vartheta_i$ und $\cos\vartheta_i - \cos\vartheta_k$, kann also wegen (7) und (6), die (absolut genommenen) Strecken r und AM_i und damit A selbst konstruieren.

§ 2. Die komplexe Bewegung als Speertransformation.

17. Unter Zugrundelegung eines kartesischen Koordinatensystems xyz definieren die Formeln

$$(1)\qquad \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + a, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + b, \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + c, \end{aligned}$$

wobei die komplexen Zahlen $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ die bekannten beiden Gruppen von je 6 Relationen erfüllen, eine komplexe Bewegung, wenn die 3-reihige Determinante der Größen $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ den Wert $+1$ hat. Da die Transformation (1) jede Minimalebene wieder in eine solche überführt, so läßt sich jede komplexe Bewegung nach Nr. 2 als eine Transformation der Speere des R_3 deuten.

Die *reellen* Bewegungen sind dann innerhalb der Gruppe Γ_{12} aller komplexen Bewegungen dadurch charakterisiert, daß sie jedes Paar entgegengesetzter Speere wieder in ein solches verwandeln. Zwei antitaktische Speere gehen bei komplexer Bewegung im allgemeinen nicht wieder in antitaktische Speere über, dagegen entspricht einem Paar syntaktischer Speere stets wieder ein solches.

18. Die komplexe Translation

$$x' = x + a; \quad y' = y + b; \quad z' = z + c$$

heißt rein imaginär, wenn die a, b, c die Form ia', ib', ic' haben; sie führt den Koordinatenanfangspunkt O in den komplexen Punkt $[OO']$ über, wo O' den reellen Punkt mit den Koordinaten $a'b'c'$ bedeutet, ferner den komplexen Punkt $[AB]$ in den Punkt $[AB']$, wo B' dadurch bestimmt ist, daß der Pfeil BB' mit OO' nach Größe und Richtung übereinstimmt. Den Speer σ', in den ein gegebener Speer σ übergeht, erhält man nach Nr. 3 als den zu σ syntaktischen Speer des Zyklus $[BB']$, wenn B auf σ beliebig angenommen und B' wie soeben bestimmt wird.

19. Jede komplexe Translation $\mathfrak{T}$ läßt sich in der Form $TT' = T'T$ darstellen, wo T eine reelle, T' eine rein imaginäre Translation bedeutet. Führt jene den Punkt O in P, diese in $[OO']$ über, so erhält man den komplexen Punkt $[A'B']$, in den

der Punkt $[AB]$ vermöge $\mathfrak{T}$ verwandelt wird, indem man die reellen Punkte $A'B_1B'$ so wählt, daß der Pfeil AA' mit OP, $A'B_1$ mit AB, endlich B_1B' mit OO' nach Größe und Richtung übereinstimmt. Umgekehrt ergeben sich hieraus, falls $ABA'B'$ gegeben sind, sofort die Punkte P und O', d. h. also die Translation TT', die den Punkt $[AB]$ in $[A'B']$ verwandelt.

20. Ist Q der reelle Punkt, den die reelle Translation T in O überführt, und bedeuten $\sigma_1\sigma_2$ die beiden durch Q gehenden Speere des Zyklus $[OO']$, so bleiben alle zu σ_1 oder σ_2 syntaktischen Speere, und nur diese, bei der Translation $\mathfrak{T} = TT'$ einzeln invariant. Der uneigentliche Zyklus, der von diesen beiden Bündeln gebildet wird, gehört zu dem komplexen unendlich fernen Fixpunkt unserer Translation. Jedes andere Bündel syntaktischer Speere wird bei der Bewegung $\mathfrak{T}$ vermöge einer reellen Translation in sich verschoben.

Die Translation $\mathfrak{T}$ ist eine Minimaltranslation, d. h. zwei vermöge $\mathfrak{T}$ entsprechende Punkte $[AB]$ und $[A'B']$ haben die Entfernung null, wenn $\sphericalangle\, O'OP$ ein Rechter und $OP = OO'$ ist. Die beiden Bündel invarianter Speere koinzidieren dann in ein einziges.

21. Wir wenden uns zur Betrachtung der komplexen Bewegungen (Rotationen), die den Koordinatenanfangspunkt O festlassen.[1]) Die reelle Kugel mit dem Zentrum O und dem Radius 1 werde $\varkappa$ genannt. Die beiden Gleichungssysteme:

$$(1) \qquad x + iy = \lambda(1 + z); \quad 1 - z = \lambda(x - iy);$$

$$(2) \qquad x - iy = \mu(1 + z); \quad 1 - z = \mu(x + iy)$$

definieren die beiden auf $\varkappa$ liegenden Systeme von Minimalgeraden; wir unterscheiden sie als „erstes" und „zweites" System. Vermöge dieser Gleichungen lassen sich die Koordinaten $x\,y\,z$ jedes Kugelpunkts P rational durch λ und μ ausdrücken; λ heißt der erste, μ der zweite Parameter des Punktes P. Ist dieser reell, so hat man $\mu = \overline{\lambda}$ und umgekehrt.

Jeder durch O gehende Speer σ schneidet $\varkappa$ in 2 diametral entgegengesetzten Punkten, dem „Austrittspunkt" P und dem „Eintrittspunkt" P_0; wir bezeichnen σ auch als den „Speer OP". Die zugehörige Minimalebene schneidet aus $\varkappa$ die durch P gehende

1) Vgl. hierüber auch E. Study: Über Nicht-euklidische und Liniengeometrie.

Minimalgerade des ersten und die durch P_0 gehende Minimalgerade des zweiten Systems aus. Die Koordinaten $\xi\eta\zeta$ des Austrittspunktes P hängen mit den Koordinaten p_{ik}, π bzw. u, v, w, o des Speers σ durch die Gleichungen

(3) $$u : v : w = i\xi + \eta\zeta : \xi\zeta - i\eta : \zeta^2 - 1;$$

(4) $$\xi = \frac{p_{41}}{\pi}; \quad \eta = \frac{p_{42}}{\pi}; \quad \zeta = \frac{p_{43}}{\pi}$$

zusammen, während die Parameter λ, μ des Punktes P durch die Formeln

(5) $$\lambda = \frac{iu - v}{w} = \frac{w}{u + iv} = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} = \frac{1 + \zeta}{\xi - i\eta} = \bar{\mu}$$

definiert sind.

22. Wir betrachten eine komplexe Bewegung $\mathfrak{B}$, die den Punkt O fest läßt, als eine gewisse Kollineation der Kugel $\varkappa$ in sich, bei der jedes Erzeugendensystem von $\varkappa$ in sich transformiert wird. Geht also der Speer OP vermöge $\mathfrak{B}$ in $O\Pi$ über, so hängen die ersten Parameter λ, Λ der Kugelpunkte P, Π durch eine Gleichung der Form

(6) $$\Lambda = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$$

zusammen, wo die $\alpha\beta\gamma\delta$ komplexe Konstante bedeuten, die der Ungleichung

(7) $$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 1$$

genügen; P und Π sind also entsprechende Punkte einer Kreisverwandtschaft V. Der zu P diametrale Kugelpunkt Q verwandele sich vermöge V in Q', und es sei Π' der dem Punkte Q' diametral entgegengesetzte Punkt von $\varkappa$. Bezeichnet man dann mit μ, M die zweiten Parameter der Punkte P und Π', so besteht die Gleichung:

(6') $$M = \frac{\delta\mu - \gamma}{-\beta\mu + \alpha}.$$

Die durch P gehende Kugelerzeugende des ersten bezw. zweiten Systems geht also bei unserer komplexen Rotation über in die durch Π gehende Erzeugende des ersten bezw. die durch Π' gehende Erzeugende des zweiten Systems, m. a. W.: Die Formeln (6), (6') definieren zusammen die der Bewegung $\mathfrak{B}$ entsprechende Kollineation der Kugel $\varkappa$ in sich. Sind umgekehrt die 4 komplexen Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ der Bedingung (7) entsprechend gegeben, so definieren die Formeln (6), (6') eine Kollineation der Kugel $\varkappa$ in sich, welche

als Raumtransformation gedeutet jede durch O gehende Minimalebene in eine ebensolche, also den unendlich fernen Kugelkreis in sich überführt und demnach mit einer komplexen Bewegung $\mathfrak{B}$ identisch ist.

Sind F, G die Fixpunkte der Kreisverwandtschaft V, und bezeichnet man mit σ, τ die Speere OF, OG, so ist die komplexe Achse der Rotation $\mathfrak{B}$ die Gerade (σ, τ) (vgl. Nr. 15). Für den komplexen Drehwinkel findet man leicht

$$\cos\omega = 1 + \frac{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}{2(\alpha\delta - \beta\gamma)},$$

und es ist ω gleich dem mit $-i$ multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, das die Punkte FG mit irgendeinem Paar von Punkten P, Π bilden, die sich vermöge V entsprechen.

23. Die Gruppe Γ_6 der komplexen Bewegungen, die den Punkt O fest lassen, ist nach dem Vorigen den direkten Kreisverwandtschaften auf der Kugel $\varkappa$ umkehrbar eindeutig zugewiesen.[1]) Es gibt also eine und nur eine Bewegung $\mathfrak{B}$, die 3 gegebene durch O gehende Speere σ_i bezw. in 3 ebensolche Speere σ_i' überführt. Sind P_i, P_i' die Austrittspunkte dieser Speere aus $\varkappa$, so findet man den Speer σ_4' oder OP_4', der einem beliebigen durch O gehenden Speer σ_4 vermöge $\mathfrak{B}$ entspricht, indem man nach Möbius in der Kreisverwandtschaft V, in der sich die 3 Punktepaare $P_i P_i'$ zugeordnet sind, zu P_4 den entsprechenden Punkt P_4' konstruiert.

24. Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise von Nr. 22 entspricht bei der vorhin genannten komplexen Bewegung $\mathfrak{B}$ einem reellen Punkt P von $\varkappa$ ein komplexer Punkt, dessen Äquatorkreis π die Kugel $\varkappa$ in den Punkten Π, Π' senkrecht schneidet. Dabei ist Π als „Austritts-", Π' als „Eintrittspunkt" des orientierten Kreises π zu bezeichnen; dieser wird nämlich im Punkt Π von dem Speere $O\Pi$, in Π' von dem Speere OQ' (oder $\Pi' O$) berührt.

25. Man findet ebenso den komplexen Punkt, in den ein beliebiger reeller Raumpunkt A vermöge $\mathfrak{B}$ verwandelt wird, indem man die analoge Konstruktion auf die zu $\varkappa$ konzentrische durch A gehende Kugel anwendet.

Es ist nunmehr leicht, den Speer σ' zu konstruieren, in den die Bewegung $\mathfrak{B}$ einen gegebenen Speer σ überführt. Legt man

1) Vgl. Study a. a. O.

nämlich durch O den zu σ syntaktischen Speer τ, und ist τ' der Speer, in den τ vermöge $\mathfrak{B}$ übergeht, so ist σ' der zu τ' syntaktische Speer des Zyklus, in den irgend einer der reellen Punkte von σ durch die Bewegung $\mathfrak{B}$ transformiert wird.

26. Eine komplexe Rotation $\mathfrak{R}$, die den komplexen Punkt $[AA']$ festläßt, ist bestimmt, wenn zu 3 Speeren $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ des Zyklus $[AA']$ die entsprechenden $\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3'$ bekannt sind. Verwandeln sich bei der Translation $\mathfrak{T}$, die den Punkt $[AA']$ nach O bringt, die Speere $\sigma_i\sigma_i'$ bezw. in die durch O gehenden Speere $\tau_i\tau_i'$, und ist $\mathfrak{R}'$ die Rotation um O, welche die τ_i in die τ_i' überführt, so erhält man zu einem beliebigen Speer σ_4 den ihm vermöge $\mathfrak{R}$ entsprechenden leicht aus der Beziehung

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{T}\mathfrak{R}'\mathfrak{T}^{-1}.$$

27. Es gibt eine und nur eine komplexe Bewegung $\mathfrak{B}$, die 3 gegebene Speere σ_i, von denen keine zwei syntaktisch sind, in drei ebensolche σ_i' überführt. Der Beweis hierfür und zugleich die Konstruktion des Speeres σ_4', der einem beliebig gegebenen Speer σ_4 vermöge $\mathfrak{B}$ entspricht, ergibt sich, indem man zunächst die Pfeile $[AB]$ und $[A'B']$ der durch die Tripel σ_i und σ_i' definierten Zyklen ermittelt (Nr. 16). Vermöge der Translation $\mathfrak{T}$, die den Punkt $[AB]$ in $[A'B']$ überführt, verwandele sich der Speer σ_i in σ_i''. Die Rotation $\mathfrak{R}$, die das Tripel $\sigma_1''\sigma_2''\sigma_3''$ in $\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3'$ überführt (Nr. 26), bringt dann den Speer σ_4'' in die gesuchte Lage σ_4' und es ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}\mathfrak{R}$.

28. Da jede direkte reelle Kreisverwandtschaft auf der Kugel $\varkappa$ zwei reelle Fixpunkte besitzt, die im besonderen koinzidieren können, so läßt jede komplexe Rotation i. a. zwei verschiedene Speere σ, τ fest, und die Gerade (σ, τ) ist die Rotationsachse. Zu jeder komplexen Bewegung $\mathfrak{B}$, die keine Translation ist, gibt es also i. a. zwei und nur zwei verschiedene Bündel syntaktischer Speere, die vermöge $\mathfrak{B}$ invariant bleiben; koinzidieren diese Bündel in eines, so nennen wir die Bewegung $\mathfrak{B}$ *parabolisch*.

29. Bezüglich der Fixspeere einer beliebigen Bewegung $\mathfrak{B}$, also der bei $\mathfrak{B}$ festbleibenden Minimalebenen, fließen aus den bekannten Eigenschaften des Koeffizientensystems $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ (Nr. 17) leicht folgende Tatsachen:

Damit die Bewegung $\mathfrak{B}$ parabolisch sei, ist notwendig und hinreichend, daß man habe:

$$(9) \qquad \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 3,$$

ohne daß die Zahlen α_1, β_2, γ_3 alle drei gleich 1 sind. Diese letztere Annahme ist für die Translation charakteristisch. Jede parabolische Bewegung läßt ein und nur ein Bündel β syntaktischer Speere, aber im allgemeinen keinen Speer invariant („parabolische Bewegung erster Art"), da sie das Bündel β translatorisch in sich verschiebt. Es gibt ∞^8 solcher parabolischer Bewegungen, die ein gegebenes Bündel β in sich transformieren.

Im besonderen kann eine parabolische Bewegung jeden Speer eines syntaktischen Bündels stehen lassen („parabolische Bewegung zweiter Art"). Jedes Bündel β bleibt bei ∞^6 Bewegungen dieser Art ungeändert.

Umgekehrt ist jede Bewegung, die ein Bündel syntaktischer Speere translatorisch in sich verschiebt, entweder eine Translation oder eine parabolische Bewegung erster Art, ferner jede Bewegung, die die Speere eines syntaktischen Bündels einzeln festläßt, entweder eine Translation oder eine parabolische Bewegung zweiter Art.

30. Jede Bewegung $\mathfrak{B}$, die der Bedingung (8) nicht genügt, besitzt zwei verschiedene invariante Bündel syntaktischer Speere und innerhalb eines jeden derselben je einen Fixspeer σ bezw. τ. Die komplexe Gerade (σ, τ) ist die „Schraubungsachse" der Bewegung. Die Speere jedes der beiden Bündel werden durch je eine direkte Ähnlichkeitstransformation $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{A}'$ unter sich vertauscht; d. h. entspricht vermöge $\mathfrak{B}$ dem zu σ syntaktischen Speer σ_i der Speer σ_i' und dem zu τ syntaktischen Speer τ_i der Speer τ_i', so sind die Paralleldreikante $\sigma\sigma_i\sigma_i'$ alle unter sich direkt ähnlich, und gleiches gilt von den Dreikanten $\tau\tau_i'\tau_i$. Überdies sind diese letzteren Dreikante den ersteren direkt ähnlich, d. h. die Ähnlichkeitstransformationen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ sind *invers*.

Aus diesen Bemerkungen folgt leicht die Konstruktion der Fixspeere einer Bewegung, die wie in Nr. 27 definiert ist.

31. Es gibt ∞^2 komplexe Bewegungen, die zwei gegebene Bündel syntaktischer Speere vermöge gegebener direkter Ähnlichkeitstransformationen $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{-1}$ in sich transformieren; m. a. W. es existieren ∞^2 Bewegungen, die 2 gegebene Speere σ, τ festlassen und einen gegebenen zu σ syntaktischen Speer σ_1 in einen ebensolchen σ_1' verwandeln. Unter diesen Bewegungen befindet sich eine Rotation $\mathfrak{R}$, und alle übrigen haben die Form: $\mathfrak{R}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{R}$, wo $\mathfrak{T}$ irgendeine der ∞^2 komplexen Translationen bedeutet, die die Speere beider Bündel einzeln festlassen.

32. Um die Rotation $\mathfrak{R}$ aus den Daten der vor. Nr. zu konstruieren, stellen wir $\mathfrak{R}$ in der Form $\mathfrak{T}\mathfrak{R}'\mathfrak{T}^{-1}$ dar, wo $\mathfrak{T}$ irgend eine Translation, die σ und τ in zwei durch O gehende Speere verwandelt, also $\mathfrak{R}'$ eine Rotation um O bedeutet. Die Aufgabe ist dann auf die folgende zurückgeführt: Von einer Rotation $\mathfrak{R}$, die den Koordinatenanfang O fest läßt, kennt man die beiden Fixspeere σ, τ und die Ähnlichkeitstransformationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{-1}$, durch welche die zu σ und τ syntaktischen Speere unter sich vertauscht werden; man sucht die direkte Kreisverwandtschaft V, welche der Rotation $\mathfrak{R}$ auf der Kugelfläche $\varkappa$ entspricht.

Zur Lösung dieser Aufgabe dient folgende Tatsache: Es gibt auf $\varkappa$ stets zwei und nur zwei diametrale Punkte $P_1 P_2$, die von einer gegebenen Kreisverwandtschaft V wieder in zwei diametrale Punkte $\Pi_1 \Pi_2$ verwandelt werden; P_1 und P_2 sind die Fixpunkte der direkten Kreisverwandtschaft

$$CVCV^{-1},$$

wo C die indirekte Kreisverwandtschaft bedeutet, die jeden Kugelpunkt in den diametralen verwandelt. Die Punkte $P_1 P_2$ sind zu den Punkten $\Pi_1 \Pi_2$ symmetrisch hinsichtlich der Mittelebene e der beiden Speere σ, τ. Indem man nun jedem zu σ syntaktischen Speer seinen Schnittpunkt mit e zuordnet, entspricht der Ähnlichkeitstransformation $\mathfrak{A}$ eine gleichfalls mit $\mathfrak{A}$ zu bezeichnende Ähnlichkeitstransformation der Ebene e in sich. Ist g die in e liegende Gerade, welche durch O geht und σ und τ senkrecht schneidet, so gibt es auf e unendlich viele Punktepaare PP' derart, daß P' dem Punkte P vermöge $\mathfrak{A}$ zugeordnet ist und die Verbindungslinie PP' auf g senkrecht steht. Der Ort von P bezw. P' ist je eine durch O gehende Gerade h bezw. h'. Die Ebenen (h, σ) und (h', τ) schneiden sich dann in der Geraden $P_1 P_2$. Die Kreisverwandtschaft V ist jetzt mehr als bestimmt, denn man kennt von ihr die Fixpunkte (d. i. die Austrittspunkte der Speere σ, τ) und die beiden Paare entsprechender Punkte $P_i \Pi_i$.

33. Wenn die Speere σ, τ entgegengesetzt sind, so wird die vorige Konstruktion hinfällig, da jetzt die Punkte P_1 und Π_1 in den Austrittspunkt von σ, P_2 und Π_2 in den von τ koinzidieren. Es liegt dann eine komplexe Rotation $\mathfrak{R}$ mit reeller Achse vor. Es bedeute nunmehr e die durch O gehende zu σ und τ senkrechte Ebene. Indem man jedem zu σ oder τ syntaktischen Speer seinen Durchstoßpunkt mit e entsprechen läßt, bestimmen die

gegebenen Ähnlichkeitstransformationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zwei Ähnlichkeitstransformationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ der Ebene e in sich. Wird der Punkt P_i vermöge $\mathfrak{A}$ in P_i', vermöge $\mathfrak{A}'$ in P_i'' verwandelt, so sind die Dreiecke OP_iP_i' alle unter sich direkt und den Dreiecken $OP_i''P_i$ invers ähnlich, sodaß also die Punktepaare $P_i'P_i''$ auf je einer durch O gehenden Geraden liegen. Dem reellen Punkt P_i entspricht vermöge $\mathfrak{R}$ der Zyklus, dessen Äquator die Ebene e in den Punkten P_i' und P_i'' senkrecht schneidet und so orientiert ist, daß seine Tangente in P_i' zu σ, in P_i'' zu τ syntaktisch ist. Analoges gilt natürlich für jede zur Rotationsachse senkrechte Ebene, sodaß der komplexe Punkt, in den ein gegebener reeller Punkt vermöge $\mathfrak{R}$ übergeht, sofort konstruiert werden kann.

Um jetzt zu einem beliebigen Speer s den ihm vermöge $\mathfrak{R}$ entsprechenden s' zu konstruieren, wähle man auf s zwei reelle Punkte und ermittele die ihnen entsprechenden Zyklen, sowie deren gemeinsame Speere s', t' (Nr. 14); unter diesen ist der gesuchte s' dadurch kenntlich, daß er auch dem durch s, σ, τ bestimmten Zyklus angehört.

34. Sind zwei Speertripel $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ und $\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3'$ gegeben, sodaß σ_1 zu σ_2 und σ_1' zu σ_2' syntaktisch sind, so existieren ∞^2 Bewegungen $\mathfrak{B}$, die σ_i bezw. in die σ_i' verwandeln. Ist nämlich $\mathfrak{R}$ irgend eine der Rotationen, welche die Speere σ_i in drei bezw. zu $\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3'$ syntaktische Speere $\sigma_1''\sigma_2''\sigma_3''$ überführt, so gibt es innerhalb des Speerbündels β, das σ_1' und σ_2' enthält, eine und nur eine direkte Ähnlichkeitstransformation, die σ_1'' in σ_1' und σ_2'' in σ_2' verwandelt; die dazu inverse Ähnlichkeitstransformation, welche das zu σ_3'' syntaktische Bündel γ in sich transformiert und dabei σ_3'' in die Lage σ_3' bringt, ist dann vollständig bestimmt. Nach Nr. 31 existiert also eine Rotation $\mathfrak{R}'$, vermöge deren die σ_i'' in die σ_i' übergehen, und jene ∞^2 Bewegungen $\mathfrak{B}$ sind alle von der Form $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'\mathfrak{T}$, wo $\mathfrak{T}$ eine der ∞^2 Translationen bedeutet, die die Speere der Bündel β und γ einzeln fest lassen. Für den Fall, daß die Schnittfigur der 4 Speere $\sigma_1''\sigma_2''\sigma_1'\sigma_2'$ mit einer beliebigen Ebene ein Parallelogramm bildet, ist statt $\mathfrak{R}'$ eine leicht zu ermittelnde komplexe Translation zu wählen.

Sind die drei Speere $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ und ebenso $\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3'$ syntaktisch, so ist die Überführung des ersten Tripels in das zweite dann und nur dann möglich, wenn die beiden Dreikante σ_i und σ_i' direkt ähnlich sind; es gibt in diesem Falle ∞^6 Bewegungen, die diese Überführung leisten.

§ 3. Die Quadrupelinvarianten.

35. Ein Quadrupel von Speeren $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$, von denen keine zwei syntaktisch sind, besitzt gegenüber der Γ_{12} aller komplexen Bewegungen offenbar genau vier unabhängige reelle oder zwei unabhängige komplexe (absolute) Invarianten. Ist τ_k der durch den Koordinatenanfangspunkt gehende, zu σ_k syntaktische Speer, P_k sein Austrittspunkt aus der Einheitskugel $\varkappa$, so kann als die eine der beiden obigen komplexen Invarianten eines der Doppelverhältnisse der 4 Kugelpunkte P_k genommen werden. Wir bezeichnen mit $\xi_k\eta_k\zeta_k$ die Koordinaten des Punktes P_k und mit λ_k seinen ersten Parameter, sodaß also

$$\lambda_k = \frac{\xi_k + i\eta_k}{1+\zeta_k} = \frac{1-\zeta_k}{\xi_k - i\eta_k} \qquad (k = 1, 2, 3, 4),$$

und schreiben:

$$(klpq) = \frac{\lambda_l - \lambda_k}{\lambda_l - \lambda_p} : \frac{\lambda_q - \lambda_k}{\lambda_q - \lambda_p};$$

$$\delta_0 = (1234); \quad \delta_1 = (2314); \quad \delta_2 = (3124).$$

Wir setzen ferner die Koordinaten $u_k v_k w_k$ des Speeres τ_k bezw. gleich den Ausdrücken

$$\xi_k\zeta_k - i\eta_k; \quad i\xi_k + \eta_k\zeta_k; \quad \zeta_k^2 - 1$$

und schreiben zur Abkürzung:

$$[kl] = u_k u_l + v_k v_l + w_k w_l;$$

dann besteht die Beziehung

$$\sqrt{[kl]} = 2i\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\bar\lambda_k}\sqrt{\bar\lambda_l}\,(\lambda_l - \lambda_k)}{(1+\lambda_k\bar\lambda_k)(1+\lambda_l\bar\lambda_l)},$$

womit zugleich das Symbol $\sqrt{[kl]}$ unzweideutig erklärt ist, wenn man auf der rechten Seite unter $\sqrt{\bar\lambda_k}$ eine bestimmte unter den beiden komplexen Zahlen versteht, deren Quadrat gleich $\bar\lambda_k$ ist. Setzt man noch

$$p_0 = \sqrt{[13]}\sqrt{[42]}; \quad p_1 = \sqrt{[12]}\sqrt{[34]}; \quad p_2 = \sqrt{[23]}\sqrt{[14]},$$

so gelten die Beziehungen:

$$p_0 + p_1 + p_2 = 0,$$

$$-\delta_0 = \frac{p_1}{p_2}; \quad -\delta_1 = \frac{p_2}{p_0}; \quad -\delta_2 = \frac{p_0}{p_1}.$$

Diese 3 Doppelverhältnisse lassen sich sonach in bekannter Weise durch eines derselben ausdrücken. Der absolute Betrag der Zahl δ_h ist gleich dem entsprechenden Doppelverhältnis der absolut genommenen Strecken $P_k P_l$, ihr Arcus gleich einem der Möbiusschen Doppelwinkel des sphärischen Vierecks $P_1 P_2 P_3 P_4$. Die Zahlen δ_h sowie die durch sie definierten reellen Doppelverhältnisse und Doppelwinkel nennen wir die *Richtungsinvarianten* des Speerquadrupels σ_k.

36. Bezeichnet man mit M_0, M_1, M_2 bezw. die Momente der drei komplexen Geradenpaare (Nr. 15):

$$(\sigma_1, \sigma_3),\ (\sigma_4, \sigma_2);\quad (\sigma_1, \sigma_2),\ (\sigma_3, \sigma_4);\quad (\sigma_1, \sigma_4),\ (\sigma_2, \sigma_3);$$

mit Δ die aus den Koordinaten $u_k v_k w_k \varpi_k$ der 4 Speere gebildete vierzeilige Determinante, so findet man

$$M_h = \frac{\Delta}{p_h^2}.$$

Offenbar bildet jede der Zahlen δ_h mit irgend einer der Größen M_h zusammen das volle Invariantensystem des Speerquadrupels $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ gegenüber unserer Γ_{12}. Es handelt sich darum, wie vorhin die δ_h so auch die M_h durch reell konstruierbare geometrische Größen zu ersetzen.

37. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit P_h^k den auf σ_h liegenden Fußpunkt der kürzesten Entfernung zwischen den Speeren σ_h und σ_k; haben diese Speere einen Punkt gemein, so koinzidieren die Punkte P_h^k und P_k^h in den Schnittpunkt. Ferner verstehen wir unter d_h^{kl} die Strecke $P_h^k P_h^l$, und es sei $d_h^{kl} \gtrless 0$, je nachdem die von P_h^k nach P_h^l weisende Richtung mit der des Speeres σ_h übereinstimmt oder nicht. Endlich setzen wir:

$$\{hklm\} = d_k^{hl} - d_l^{km} + d_m^{lh} - d_h^{mk}.$$

Da dieser Ausdruck, den wir eine „Doppeldifferenz" unseres Speerquadrupels nennen wollen, offenbar sein Zeichen wechselt, wenn man die Indices $hklm$ zyklisch vertauscht oder in umgekehrter Reihenfolge anschreibt, so reduzieren sich die 24 Doppeldifferenzen, vom Zeichen abgesehen, auf die folgenden 3 verschiedenen:

$$D_0 = \{1234\};\quad D_1 = \{2314\};\quad D_2 = \{3124\},$$

die ihrerseits durch die Relation

$$D_0 + D_1 + D_2 = 0$$

verknüpft sind.

Die geometrische Definition der Doppeldifferenz ist auch anwendbar, wenn das Quadrupel ein oder zwei Paare antitaktischer Speere enthält. Denn ist z. B. σ_1 zu σ_2 antitaktisch, so verstehe man unter P_1^2 irgend einen Punkt von σ_1, unter P_2^1 seine Vertikalprojektion auf σ_2; dann wird der Ausdruck D_0 offenbar von der Wahl des Punktes P_1^2 ganz unabhängig.

38. Die Doppeldifferenzen des Speerquadrupels hängen mit den komplexen Momenten M_h durch folgende Relationen zusammen:

$$(1)\quad \begin{cases} D_h = -\dfrac{i}{2}\left(\dfrac{p_h^2}{p_0 p_1 p_2} M_h - \dfrac{\bar{p}_h^2}{\bar{p}_0 \bar{p}_1 \bar{p}_2} \bar{M}_h\right) \\ \quad = -\dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\Delta p_h}{p_0 p_1 p_2} - \dfrac{\bar{\Delta} \bar{p}_h}{\bar{p}_0 \bar{p}_1 \bar{p}_2}\right) \end{cases} \qquad (h = 0, 1, 2).$$

Diese Relationen lassen sich nach Δ und $\bar{\Delta}$ auflösen, d. h. die Momente M_h können als lineare homogene Ausdrücke der Größen $D_0 D_1 D_2$ dargestellt werden, deren Koeffizienten Richtungsinvarianten sind. Eine Ausnahme findet nur in dem Falle statt, daß die Gleichungen bestehen

$$\frac{p_0}{\bar{p}_0} = \frac{p_1}{\bar{p}_1} = \frac{p_2}{\bar{p}_2},$$

von denen jede die andere zur Folge hat und die ausdrücken, daß eines der drei Doppelverhältnisse δ_h und infolge dessen alle drei reell sind, also die 4 auf der Einheitskugel $\varkappa$ liegenden Austrittspunkte P_k der durch O zu den σ_k syntaktisch gezogenen Speere τ_k demselben Kugelkreise angehöreu. Bezeichnen wir in diesem letzteren Falle das Quadrupel σ_k als „speziell", so können wir sagen:

Für ein allgemeines Quadrupel von Speeren wird das volle System absoluter Invarianten gegenüber der Gruppe Γ_{12} aller komplexen Bewegungen durch irgend zwei von den Möbiusschen Doppelverhältnissen und Doppelwinkeln des sphärischen Vierecks $P_1 P_2 P_3 P_4$ und durch irgend zwei der Doppeldifferenzen $D_0 D_1 D_2$ dargestellt.

39. Wir betrachten jetzt ein spezielles Speerquadrupel $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ und nehmen zunächst an, daß der Kugelkreis K, der die vier Punkte P_k enthält, kein Großkreis sei, d. h. daß die 4 Speere σ_k nicht zu ein und derselben reellen Ebene parallel laufen. Es bedeute P das auf der kleineren Kalotte von $\varkappa$ liegende sphärische Zentrum des Kreises K, ζ den Kosinus des sphärischen Radius von K, σ den Speer OP, e irgend eine zu σ senkrechte reelle Ebene, Q_k ihren Durchstoßpunkt mit dem Speer σ_k, σ_k' die

Vertikalprojektion von σ_k auf die Ebene e, endlich σ_k'' den in e liegenden, durch Q_k gehenden und zu σ_k' senkrechten Speer, dessen Richtung so gewählt ist, daß die Aufeinanderfolge der 3 Speere $\sigma_k' \sigma_k'' \sigma$ dem Koordinatenkreuz XYZ analog orientiert erscheint. Zerlegt man dann das komplexe Moment M_h in seinen reellen und imaginären Bestandteil:

$$M_h = M_h'' + i M_h',$$

und bezeichnet mit D_h' bezw. D_h'' die den D_h analog gebildeten Doppeldifferenzen der beiden Speerquadrupel $\sigma_1' \sigma_2' \sigma_3' \sigma_4'$ und $\sigma_1'' \sigma_2'' \sigma_3'' \sigma_4''$, so findet man leicht die Beziehungen:

$$(2) \qquad M_h' = (1 - \zeta^2)^{-2} \frac{p_0 p_1 p_2}{p_h^2} D_h' = \frac{p_0 p_1 p_2}{p_h^2} D_h$$

$$(3) \qquad M_h'' = \zeta (1 - \zeta^2)^{-2} \frac{p_0 p_1 p_2}{p_h^2} D_h''$$

$$D_0 : D_1 : D_2 = D_0' : D_1' : D_2' = D_0'' : D_1'' : D_2'' = p_0 : p_1 : p_2 .$$

Für ein spezielles Quadrupel von Speeren, die nicht derselben reellen Ebene parallel sind, besteht also das volle System absoluter Invarianten aus irgend einem der drei reellen Doppelverhältnisse δ_h und einem der 3 Zahlenpaare:

$$\zeta (1 - \zeta^2)^{-2} D_h''; \quad D_h = (1 - \zeta^2)^{-2} D_h' .$$

40. Diese reell-geometrische Deutung der Invarianten eines speziellen Quadrupels versagt dann und nur dann, wenn die 4 Speere σ_k derselben reellen Ebene e parallel sind. Ist jetzt ϱ_k die zu e parallele durch σ_k gehende Ebene, Q_k ihr Durchstoßpunkt mit irgend einem zu e senkrechten Speer σ, so wird $D_h' = D_h$ und an Stelle von (3) tritt die Gleichung

$$M_0'' = \frac{H}{2 \sin^2 \frac{(13)}{2} \cdot \sin^2 \frac{(24)}{2}},$$

sowie die durch zyklische Vertauschung von 1, 2, 3 hieraus hervorgehenden Relationen für M_1'' und M_2''. Hierin bedeutet H den Ausdruck:

$$H = \sum (-1)^{k+l+1} Q_k Q_l \sin (pq);$$

$Q_k Q_l$ ist eine positive oder negative Strecke, je nachdem die von Q_k nach Q_l weisende Richtung mit der von σ übereinstimmt oder nicht; ferner soll $\sin (pq)$ den positiven oder negativen Sinus des Winkels der Speere σ_p und σ_q bedeuten, je nachdem die 3 Speere

$\sigma_p \sigma_q \sigma$ dem Koordinatensystem analog orientiert sind oder nicht. Die Indices $klpq$ stellen jedesmal eine Permutation der Ziffern 1 2 3 4 vor, und die Summe erstreckt sich auf 6 Glieder, indem jedes der Paare kl und pq die 6 Annahmen

$$12, \; 13, \; 14, \; 23, \; 34, \; 42$$

durchläuft.

Damit sind für 4 Speere σ_k, von denen keine zwei syntaktisch sind, die absoluten Invarianten gegenüber der Gruppe Γ_{12} in allen Fällen durch Größen von geometrisch einfacher Bedeutung dargestellt.

41. Aus diesen Resultaten folgt nebenbei: Gehören 4 Speere demselben Zyklus an, so verschwinden alle ihre Doppeldifferenzen. Dieser Satz ist umkehrbar, wenn das Quadrupel nicht speziell ist; in diesem letzteren Falle gehören die 4 Speere dann und nur dann demselben Zyklus an, wenn außer den Doppeldifferenzen D_k (und D_k') auch noch die oben definierten Doppeldifferenzen D_k'' (bezw., falls die σ_k derselben Ebene parallel sind, der Ausdruck H) verschwinden. Ferner folgt: Damit 4 Speere σ_k durch komplexe Bewegung in 4 Speere derselben reellen Ebene überführbar seien, ist notwendig und hinreichend, daß das Quadrupel speziell sei und die Doppeldifferenzen D_k'' (bezw. der Ausdruck H) verschwinden.[1])

42. Vier Speere σ_k, von denen zwei, etwa σ_1 und σ_2, syntaktisch sind, besitzen gegenüber der Gruppe Γ_{12} bloß noch 2 un-

---

1) Diejenige Untergruppe Γ_6 unserer Γ_{12}, welche die Speere einer reellen Ebene e unter sich vertauscht, ist auch Untergruppe der Lieschen Γ_{10} reeller Berührungstransformationen, die alle Kreise in Kreise überführen. Diese Speertransformationen der Ebene e hat É. Laguerre (Recherches sur la Géométrie de Direction, Paris 1885) unter dem Namen „transformations par directions réciproques" studiert, ohne jedoch obigen Zusammenhang zu erkennen. (Vgl. hierüber C. Stephanos, Par. C. R. 92, p. 1195 (1881)). Die erzeugende Transformation Laguerres ist einfach die Spiegelung an der komplexen Ebene

$$\alpha x + \beta y + i \gamma z + \delta = 0,$$

worin $\alpha \beta \gamma \delta$ reelle Zahlen bedeuten und die Ebene e als xy-Ebene gewählt ist. Vier Speere σ_k der Ebene e besitzen gegenüber dieser Laguerreschen Γ_6 zwei Invarianten, nämlich eines der 3 reellen Zahlenpaare (δ_h, D_h). Die Invariante D_0 bezeichnet Laguerre als „longitude" des Quadrupels $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ (Bull. Soc. Math. 8, 200 (1880)).

abhängige reelle, also eine komplexe Invariante, für die man den Ausdruck

$$M = M_0 = M_2 = \frac{\Delta}{[13][24]}$$

wählen kann, während das komplexe Moment M_1 illusorisch wird. Setzen wir ferner

$$M = M' + iM'',$$

so wird die Doppeldifferenz D_1 gleich $-M''$, dagegen D_0 und D_2 unbestimmt. Es seien wie früher $P_1 P_3 P_4$ die auf der Kugel $\varkappa$ gelegenen Austrittspunkte der Speere, die durch O zu $\sigma_1 \sigma_3 \sigma_4$ syntaktisch gezogen werden, ferner P ein reeller Punkt auf σ_1, P' seine Vertikalprojektion auf σ_2. Zieht man durch den Kugelpunkt P_1 zu dem Speer PP' einen syntaktischen Speer, so berührt dieser die Kugel $\varkappa$ in P_1, bestimmt also einen zu dem Punkte P_1 unendlich benachbarten Punkt P_2 der Kugelfläche $\varkappa$. Dann ist der Arcus der komplexen Invariante M gleich einem der Möbiusschen Doppelwinkel des sphärischen Vierecks $P_1 P_2 P_3 P_4$.

Wir betrachten weiterhin den Fall, daß σ_1 zu σ_2 und ebenso σ_3 zu σ_4 syntaktisch ist. Da es ∞^{12} solcher Quadrupel gibt und jedes derselben ∞^2 komplexe Bewegungen (Translationen) gestattet, so existieren auch in diesem Falle 2 unabhängige reelle, also eine komplexe Invariante, für die wir unter der Annahme daß die Zahlen $u_1 v_1 w_1$ bezw. *gleich* $u_2 v_2 w_2$ und $u_3 v_3 w_3$ gleich $u_4 v_4 w_4$ sind, den Ausdruck

$$J = \frac{(\varpi_2 - \varpi_1)(\varpi_4 - \varpi_3)}{[13]}$$

wählen können. Bezeichnet d den Abstand der Speere $\sigma_1 \sigma_2$, d' den der Speere $\sigma_3 \sigma_4$, ω den Winkel der beiden Richtungen σ_1 und σ_3, so findet man für den absoluten Betrag von J den Wert

$$|J| = \sqrt{\frac{dd'}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \cos\omega}.$$

Haben die auf der Kugel $\varkappa$ liegenden Punkte P_1, P_3 die oben erklärte Bedeutung und sind P, Q beliebige Punkte auf σ_1 bezw. σ_3, P', Q' ihre Vertikalprojektionen auf σ_2 bezw. σ_4, bestimmt man ferner auf der Kugelfläche $\varkappa$ die zu P_1 bezw. P_3 unendlich benachbarten Punkte P_2 bezw. P_4 so, daß die Speere $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ zu den Speeren PP' bezw. QQ' syntaktisch sind, so ist der Arcus der komplexen Invariante J gleich einem der Möbius-

schen Doppelwinkel des sphärischen Vierecks $P_1 P_2 P_3 P_4$: d. h. bis aufs Zeichen gleich dem Winkel, den der durch P_1 gehende und den Speer $P_3 P_4$ berührende orientierte Kugelkreis mit dem Speer $P_1 P_2$ bildet.

Damit ein Speerquadrupel $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$, in dem die drei ersten (resp. alle vier) Speere syntaktisch sind, in ein analoges Quadrupel σ_i' durch komplexe Bewegung überführbar sei, ist nach Nr. 34 notwendig und hinreichend, daß die Paralleldreikante $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ und $\sigma_1' \sigma_2' \sigma_3'$ (resp. die betreffenden Vierkante) direkt ähnlich seien. Als Invarianten eines derartigen Quadrupels erweisen sich sonach die in den betreffenden Dreikanten (resp. Vierkanten) auftretenden Flächenwinkel.

Durch die Betrachtungen dieser Nr. sind auch für alle diejenigen Fälle, in denen unter den gegebenen 4 Speeren syntaktische vorkommen, die Quadrupelinvarianten geometrisch charakterisiert.

München, im Oktober 1903.

Druckfertig erklärt 11. I 1904.]

NEKROLOG

VORGETRAGEN

IN DER ÖFFENTLICHEN GESAMTSITZUNG
ZUR FEIER DES TODESTAGES LEIBNIZENS

AM 14. NOVEMBER 1903

JOHANNES WISLICENUS VON W. OSTWALD, O. M.

Johannes Wislicenus.

Von

W. Ostwald.

Hochgeehrte Versammlung!

Indem ich mich anschicke, erhaltenem Auftrage gemäß Worte der Erinnerung und des Dankes an unseren dahingeschiedenen Johannes Wislicenus zu sprechen, fühle ich lebhaft, wie wenig diese Worte Ihnen sein können. Ist doch niemand in diesem Kreise, der dem Verewigten nicht persönlich nahe gestanden hätte, sind doch viele unter uns, die ihn Freund nennen durften. In all diesen Herzen lebt ein so frisches und reiches Bild des Verewigten, daß es eine undankbare und vergebliche Mühe wäre, dieses Bild noch frischer und reicher gestalten zu wollen. Ja, auch dem Fernerstehenden, der nur ein- oder das anderemal mit Wislicenus zusammengetroffen sein mag, hat sich sein Bild jedesmal immer tiefer eingeprägt, denn er gehörte zu den Männern, die geistig und leiblich sich auf den ersten Blick aus ihrer Umgebung hervorheben.

Aber die Gesellschaft der Wissenschaften hat eine weiterreichende Aufgabe zu erfüllen. Es handelt sich nicht nur darum, dem langjährigen Mitgliede, dem Manne, der in arbeitsreichen und verantwortungsvollen Zeiten die höchste Würde bekleidet hat, die sie vergeben kann, in feierlicher Versammlung den letzten Dank für alle die Arbeit und Förderung nachzurufen, die er ihr erwiesen hat. Es gilt vielmehr, auch den nachwachsenden Geschlechtern das Bild dieses Mannes lebendig zu halten, und durch die Würdigung dessen, was er der Wissenschaft und unserer Gesellschaft geleistet hat, etwas zu der Dauerwirkung beizutragen, die ein jeder von uns an seinem Teile erstrebt.

Reicher und mannigfaltiger als sonst ein Gelehrtenleben, haben sich die Schicksale von Johannes Wislicenus, namentlich

der ersten Hälfte seines Lebens, gestaltet. Als Sohn des lutherischen Pfarrers Gustav Adolf Wislicenus wurde er am 24. Juni, dem Johannistage des Jahres 1835, zu Klein-Eichstädt geboren. Fast ein jeder von uns hat im Vorüberfahren von der Thüringer Eisenbahn aus einen Blick auf das bescheidene Dörfchen an der Saale geworfen, wenn bei den gemeinsamen Fahrten nach Kösen Wislicenus mit sichtbarer Freude uns die Stätten seiner glücklichen Kinderjahre wies. Im Jahre 1841 siedelte die Familie nach dem nahen Halle über, wo der Vater ein Pfarramt an der Neumarktkirche übernommen hatte. Seine freisinnige Gesinnung und deren offene Betätigung brachten ihn mit der vorgesetzten Kirchenbehörde in Konflikt; 1846 wurde er wegen unchristlicher Ansichten seines Amtes enthoben, und 1853 wurde er wegen eines Werkes, „Die Bibel im Lichte der Bildung unserer Zeit", zu zwei Jahren Gefängnis verurteilt.

Man kann sich leicht vorstellen, welchen Eindruck diese Ereignisse auf den feurigen und geistvollen Jüngling machten. Johannes hatte inzwischen die Realschule der Franckeschen Stiftungen in Halle durchgemacht und seine naturwissenschaftlichen Studien an der Halleschen Universität begonnen, als zu den Sorgen und Entbehrungen, denen die große Familie des stellenlosen Pfarrers ausgesetzt gewesen war, noch dies Äußerste trat. Hier galt es, das Ungewöhnliche zu wagen. Gustav Adolf Wislicenus entzog sich der drohenden Kerkerhaft durch die Flucht nach Amerika, und Johannes hatte die Familie dem Vater nachzubringen. Dieser Aufgabe stellten sich Fährlichkeiten aller Art entgegen; so brach auf dem Schiffe während der Fahrt die Cholera aus, und es mußte nach England zurückkehren; dort versiegten die kargen Mittel der Familie, und der fast noch in den Knabenjahren stehende Jüngling hatte einen Lebenskampf zu bestehen, dem mancher Mann unterlegen wäre. Er hat ihn erfolgreich bestanden, und die früh unter schwerer Verantwortung bewährte männliche Reife und Energie erklärt uns den Zauber, der von seiner Persönlichkeit ausging.

In Amerika war es wieder der junge Johannes, auf dessen Schultern die Sorge um die Familie in der Hauptsache lag. Die kaum erworbenen chemischen Kenntnisse mußten hierfür die Mittel bieten: als Assistent des Professors Horsford in Cambridge bei Boston und später als Leiter eines selbständigen Untersuchungslaboratoriums in New-York suchte er sein Wissen zu verwerten.

Nach zwei Jahren wurde es der Familie ermöglicht, nach Europa zurückzukehren. Zwar Deutschland blieb dem Vater verschlossen, so wurde Zürich zum Aufenthalt gewählt. Johannes aber ging nach Halle zu seinem Lehrer Heintz zurück, dessen Privatassistent er schon vor der Reise gewesen war, beendete dort seine Studien, erwarb auf Grund einer experimentellen Arbeit über ein basisches Zersetzungsprodukt des Aldehydammoniaks im Jahre 1859 den Doktorgrad und betrieb darauf seine Habilitierung an der Universität.

Diese sollte ihm indessen nur unter der Bedingung gestattet werden, daß er sich aller öffentlichen politischen Tätigkeit enthielte. Wislicenus wies diese seinem Freiheitssinne unerträgliche Zumutung zurück und wendete sich wieder nach Zürich, wo er im folgenden Jahre sich für das Fach der Chemie habilitierte. In schneller Folge erhielt er Lehraufträge an der kantonalen Industrieschule, an der Universität und schließlich am eidgenössichen Polytechnikum zu Zürich; 1871 wurde er Direktor dieser Anstalt, nachdem er 1867 zum ordentlichen Professor an der Universität ernannt worden war. Im Jahre 1872 konnte er mit hohen Ehren in sein Vaterland zurückkehren; in dessen eben erreichter Einheit er die Träume und Hoffnungen seiner Jugend verwirklicht fand, indem er als Nachfolger Streckers auf den Lehrstuhl der Chemie in Würzburg berufen wurde. Im Jahre 1885 endlich wurde er der Nachfolger Kolbes am chemischen Universitätslaboratorium in Leipzig. So hatte das Schicksal ihn nach weiten Umwegen wieder in die nächste Nähe des Ortes seiner Geburt und seiner ersten Studien geführt und den Kreis seines Lebens räumlich geschlossen.

Gemahnen uns in dieser Lebensgeschichte die Ereignisse der Jugend an Zeiten, die wir jüngeren uns längst im Nebel der Ferne zu betrachten gewöhnt haben, so erinnern uns auch die wissenschaftlichen Arbeiten aus Wislicenus' Jugend an Zeiten, die dem Bewußtsein des heutigen Chemikers noch weiter zurückzuliegen scheinen als jene Ereignisse der politischen Geschichte. Denn die Chemie hat in dem halben Jahrhundert, welches seit jenen Arbeiten vergangen ist, schnellere Fortschritte gemacht als irgend eine der benachbarten Wissenschaften. War doch eben erst durch die glanzvollen Arbeiten der Liebigschen Epoche die organische Chemie als eigene Wissenschaft begründet worden, die dann in unwiderstehlichem Vordringen sich bald der gesamten

Chemie bemächtigen sollte, um erst wieder in unseren Tagen zögernd in die Reihe der Schwestergebiete zurückzutreten, durch deren gleichförmiges und gemeinsames Zusammenwirken allein die chemische Wissenschaft ein dauernd lebensfähiger Organismus wird.

Wir besitzen von Wislicenus' eigener Hand, in seiner Denkschrift auf seinen Lehrer und Freund Heintz, eine lebendige Schilderung der eifrigen Kämpfe, die damals zwischen alter und neuer Chemie tobten, und die wie immer zu einem Siege des Neuen führten, der sich schließlich aber doch als ein vorübergehender erweisen sollte. Denn auch das Neue wird zu seiner Zeit alt, und bei einer in so lebhafter Entwicklung begriffenen Wissenschaft wie die Chemie tritt dieser Wechsel schneller ein als sonst. Pflegt doch bei uns eine fundamentale Wendung nicht einmal die Lebensdauer eines einzelnen Mannes abzuwarten; jeder Chemiker, der das durchschnittliche Lebensalter durchmißt, hat während desselben einige Male seine Wissenschaft von Grund aus umlernen müssen.

Ebenso stürmisch wie die politischen Verhältnisse waren also damals auch die chemischen. Im Anschluß an die Grundgedanken, mit denen Berzelius zum ersten Male die gesamte chemische Wissenschaft zu einem zusammenhängenden Bau geordnet hatte, hatte sich der Begriff des chemischen Radikals als vergleichbar dem des chemischen Elements entwickelt. Aber schon zwischen Berzelius und Liebig war trotz aller Bemühungen, ihn zu vermeiden, mit einer fast naturgesetzlich berührenden Notwendigkeit ein unlösbarer Widerspruch ausgebrochen, und wieder über Liebigs und seines Zeit- und Arbeitsgenossen Dumas Ansichten hinaus hatten der Elsässer Gerhardt und der Franzose Laurent die Fahne des Aufruhrs erhoben. In diese Zeit hinein fielen die ersten wissenschaftlichen Arbeiten von Johannes Wislicenus, und wir sehen ihn alsbald neben seinen experimentellen Untersuchungen eine theoretische Arbeit über die gemischten Typen auf den Kampfplatz werfen. Es bedarf nicht erst der Nachricht, daß er sich ganz und gar den Neuerern anschloß; doch enthielt die Arbeit außerdem einen Versuch, die kaum geklärten neuen Vorstellungen bereits im Sinne ihrer Weiterentwicklung zu bearbeiten.

Hiermit ist denn auch der Grundton angegeben, auf den die Melodie seiner wissenschaftlichen Arbeiten gestimmt blieb, ebenso wie in jenen Ereignissen seiner Jugend der Grundton für die Symphonie seiner Persönlichkeit gegeben war. Der *organischen*

Chemie gehört das Werk seines Lebens an, und wenn die Freiheit seines Denkens und die Weite seines Blickes ihm bis in sein Alter die Fähigkeit erhalten hatten, den neuen Wendungen in der Entwicklung seiner geliebten Wissenschaft mit freudiger Teilnahme zu folgen, so hat er die eigentliche Arbeit seines Lebens doch auf dem Acker der organischen Chemie getan.

Diese Arbeiten lassen sich um drei Hauptprobleme ordnen, wobei natürlich zwischen den drei Gruppen noch mannigfaltige Verschlingungen bestehen; sie fallen zudem der Hauptsache nach mit den drei Perioden seines äußeren Lebens zusammen. In Zürich beginnen die Arbeiten über die Milchsäure, die sich unmittelbar an jene vorher erwähnten theoretischen Untersuchungen anschließen. In Würzburg ist es die große Gruppe der Acetessigesterarbeiten, welche seinen wissenschaftlichen Weltruf begründen, und in Leipzig bilden die Isomerieerscheinungen ungesättigter Verbindungen und die damit zusammenhängenden Probleme der „geometrischen" Isomerie einen neuen Höhepunkt seiner wissenschaftlichen Tätigkeit, der sich zu einer Zeit entfaltet, in welcher andere Forscher bereits ans Ausruhen zu denken beginnen. Und wie in seinem äußeren Leben, so führt auch in seiner wissenschaftlichen Arbeit ihn das Ende wieder in die Nähe des Anfanges zurück. Seine letzte Arbeit, die er, obwohl bereits leidend, noch mit seinem ganzen Feuer und seiner ganzen Freude an dem wissenschaftlichen Ergebnis an dieser Stelle vorgetragen hat, die Untersuchung über die geometrisch isomeren Dimethyläthylene, behandelt das gleiche Problem, dessen Wichtigkeit ihm zuerst an der Milchsäurearbeit aufgegangen war, und dessen mögliche Lösung er bereits in jenen weit zurückliegenden Arbeiten angedeutet hatte.

In jenen ersten Arbeiten über die Milchsäure und die daran sich anschließenden Stoffe waren es anfangs Fragen über die Auffassung der Verbindungen mehrwertiger Radikale, welche die Wahl dieses besonderen Arbeitsgebietes veranlaßten. Bald aber verschob sich der Gesichtspunkt, und das *Isomerieproblem*, die Frage, wieso es möglich sei, daß gleich zusammengesetzte Verbindungen verschiedene Eigenschaften haben können, und welchen Gesetzen diese Verschiedenheiten unterliegen, trat ihm in den Vordergrund, um für immer dort zu bleiben. Welche Bedeutung gerade diese Frage für WISLICENUS besaß, geht daraus hervor, daß er sie wiederholt zum Gegenstande allgemeinverständlicher Darstellungen wählte. So hatte sich ihm schon früh bei seinen

Milchsäurestudien die Erkenntnis aufgedrängt, daß die eben von ihm theoretisch durchgearbeiteten, gebräuchlichen Auffassungen über die Isomerie nicht ausreichend waren, um die beobachteten Tatsachen darzustellen, und er forderte eine Entwicklung der bisher auf der Ebene des Papiers dargestellten Strukturformeln der chemischen Verbindungen zu räumlichen Darstellungen.

Das Problem, um das es sich hier handelt, würde in allgemeiner Auffassung so heißen: welche Mannigfaltigkeit muß einer Abbildung erteilt werden, damit die Mannigfaltigkeit der chemischen Isomerieerscheinungen durch sie vollständig dargestellt wird? In solcher Allgemeinheit stellte sich Wislicenus die Frage nicht. Er war, wie alle seine Zeit- und Fachgenossen, überzeugter Atomistiker, und wie alle seine Überzeugungen war ihm auch diese nicht nur Verstandes- sondern auch Herzenssache. Viele unter uns werden sich seines warmen Eintretens für die Atomistik gelegentlich seiner hiesigen Rektoratsrede erinnern, als er sie durch gewisse neuere Entwicklungen der Wissenschaft bedroht fand.

Einen Versuch, selbst jene geforderte Ausdehnung der chemischen Formeln in den Raum zu unternehmen, hat er zunächst nicht gemacht. Die Übersiedlung nach Würzburg brachte mit der Vermehrung der Schülerzahl die Forderung, für entsprechende Arbeiten zu sorgen, und so entwickelte sich jene glänzende Gruppe synthetischer Forschungen, die sich um den Acetessigester schlossen. Wislicenus fand, daß dieser Stoff eine sehr leichte teilweise Vertretung seines Wasserstoffs durch Natrium gestattete, und daß die so erhaltenen Natriumverbindungen ebenso leicht mit Halogenverbindungen aller Art reagierten; die dabei entstehenden Produkte entsprachen einer „Kohlenstoffsynthese", d. h. sie enthielten mehr Kohlenstoffatome in ihrer Molekularformel, als die Ausgangsstoffe enthalten hatten. Derartige Reaktionen waren damals recht selten und meist schwierig und unvollkommen ausführbar, und so wurde eine Kohlenstoffsynthese sozusagen als das Meisterstück des Organikers angesehen. Hier war auf einmal ein Tor geöffnet, das zu zahllosen synthetischen Produkten den Zugang ermöglichte, und dabei gleichzeitig Verbindungen ergab, deren Konstitution mehr oder weniger bestimmt durch die Synthese selbst gegeben war. So ergoß sich denn unter der begeisterten Mithilfe eines beständig wachsenden Schülerkreises eine reiche Fülle entsprechender Arbeiten über die staunende Chemikerwelt und verbreitete den Ruhm des Entdeckers und Lehrers in die weitesten Kreise.

Inzwischen war der seinerzeit liegengebliebene Gedanke von der räumlichen Darstellung der chemischen Formeln unabhängig in einem anderen Kopfe entstanden und dort zur Reife gebracht worden. Jakobus Henricus van't Hoff, damals kaum den Studentenjahren entwachsen, hatte ihn erfaßt und in seinen Hauptzügen durchgeführt; dabei hatte sich erwiesen, daß er in der Tat das zu leisten vermochte, was Wislicenus von ihm erwartet hatte. Dieser nahm den Fortschritt mit Wärme auf und veranlaßte seinen Schüler Hermann, van't Hoffs Schrift ins Deutsche zu übersetzen. Zunächst erntete Wislicenus geringen Dank hierfür; die meisten Fachgenossen ließen diese Hervorhebung der Arbeit des völlig unbekannten Holländers dem verehrten Kollegen als liebenswürdige Schrulle hingehen; andere, unter ihnen der damalige Chemiker an unserer Universität, Hermann Kolbe, sahen darin ein wissenschaftliches Vergehen, das die strengste Rüge verdiente. So blieb auch dieser zweite Vorstoß zunächst ohne weitere Folgen

Inzwischen aber hatte van't Hoff unermüdlich an der Entwicklung des Gedankens weiter gearbeitet, und ebenso hatte Wislicenus seiner Anwendung auf das Isomerieproblem eine immer größere Aufmerksamkeit geschenkt. Diese Arbeiten fallen zeitlich mit seiner Übersiedlung nach Leipzig zusammen, und sie wurden zusammengefaßt in der berühmten Abhandlung von 1887: Über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekulen und ihre Bestimmung in geometrisch-isomeren ungesättigten Verbindungen, die das erste Heft des vierzehnten Bandes unserer Abhandlungen bildet. Die Aufmerksamkeit, welche diese Arbeit in den weitesten Kreisen der Fachgenossen erregte, läßt sich schon äußerlich daran erkennen, daß die erste Auflage des Heftes in kurzer Zeit vergriffen war und ein zweiter Abdruck sich als nötig erwies: eine Erscheinung, welche an unseren Abhandlungen außerdem nur bei Wilhelm Webers elektrodynamischen Maßbestimmungen eingetreten ist.

Mit dem Ausbau der hier niedergelegten Gedanken hat sich Wislicenus bis an sein Lebensende beschäftigt, und er hat seinen in Leipzig noch größer gewordenen Schülerkreis in gewohnter Weise mit dem gleichen Interesse zu erfüllen gewußt. Haben sich auch nicht alle Vorstellungen widerspruchsfrei durchführen lassen, in welche er damals die Tatsachen zusammenzufassen gesucht hatte, so ist doch durch diese Forschungen ein großes Gebiet der Wissenschaft erschlossen worden, an dem die Chemiker vor-

her mit einer gewissen Scheu vorüberzugehen pflegten, weil man wußte, daß dort Widersprüche gegen die übliche Auffassung vorhanden waren. Denn damals war noch weniger als jetzt die geschichtlich leicht zu belegende Tatsache bekannt, daß derartige unregelmäßige Stellen am Baume der Wissenschaft die Punkte bezeichnen, an denen demnächst eine Knospe und später ein neuer Zweig sich entwickeln wird.

Diese Andeutungen müssen genügen, um die wissenschaftliche Tätigkeit unseres dahingeschiedenen Mitgliedes zu kennzeichnen, da eine erschöpfende Darstellung seiner vielverzweigten Arbeiten an dieser Stelle nicht ausführbar ist. Sie geben nur die Leitgedanken seiner Arbeit, lassen aber deren Reichtum und Ausdehnung nicht erkennen. Daß beide sehr groß gewesen sind, ergibt sich bereits aus der Tatsache, daß er ungezählte Schüler in die Wissenschaft einführte und ihre ersten selbständigen Schritte in der Doktorarbeit leitete; eine solche Tätigkeit ist nicht ohne eine reiche Betätigung der Schaffenskraft wissenschaftlicher Ideen denkbar.

Hiermit ist nun auch eine Seite in Wislicenus' Wesen berührt, die ihm noch mehr am Herzen lag, als seine Wissenschaft selbst: dies war seine Lehrtätigkeit. Das Eindrucksvolle, Fesselnde und Gewinnende einerseits, das Gütige und Hilfsbereite andererseits seiner Persönlichkeit hat sich wohl nirgend reizvoller betätigt, als in seinem Verkehr mit den Schülern. Nicht nur im Laboratorium, sondern auch weit darüber hinaus folgte seine Teilnahme denen, die sich seiner Führung anvertraut hatten. Fleißige Studenten durch Heranziehen zum näheren Verkehr zu belohnen, träge durch kräftige und kräftigste Mittel zur Arbeit heranzuziehen, erfolgreichen Schülern zu guten Stellungen im späteren Leben zu verhelfen, entgleiste Existenzen wieder in regelmäßigen Gang zu bringen — wer könnte alle die Arten nennen, in denen sich seine Liebe zur lernenden Jugend kundgab? Kein Wunder denn, daß die Studenten ihrerseits mit schwärmerischer Liebe und Verehrung an ihm hingen und dies bei jeder Gelegenheit betätigten. Mit seiner ungewöhnlich stattlichen Erscheinung, ein Zeuskopf auf einem hohen, breitschulterigen Körper, seiner kraftvollen Stimme, seiner gelegentlich in ernster Gefahr betätigten Unerschrockenheit war er der geborene Führer der Jugend, und er hat diesen Zauber bis in sein Alter zu üben gewußt.

Es ist natürlich, daß ein dergestalt begabter Mann auch überall, wo er sich betätigt, das Vertrauen seiner Fach- und Amtsgenossen zu erringen weiß. So hat er an allen Stätten seiner Tätigkeit sich alsbald zu führender Stellung berufen gesehn. Aus Zürich schied er als Direktor des dortigen Polytechnikums, in Würzburg hat er außer allen regelmäßigen akademischen Ehren die ungewöhnliche Auszeichnung erfahren, zum zweiten Male zum Rektor gewählt zu werden, und zwar für das besonders schwierige Jubiläumsjahr der Universität. Ebenso hat er im Kreise unserer Universität und unserer Gesellschaft alle Stellungen bekleidet, zu denen Vertrauen und Achtung einen Mann berufen kann. So hat er auch von 1893 bis 1901 das höchste Amt in unserer Gesellschaft, das eines ersten Sekretärs in der naturwissenschaftlich-mathematischen Klasse bekleidet und hat namentlich während der schwierigen und verantwortungsreichen Verhandlungen, welche der Gründung der Assoziation der Akademien vorausging, die Kraft seiner liebenswürdigen Persönlichkeit bewährt. In gleicher Weise hat die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, die deutsche chemische Gesellschaft und der Verein deutscher Chemiker sich durch Wahl in ihre höchsten Ämter seine wohlwollende Mitwirkung zu sichern gewußt.

Das Bild seiner Persönlichkeit wäre nicht vollständig, wenn der Zug tätigen Gemeinsinnes und begeisterter Vaterlandsliebe unerwähnt bliebe, die ihn erfüllten. Beide hat er in mannigfaltigster Weise bewährt. Insbesondere verwischte die Schöpfung des Deutschen Reiches alle die Schmerzen und Kränkungen, die er und die Seinen in den früheren Perioden in Deutschland erfahren hatten; die hohe Verehrung, welche er dem Fürsten Bismarck und dem König Albert zollte, brachte er oft und gerne zum begeisterten Ausdruck.

Wenden wir uns wieder zu dem Bilde des Gelehrten zurück, so werden wir noch zu fragen haben, wie er sich zu der dritten von den drei Personen verhalten hat, aus denen sich im allgemeinen der deutsche Gelehrte zusammengesetzt. Was er als Forscher und Lehrer war, haben wir gesehen; von seiner Tätigkeit als Autor ist weniger zu berichten. Geht doch insbesondere bei dem Chemiker ein immer größerer Teil der wissenschaftlichen Arbeit statt in unmittelbare persönliche Leistungen in die Arbeiten der Schüler über, so daß das, was unter dem Namen des Forschers der Nachwelt übergeben wird, oft nur einen

kleinen Teil seiner Lebensarbeit darstellt. So ist es von vornherein nicht zu erwarten, daß neben dieser ausgedehnten Forscher- und Lehrertätigkeit sich noch eine ausgedehnte schriftstellerische Betätigung entwickeln konnte. In der Tat hat er außer den Berichten üben seine zahlreichen Experimentaluntersuchungen nur noch ein Buch allgemeineren Inhaltes veröffentlicht. Es ist dies eine Neubearbeitung des von seinem Würzburger Amtsvorgänger herausgegebenen Lehrbuches der Chemie von Regnault. Und als die Auflage erschöpft war, hat er nicht die Zeit gefunden, eine weitere zu bearbeiten. Wir werden nicht irren, wenn wir die Beschäftigung mit der Feder der ganzen Anlage seiner Persönlichkeit am wenigsten entsprechend ansehen; auch waren die Klagen über die Last des Niederschreibens der inzwischen angestellten Untersuchungen in den bevorstehenden Ferien fast die einzigen Äußerungen des Unmutes, die wir von ihm hörten. —

Suchen wir nun schließlich die Summe zu ziehen, so werden wir in Wislicenus einen der begnadeten Männer erkennen, deren Wesen seinen Schwerpunkt in der unmittelbaren Wirkung der Persönlichkeit hat. Nicht die Bildung und Durchführung abstrakter Gedanken, sondern die Betätigung von Mensch zu Mensch ist auch in der Wissenschaft seine Gabe und seine Größe gewesen. Sind andere große Forscher einem Sturzbach zu vergleichen, der Felsen bewegt und Klippen durchschneidet, und der überall, wo er sich betätigt, die Erde formt und ihr die Spuren seiner Wirkung aufprägt, so gleicht er vielmehr der regenspendenden Wolke, die in tausend Tropfen über weite Strecken Segen ergießt und Fruchtbarkeit verbreitet. Scheinbar verrieselt sie; aber das grünende Feld verkündet, daß sie dagewesen ist.

Druckfertig erklärt 1. XII. 1903.]

NEKROLOG

VORGETRAGEN

IN DER ÖFFENTLICHEN GESAMTSITZUNG
ZUR FEIER DES TODESTAGES LEIBNIZENS

AM 14. NOVEMBER 1903

JULIUS VICTOR CARUS von C. Chun, o. m.

Julius Victor Carus.

Von

C. Chun.

Die Entwickelung der Universitäten in der Neuzeit bringt es mit sich, daß auch in ihrem Personalbestand ein gewisser provinzieller Charakterzug insofern schwindet, als Lehrkräfte immer seltener werden, die, dem heimischen Boden erwachsen, bis an ihr Lebensende der Landesuniversität angehören. Kaum aber dürfte die Gesellschaft der Wissenschaften Gelegenheit finden, noch einmal das Andenken eines Mitgliedes zu ehren, dessen Familie durch nicht weniger als drei Generationen mit der Universität Leipzig eng verbunden ist.

Julius Victor Carus wurde zu Leipzig in einem Hause der Petersstraße am 25. August 1823 geboren und blieb der Universität treu bis zu seinem im hohen Lebensalter von 80 Jahren am 10. März dieses Jahres erfolgten Tode. Sein Vater, Ernst August Carus, wirkte als Professor der Medizin an unserer Universität und war der Gründer der ersten, späterhin von der Hochschule übernommenen Poliklinik. Der im Jahre 1807 verstorbene Großvater, Friedrich August Carus, war Professor der Philosophie an unserer Universität und der bekannteste Vertreter der Familie, Karl Gustav Garus, hatte den ersten deutschen Lehrstuhl der vergleichenden Anatomie in Leipzig inne. Er war eine glänzend beanlagte Natur, ein vielseitiger, auch künstlerisch sich betätigender Forscher, der sich unter dem Einfluß der Schelling-Okenschen Natur-Philosophie seine eigene Weltanschauung schuf, die freilich nur zu leicht geneigt war, „das tatsächliche Material zu unterschätzen und sich mit allgemeinen Abstraktionen von meist ästhetischer Färbung zu beruhigen".

Von dem Vater ererbte Victor Carus die Neigung zur Medizin, von dem Großvater die philosophische Beanlagung, mit

seinem Anverwandten hat er die zoologischen und künstlerischen Interessen gemein. Er besuchte gemeinsam mit dem im Carusschen Hause aufgenommenen Jugendfreund Max Müller, dem späteren gefeierten Sanskrit-Forscher in Oxford, das Nicolai-Gymnasium bis zum Jahre 1841 und widmete sich dann an unserer Universität dem Studium der Medizin. Die Berufung des Vaters als ordentlicher Professor der Chirurgie nach Dorpat gab dann Anlaß, dort das Studium fortzusetzen und unter dem Einfluß von Reichert der früh erwachten Neigung für zootomische und entwickelungsgeschichtliche Untersuchungen nachzugehen. Nicht minder bestimmend wirkte in dieser Richtung der Einfluß unseres Anatomen Ernst Heinrich Weber, der ihn zu seinem Famulus wählte. Um das medizinische Studium abzuschließen, kehrte Carus nach Leipzig zurück und bestand 1847 als Assistent von Radius das Examen rigorosum. Als Promotionsarbeit erschien dann 1849 die erste Schrift, welche seinen Namen auch in weiteren Kreisen bekannt machte, „Zur näheren Kenntnis des Generationswechsels". Die Wahl des Themas deutet von vornherein darauf hin, daß er mit Vorliebe geneigt ist, allgemeine Fragen in den Kreis seiner Betrachtung zu ziehen und sie durch Spezialbeobachtungen, die er im vorliegenden Falle an Distomen und Aphiden anstellte, zu fördern. Ein von der medizinischen Fakultät ihm verliehenes Reisestipendium ermöglichte es ihm sodann, in näheren Verkehr zu Kölliker in Würzburg und zu Siebold in Freiburg zu treten. Dem Einfluß von Max Müller mag es dann auch zuzuschreiben sein, daß er 1849 zum ersten Male England aufsucht, indem er die Stellung eines Präparators am Museum für vergleichende Anatomie in Oxford annimmt. Nach 2 Jahren kehrt er nach Leipzig zurück und habilitiert sich als Privatdozent. 1853 wird er zum Extraordinarius in der medizinischen Fakultät ernannt und begleitet diese Stellung bis an sein Lebensende.

Nur einmal wird diese vieljährige Tätigkeit an unserer Universität durch eine längere Abwesenheit unterbrochen, indem ihm die für einen deutschen Professor seltene Ehre zuteil wird, in Edinburgh während der Jahre 1873 und 1874 Vorlesungen über Zoologie als Ersatz für Wyville Thomson, den Leiter der Tiefsee-Expedition des „Challenger" zu halten.

Seine Vorträge an unserer Universität betreffen von vornherein das Gebiet der vergleichenden Anatomie und Entwickelungsgeschichte im weitesten Umfang. Sie gaben Anlaß zu verschiedenen zoo-

tomischen und vergleichend-anatomischen Untersuchungen. Er studiert die Entwickelung des Spinnen-Eies (1850) und veröffentlicht als Frucht seiner ersten Untersuchung an der Seeküste eine vergleichend-anatomische Studie über den Musculus quadratus lumborum. An der Hand der Verhältnisse bei den des Beckens entbehrenden Delphinen weist er nach, daß diese wichtige in die Bauchhöhle rückende Muskelgruppe in das Gebiet der unteren Stammmuskeln des Körpers gehört und daß das Auftreten eines Beckengürtels lediglich eine Unterbrechung der Streichungsrichtung bedingt, ohne die Zugehörigkeit des quadratus lumborum zu der ventralen Stammmuskulatur zu verwischen. Neben histologischen Untersuchungen über die Malpighischen Körper der Niere (1850) beschäftigen ihn dann die durchsichtigen Leptocephaliden (1862), in denen er die Larven von Fischen erkennt (sie wurden neuerdings als die Larven der Aale nachgewiesen) und der Bau von Noctiluca (1868).

Weitaus das bedeutungsvollste Werk, das auch späteren Generationen den Namen von Carus in das Gedenken zurückrufen wird, ist das 1853 erschienene „System der tierischen Morphologie." Er erachtet es als Aufgabe der Morphologie, die Formerscheinung des tierischen Körpers zu erklären, indem die allgemeinen Bildungsgesetze und der Typus, — wie man sich zur Zeit der naturphilosophischen Schule ausdrückte: Das im geheimen bewahrte Urbild — klar gelegt werden. Seiner methodischen und philosophischen Beanlagung entspricht es, daß die einzelnen Kapitel mit allgemeinen Erörterungen eröffnet werden, unter denen gleich im Beginn die scharfe Absage gegen eine teleologische Naturauffassung hervorgehoben werden mag, wie sie noch in der kurz zuvor erschienenen „Anatomisch-physiologischen Übersicht des Tierreichs" von Bergmann und Leuckart ihren Ausdruck gefunden hat. An die Adresse von Carl Gustav Carus richten sich dann die eingeflochtenen Bemerkungen über die haltlosen Spekulationen der naturphilosophischen Schule. Es ist ein gewaltiges Material, welches Carus hier verarbeitet, indem er nicht nur die Organisation der Tierstämme vergleichend schildert, sondern auch die Gewebelehre und zum ersten Male die vergleichende Entwickelungsgeschichte in den Kreis der Betrachtung zieht. Noch heute dürften manche seiner allgemeinen Erörterungen mehr Beachtung verdienen, als ihnen bisher zuteil wurde. Von besonderem Interesse ist seine allgemeine Erörterung über den Wert der Entwickelungs-

geschichte für vergleichend anatomische Spekulationen, indem er nachdrücklich darauf hinweist, daß homologe Organe auf verschiedene Weise entstehen können und daß wir nicht im Recht sind, den Begriff der Homologie, wie es heutzutage geschieht, lediglich auf die Entwickelungsgeschichte zu basieren. Wenn er freilich glaubt, daß die Physiologie kein Interesse an der Entwickelungsgeschichte habe, so hat ihm die spätere Forschung nicht Recht gegeben. Er erlebte es noch selbst, daß eine Entwickelungsphysiologie, oder wie sie heutzutage genannt wird, eine „Entwickelungsmechanik", geschaffen wurde, die allmählich zu einer selbständigen, die Bestrebungen des Zoologen mit jenen des Physiologen verbindenden Disziplin sich auszuwachsen beginnt.

Das System der Morphologie von CARUS und die kurz zuvor erschienene „Morphologie und Verwandschaftsverhältnisse der wirbellosen Tiere" von LEUCKART, haben den Aufschwung der morphologischen Disziplinen vorbereiten helfen.

Der äußere Anlaß hierzu ergab sich im Jahre 1859 mit dem Erscheinen von DARWINS „Origin of species". Man kann es wohl begreifen, welchen Einfluß DARWINS Lehre auf einen Forscher ausüben mußte, der in seinem System der Morphologie den merkwürdigen Satz äußert, daß wir die ausgestorbenen und fossil erhaltenen tierischen Formen, „natürlich nur in einem durch den absoluten Mangel eines möglichen Beweises beschränkten Sinne, als die Urahnen betrachten können, aus denen durch fortgesetzte Zeugung und Akkomodation an progressiv sehr verschiedene Lebensverhältnisse der Formenreichtum der jetzigen Schöpfung entstand".

Es liegt in der Natur der Sache, daß CARUS in nähere Beziehung zu DARWIN tritt, indem er seine Werke in das Deutsche übersetzt. Aus dem von DARWINS Sohne herausgegebenen Briefwechsel erfahren wir, wie innig sich das Verhältnis zwischen beiden Männern gestaltete. CARUS erscheint hier durchaus nicht als der Handlanger, sondern häufig auch als der Gebende, der allgemeine Fragen erörtert und mit seinem reichen Wissen DARWIN unterstützt. Die Briefe zeugen von gegenseitiger Wertschätzung, und oft gibt DARWIN seiner Bewunderung über die Gelehrsamkeit und über die „indomitable powers of work" seines Übersetzers Ausdruck.

Mit der Erwähnung der Tätigkeit von CARUS als Übersetzer, sind wir in die zweite Periode seines Schaffens eingetreten, welche

nahezu ausschließlich durch literarische Unternehmungen charakterisiert wird. Man kann es in hohem Maße bedauern, daß ein Mann, der in so seltenem Maße die Fähigkeit besaß, Einzelbeobachtungen in einen allgemeinen Rahmen zu fassen, frühzeitig aus der Reihe jener Forscher ausscheidet, welche durch selbständige Untersuchungen die Wissenschaft fördern.

Wenn auch äußere Verhältnisse hierzu beigetragen haben mögen, so darf doch nicht übersehen werden, daß Carus entschieden einer besonderen Beanlagung folgte, wenn er zum Bibliothekar der Zoologen wird, indem er gemeinsam mit seinem Schwager Wilhelm Engelmann die „Bibliotheca Zoologica" herausgibt, die ebenso wie der von ihm begründete „Zoologische Anzeiger", das unentbehrliche Requisit für zoologische Arbeit abgeben.

Den Preis unter seinen literarischen Leistungen, die mit Recht seit Anbeginn wegen ihrer Gründlichkeit und Zuverlässigkeit gerühmt wurden, möchte ich der „Geschichte der Zoologie" erteilen. Es liegt auf der Hand, daß die Darstellung der Entwickelung einer Wissenschaft von den Tieren nicht ohne Eingehen auf die Stellung, welche der allgemeine Kulturzustand dem Menschen den Tieren gegenüber aufweist, zu geben ist. Religiöse und philosophische Anschauungen beeinflussen derart die allgemeinen Ideen über das Verhältnis des Menschen zur organischen Lebewelt, daß ein hohes Maß kulturgeschichtlicher Kenntnisse jenem eigen sein muß, der die Geschichte seiner Wissenschaft schreiben will. Die Gelehrsamkeit von Carus und seine Fähigkeit, das Wesentliche in knappen Zügen herauszugreifen, machen das Studium seiner Geschichte der Zoologie zu einem hohen Genuß. Seine Schilderungen von dem Einfluß der Araber auf Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse, seine Darstellung der Zoologen der Renaissance und sein Kapitel über die deutsche Naturphilosophie zu Beginn des vorigen Jahrhunderts sind Musterleistungen, denen man ebensowenig die Anerkennung versagen wird, wie seiner maßvollen und von Überschwänglichkeiten sich frei haltenden Beurteilung von Goethe.

Es gibt Naturen, deren reiche Begabung wie durch eine Linse auf einen Brennpunkt konzentriert, zu unvergänglichen Leistungen hinführt. Es gibt andere, deren Betätigung als Reflex einer universellen Beanlagung erscheint. Ihre einzelnen Leistungen bedeuten keine Marksteine der Wissenschaft: das Integral ihrer Gesamttätigkeit läßt erst ihre Bedeutung ermessen. Während die

erstern oft einsam auf ihrer Höhe thronen und dem pulsierenden Leben fremd gegenüber stehen, so drängt es die letzteren warmherzig sich zu erschließen und selbsttätig einzugreifen.

Es dürften nur wenige unter uns über eine ähnlich große Zahl treu ergebener Freunde aus allen Berufskreisen, darunter Männer von glänzenden Namen, verfügen, wie Carus. Als ein Ausfluß seines Wesens erscheint es auch, wenn er in der Loge als Meister vom Stuhl Dezennien hindurch eine maßgebende Rolle spielt.

Wir wollen indessen unsere Betrachtung über den Menschen Carus nicht abschließen, ohne noch einer besonders anziehenden Seite seiner Beanlagung, nämlich seines musikalischen Talentes, zu gedenken. Lange schwankte er, als es sich darum handelte, über seinen künftigen Beruf zu entscheiden, ob er Musiker oder Student der Medizin werden sollte. War es doch kein geringerer als David, welcher den begabten Violinisten gleichzeitig mit Joachim unterrichtete. Die großen Traditionen des musikalischen Lebens von Leipzig knüpfen denn auch an das Haus Carus an: hier verkehrten ein Mendelssohn-Bartholdy, ein Marschner, ein Karl Löwe; hier lernte Schumann seine Klara kennen, und hier trugen Reinicke und Rubinstein vor einem feinsinnigen Kreise ihre Kompositionen vor.

Man beneidet ein Leben von so reichem Inhalt, der ihm auch über jene Zeiten hinweghalf, wo Anfechtungen und Enttäuschungen nicht erspart blieben. Dazu kam bis in das hohe Alter eine jugendliche Frische. Wer ihn beobachtete, wie er allgemeine Fragen erörterte, wie er fast enthusiastisch seiner Befriedigung über den Aufschwung der Morphologie an der Hand des großen Gedankens der Deszendenz Ausdruck gab, der entnahm gern, daß sich an ihm das Wort von Aristoteles bewahrheitete: *ἀμηχάνους ἡδονὰς παρέχει ἡ δημιουργήσασα φύσις φύσει φιλοσόφοις.*

Druckfertig erklärt 28. XI. 1903.]

Protektor der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Exzellenz der Staatsminister des Kultus und öffentlichen Unterrichts Dr. *Kurt Damm Paul v. Seydewitz.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Geheimer Hofrat *Ernst Windisch* in Leipzig, Sekretär der philol.-histor. Klasse bis Ende des Jahres 1904.
Geheimer Rat *Hermann Lipsius* in Leipzig, stellvertretender Sekretär der philol.-histor. Klasse bis Ende des Jahres 1904.
Professor *Hugo Berger* in Leipzig.
—— *Adolf Birch-Hirschfeld* in Leipzig.
Geheimer Rat *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Friedrich Karl Brugmann* in Leipzig.
—— —— *Karl Bücher* in Leipzig.
Professor *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *August Fischer* in Leipzig.
Bibliotheksdirektor Professor *Oscar v. Gebhardt* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Heinrich Gelzer* in Jena.
—— —— *Georg Götz* in Jena.
Geheimer Kirchenrat *Albert Hauck* in Leipzig.
Geheimer Rat *Max Heinze* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Rudolf Hirzel* in Jena.
Oberschulrat *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.
Professor *Carl Lamprecht* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *August Leskien* in Leipzig.

Professor *Friedrich Marx* in Leipzig.
—— *Richard Meister* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ludwig Mitteis* in Leipzig.
Professor *Eugen Mogk* in Leipzig.
Oberstudienrat *Hermann Peter* in Meissen.
Geheimer Hofrat *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Professor *Wilhelm Roscher* in Wurzen.
Professor *August Schmarsow* in Leipzig.
Hofrat *Theodor Schreiber* in Leipzig.
Professor *Gerhard Seeliger* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Eduard Sievers* in Leipzig.
—— —— *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Georg Steindorff* in Leipzig.
—— *Franz Studniczka* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Georg Treu* in Dresden.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Curt Wachsmuth* in Leipzig
—— —— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.
Professor *Heinrich Zimmern* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Geheimer Hofrat *Lujo Brentano* in München.
Professor *Friedrich Delitzsch* in Berlin.
Geheimer Hofrat *Erich Marcks* in Heidelberg.
Hofrat *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
Geheimer Regierungsrat *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Geheimer Rat *Wilhelm His* in Leipzig, Sekretär der mathem.-phys. Klasse bis Ende des Jahres 1905.
Geheimer Bergrat *Hermann Credner* in Leipzig, stellvertretender Sekretär der mathem.-phys. Klasse bis Ende des Jahres 1905.
Professor *Ernst Abbe* in Jena.
Geheimer Hofrat *Ernst Beckmann* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Biedermann* in Jena.
Geheimer Medizinalrat *Rudolf Böhm* in Leipzig.

Geheimer Hofrat *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Professor *Karl Chun* in Leipzig.
—— *Theodor Des Coudres* in Leipzig.
—— *Friedrich Engel* in Leipzig.
Dr. *Wilhelm Feddersen* in Leipzig.
Geheimer Medizinalrat *Paul Flechsig* in Leipzig.
—— —— *Ewald Hering* in Leipzig.
Professor *Otto Hölder* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ludwig Knorr* in Jena.
—— —— *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Medizinalrat *Felix Marchand* in Leipzig.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ernst von Meyer* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Müller* in Jena.
—— —— *Carl Neumann* in Leipzig.
Wirklicher Staatsrat Professor *Arthur v. Oettingen* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
—— —— *Karl Rohn* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Professor *Ernst Stahl* in Jena.
Geheimer Hofrat *Johannes Thomae* in Jena.
—— —— *August Töpler* in Dresden.
Professor *Otto Wiener* in Leipzig.
Geheimer Rat *Clemens Winkler* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
—— —— *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
—— —— *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Außerordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Professor *Karl Correns* in Leipzig.
—— *Johannes Felix* in Leipzig.
—— *Otto Fischer* in Leipzig.
—— *Hans Held* in Leipzig.
—— *Max Siegfried* in Leipzig.
—— *Otto zur Strassen* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Geheimrat *Ludwig Boltzmann* in Wien.
Geheimer Regierungsrat *Felix Klein* in Göttingen.
—— —— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Klasse.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebers, Georg, 1898.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleckeisen, Alfred, 1899.
Fleischer, Heinr. Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gabelentz, Hans Georg Conon von der, 1893.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich. 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Janitschek, Hubert, 1893.
Köhler, Reinhold, 1892.
Krehl, Ludolf, 1901.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.
Miaskowski, August von, 1899.

Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Mommsen, Theodor, 1903.
Nipperdey, Carl. 1875.
Noorden, Carl von. 1883.
Overbeck, Johannes Adolf, 1895.
Pertsch, Wilhelm, 1899.
Peschel, Oscar Ferdinand. 1875.
Preller, Ludwig. 1861.
Ribbeck, Otto, 1898.
Ritschl, Friedrich Wilhelm, 1876.
Rohde, Erwin, 1898.
Roscher, Wilhelm. 1894.
Ruge, Sophus, 1903.
Sauppe, Hermann, 1893.
Schleicher, August, 1868.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Socin, Albert, 1899.
Springer, Anton, 1891.
Stark, Carl Bernhard. 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich. 1867.
Ukert, Friedrich August, 1851.
Voigt, Georg, 1891.
Wachsmuth, Wilhelm. 1866.
Wächter, Carl Georg von, 1880.
Westermann, Anton, 1869.
Zarncke, Friedrich, 1891.

Mathematisch-physische Klasse.

d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Braune, Christian Wilhelm, 1892.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Carus, Julius Victor, 1903.
Cohnheim, Julius. 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Drobisch, Moritz Wilhelm, 1896.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Gegenbaur, Carl, 1903.
Geinitz, Hans Bruno, 1900.
Hankel, Wilhelm Gottlieb, 1899.
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack, Axel, 1888.
Hofmeister, Wilhelm. 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Knop, Johann August Ludwig Wilhelm, 1891.
Kolbe, Hermann, 1884.
Krüger, Adalbert, 1896.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Leuckart, Rudolph, 1898.
Lie, Sophus, 1899.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Ludwig, Carl. 1895.
Marchand, Richard Felix. 1850.
Mettenius, Georg. 1866.
Möbius, August Ferdinand. 1868.
Naumann, Carl Friedrich. 1873.
Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand. 1882.
Scheerer, Theodor. 1875.
Schenk, August. 1891.
Schleiden, Matthias Jacob. 1881.
Schlömilch, Oscar, 1901.
Schmitt, Rudolf Wilhelm, 1898.

Schwägrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.
Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Stohmann, Friedrich, 1897.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Weber, Wilhelm, 1891.
Wiedemann, Gustav, 1899.
Wislicenus, Johannes, 1902.
Zöllner, Johann Carl Friedrich, 1882.

Leipzig, am 31. Dezember 1903.

Verzeichnis

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1903 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu **Berlin**. Aus d. J. 1902. Berlin d. J.

Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1902, No. 41—53. 1903, No. 1—40. Berlin d. J.

Politische Korrespondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 28. Berlin 1903.

Watzinger, Carl, Das Relief des Archelaos von Priene. 63. Programm zum Winckelmannsfeste der Archäologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1903.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 35, No. 21. Jahrg. 36, No. 1—16. Berlin 1902 03.

Die Fortschritte der Physik im J. 1902. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 58. Abt. 1—3. — Namenregister nebst einem Sach-Ergänzungsregister zu Bd. 44—53 (1888—1897). Bearbeitet von *G. Schwabe* und *E. Schwabe*. Braunschweig 1903.

Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. Jahrg. 3, No. 2. Jahrg. 4, No. 18. Jahrg. 5, No. 1—23. Berlin 1901—03.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 16 (Jahrg. 1902), No. 20—26. Bd. 17 (Jahrg. 1903), No. 1—19. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 27. (1902/03), No. 3—14. Berlin d. J.

Abhandlungen der Kgl. Preuß. geolog. Landesanstalt N. F. H. 18 (nebst Atlas). 24 (desgl.). 37 (desgl.). 38. Berlin 1902. 03.

Potonié, H., Abbildungen und Beschreibungen fossiler Pflanzenreste der paläozoischen und mesozoischen Formationen. Herausg. von der Kgl. Preuß. geolog. Landesanstalt. Lief. 1. Berlin 1903.

Wissenschaftliche Abhandlungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Bd. 4, H. 1. Berlin 1904.

Die Tätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1902. S.-A. Berlin d. J.

Kammerer, Ist die Unfreiheit unserer Kultur eine Folge der Ingenieurkunst? Rede in der Halle der Kgl. Technischen Hochschule. Berlin 1903.

Jahrbücher des Vereins von Altertumsfreunden im Rheinlande. H. 108—110. Bonn 1902. 03.

Achtzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1902. Breslau 1903.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts [in Chemnitz]. Jahrg. 17. II. — Das Klima des Königreichs Sachsen. H. 7. — *Schreiber, Paul,* Kritische Bearbeitung der Luftdruckmessungen im Königr. Sachsen während der Jahre 1866—1900. Chemnitz 1903.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N. F. Bd. 10, H. 4. Danzig 1902.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Jahrg. 48 (1902), No. 3. 4. Dresden 1903.

Die Siegel des Adels der Wettiner Lande bis zum Jahre 1500. Im Auftrage der Kgl. Sächs. Staatsregierung herausg. von *Otto Posse.* Bd. 1. Dresden 1903.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1902, Jan.—Dez. Dresden d. J.

Verzeichnis der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1903 u. Wintersem. 1903/04. — Personalverzeichnis der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule f. d. Sommersem. 1903 u. Wintersem. 1903/04.

Mitteilungen des Vereins für die Geschichte und Altertumskunde von Erfurt. H. 24, I. II. Erfurt 1903.

Sitzungsberichte der physikal.-medizinischen Societät in Erlangen. H. 34 (1902). Erlangen 1903.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. f. das Rechnungsjahr 1901/02. Frankfurt 1903.

Helios. Abhandlungen und monatliche Mitteilungen aus dem Gesamtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Jahrg. 20. Berlin 1903.

Jahrbuch f. d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1903. Freiberg d. J.

Programm der Kgl. Sächs. Bergakademie zu Freiberg f. d. J. 1903/04. Freiberg 1903.

Verzeichnis der Vorlesungen auf der Großherzogl. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Gießen. Sommer 1903, Winter 1903/04; Personalbestand W. 1902/03, S. 1903. — Satzungen der Universität Gießen. 4. Nachtrag zu der Ausgabe von 1889. — Bestimmungen über die Promotion bei der Großh. Landes-Universität zu Gießen. — 86 Dissertationen aus den Jahren 1902 u. 1903.

Bostroem, Eugen, Traumatismus und Parasitismus als Ursachen der Geschwülste (Progr.). — *Krüger, Gust.*, Kritik und Überlieferung auf dem Gebiete der Erforschung des Urchristentums (Festrede). Gießen 1902. 03.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausg. von *R. Jecht.* Bd. 78. Görlitz 1902.

Codex diplomaticus Lusatiae superioris. Bd. 2. H. 2. 3. Görlitz 1901. 02.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. N. F. Philologisch-historische Klasse. Bd. 7. No. 1—3. Math.-phys. Klasse. Bd. 2. No. 1 u. 4. Göttingen 1903.

Gauss, Karl Friedr., Werke. Bd. 9. Herausg. von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig 1903.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1902, No. 6. 1903, No. 1—5. Philol.-hist. Kl. 1902, No. 5. 1903, No. 1—5. Geschäftliche Mitteilungen. 1902, H. 2. 1903, H. 1. Göttingen d. J.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1902/03. Grimma 1903.

Nova Acta Academiae Caes. Leopoldino-Carolinae germanicae naturae curiosorum. Tom. 80. Halis 1903.

Leopoldina. Amtl. Org d. Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 38, No. 11. 12. H. 39, No. 1—11. Halle 1902. 03.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Organ des naturwiss. Vereins für Sachsen und Thüringen. Bd. 75. H. 3—6. Bd. 76. H. 1. 2. Stuttgart 1903.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 4. H. 3. Leipzig 1903.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 12, Heft 1. Heidelberg 1903.

Mitteilungen der Großh. Sternwarte zu Heidelberg. Herausg. von *W. Valentiner.* II. Veröffentlichungen der Großh. Sternwarte zu Heidelberg. Bd. 2. Karlsruhe 1903.

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Herausg. vom Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika Dar-es-Salâm. Bd. 1. H. 3—6. Heidelberg 1903.

Programm der Großherzogl. Badnischen Technischen Hochschule zu Karlsruhe für das Studienjahr 1903/04. — 6 Dissertationen a. d. J. 1902. 03. — *Oechelhaeuser, Ado. v.*, Der kunstgeschichtliche Unterricht an den deutschen Hochschulen (Festrede). Karlsruhe 1902.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1902/3. — Verzeichnis der Vorlesungen. Winter 1902/03, Sommer 1903. — *Baumgarten, Otto,* Die Voraussetzungslosigkeit der protestantischen Theologie (Rektoratsrede). — *Reinke, Joh.,* Studien über die vergleichende Entwickelungsgeschichte der Laminariaceen (Progr.). — *Schöne, Alfr.,* Über die beiden Renaissancebewegungen des 15. u. 18. Jahrhunderts (Rede). Kiel 1903. — 160 Dissertationen a. d. J. 1902/03.

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Herausg. von der Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Im Auftrage des Königl. Minist. für Landwirtschaft, Domänen usw. N. F. Abteilung Kiel. Bd. 7. 8 u. Erghft. Kiel und Leipzig 1903.

Schriften des naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. Bd. 12. H. 2. Kiel 1902.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 43 (1902). Königsberg 1902.

Jahresbericht des Nikolaigymnasiums in Leipzig. 1903.

Weigand, Gust., Linguistischer Atlas des dacorumänischen Sprachgebietes. Lief. 4. Leipzig 1903.

Zeitschrift des Vereins für Lübeck. Geschichts- und Altertumskunde. Bd. 8. H. 2. Lübeck 1900.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Meißen von Juli 1902 bis Juli 1903. Meißen 1903.

Abhandlungen der math.-phys. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 22, Abt. 1. München 1903.

Abhandlungen der histor. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 22, Abt. 3. München 1903.

Abhandlungen der philos.-philolog. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 22, Abt. 2. München 1903.

Zittel, Karl A. v., Die wissenschaftliche Wahrheit (Rede). — *Knapp, Geo. Friedr.*, Justus von Liebig nach dem Leben gezeichnet (Festrede). München 1902. 03.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1902, H. 3. 1903, H. 1—3. München d. J.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1902, H. 3. 4. 1903, H. 1—3. München d. J.

44. Plenarversammlung der histor. Kommission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Sekretariats. München 1903.

Sitzungsberichte der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie in München. Bd. 18. H. 1. 2. München 1903.

Abhandlungen der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 15. H. 1. — Jahresbericht für 1902. Nürnberg 1903.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1902. Hft. 1—4. Nürnberg d. J.

Historische Monatsblätter für die Provinz Posen. Jahrg. 2, No. 1—12. Jahrg. 3, No. 7—12. Posen 1902.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 17, H. 2. Posen 1902.

Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geodätischen Instituts (in Potsdam). N. Folge No. 11—13. — Zentralbureau der internationalen Erdmessung. N. F. der Veröffentlichungen. No. 8. Berlin 1903.

Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 14. — Photographische Himmelskarte. Bd. 3. Potsdam 1903.

Veröffentlichung der Kgl. Württemberg. Kommission für die internationale Erdmessung. — Relative Schwermessungen. III. Ausgeführt von *K. R. Koch*. S.-A. Stuttgart 1903.

Die erdmagnetischen Elemente von Württemberg und Hohenzollern. Gemessen und berechnet für 1. Jan. 1901 im Auftrage und unter Mitwirkung der Kgl. Württemberg. Meteorolog. Zentralstation von *Karl Haussmann*. Herausg. von dem Kgl. Statistischen Landesamt. Stuttgart 1903.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Herausg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 12 (1903). Stuttgart d. J.

Tharander forstliches Jahrbuch. Bd. 52, 2. Bd. 53, 1. 2 u. Beihft. Dresden 1902. 03.

Mitteilungen des Vereins für Kunst und Altertum in Ulm und Oberschwaben. H. 10. Ulm 1902.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 56. Wiesbaden 1903.

Sitzungsberichte der physikal.-medizin. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1902, No. 3—6. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medizin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. 35, No. 4—7. Würzburg 1903.

Österreich-Ungarn.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti (Agram). Svez. 17. 1902. U Zagrebu 1903.

Rad Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Kń. 149—152. U Zagrebu 1902. 03.

Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Izd. Jugoslav. Akad. znanosti i umjetnosti. Svez. 22. U Zagrebu 1902.

Starine, na sviet izdaje Jugoslav. Akad. znanosti i umjetnosti. Kń. 30. U Zagrebu 1902.

Vjestnik kr. hrvatsko-slavonsko-dalmatinskog zemaljskog arkiva. God. 5, Svez. 1. 2, I. 3. 4. U Zagrebu 1902. 03.

Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Kń. 7, Svez. 2, Kń. 8, Svez. 1. U Zagrebu 1902. 03.

Zeitschrift des Mährischen Landesmuseums. Herausg. von der Mährischen Museumsgesellschaft (Deutsche Sektion). Bd. 2. 3. — Časopis Moravského musea zemského. Ročn. 3. Brünn 1901.

Magyar. tudom. Akadémiai Almanach 1903. Budapest d. J.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akademie d. Wissenschaften. Bd. 18 (1900). Budapest 1903.

Értekezések a nyelv-és-széptudományok Köréböl. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 18, Sz. 1—5. Budapest 1902. 03.

Értekezések a Társadalmi Tudományok Köréböl. Köt. 12, Sz. 3—9. Budapest 1903.

Értekezések a Történeti Tudományok Köréböl. Köt. 17, Sz. 9—10. Köt. 18, Sz. 1—10. Köt. 19, Sz. 1—5. Budapest 1898—1901.

Archaeologiai Értesitö. A Magyar. tudom. Akad. arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatnak Közlönye. Köt. 22, Sz. 4. 5. Köt. 23, Sz. 1—3. Budapest 1902. 03.

Mathematikai és természettudományi Értesitö. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 20, Füz. 3—5. Köt. 21, Füz. 1. 2. Budapest 1902. 03.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 32, Füz. 3. 4. Köt. 33, Füz. 1. Budapest 1902. 03.

Monumenta Hungariae historica (Magyar Történelmi Emlékek). Köt. 31. Budapest 1903.

Monumenta Hungariae juridico-historica. Corpus statutorum Hungariae municipalium. Tom. 5, Pars 1. Budapest 1902.

Rapport sur l'activité de l'Académie Hongroise des sciences en 1902. Budapest 1903.

Magyarországi tanulók Külföldön. IV. Budapest 1902.

Goldziher, Ignaz, A buddhizmus hatása az iszlámra. Budapest 1903.

Karácsonyi, János, A magyar nemzetségek a XIV. század Közepéig. Köt. III, 1. Budapest 1901.

Lennhossék, M. v., Die Entwickelung des Glaskörpers. Vorgelegt der Ungar. Akademie der Wissensch. Leipzig 1903.

Munkacsi, B., Vogul népköltési gyüjtemény. Köt. 1. Supplem. Budapest 1902.

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1903. Winter-Sem. 1903/04. — Übersicht der akademischen Behörden im Studienjahre 1903/04. — Die feierliche Inauguration des Rektors f. d. Studienjahr 1902/03.

Mitteilungen des naturhistorischen Vereins für Steiermark. H. 39 (1902). Graz 1903.

Mitteilungen des Vereins der Ärzte in Steiermark. Jahrg. 39. Graz 1902.

Regia litt. Universitas Hung. Claudiopolitana Joannis Bolyai in memoriam. Claudiopoli (Klausenburg) 1902.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Math.-naturw. Cl. 1902, No. 8—10. 1903, No. 1—7. Philol. Cl. 1902, No. 8—10. 1903, No. 1—7. Krakau d. J.

Atlas geologiczny Galicyi (Wydanictwo Komis. fizyograf. Akad. umiej. w Krakowie) zesz. 14 (Text u. Atlas). W. Krakowie 1903.

Bibliografia historyi polskiej (Wydan. Akad. umiej. w Krakowie) No. 41. Kraków 1902. 03.

Biblioteka pisarzów polskich (Wydanictwa Akad. umiej. w Krakowie). No. 42—46. W Krakowie 1903.

Collectanea ex Archivio Collegii historici (Archivum komisyi historycznej). Tom. 9. Kraków 1903.

Katalog literatury naukowej polskiej. Tom 2 (1902), zesz. 3. 4. Krakow 1903.

Materiały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne wydawane staraniem komisyi antropologicznej Akad. umiejętn. w Krakowie. Tom 6. W Krakowie 1903.

Materiały i prace komisyi językowej Akad. umiejętn. w Krakowie. Tom 1, zesz. 2. Tom 2, zesz. 1. W. Krakowie 1903.

Rocznik akademii umiejętności w Krakowie. Rok 1901/02. W Krakowie 1902.

Rozprawy Akademii umiejętności. — Wydział filologiczny. T. 34. 35, I. 37. (Ser. II. T. 19. 20, I. 22). — Wydział historyczno-filozoficzny. T. 44. (Ser. II. T. 19). — Wydział matemat.-przyrodniczy. T. 42. (Ser. III. T. 2. A. B.). W Krakowie 1902.

Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. T. 7, zesz. 3. W. Krakowie 1903.

Sprawozdanie komisyi fizyograficznéj. Tom 36. Kraków 1902.

Federowski, Mich., Lud białoruski na Rusi litewskiej. Tom 3, II. (Wydanictwo komisyi antropol. Akad. umiej.) W Krakowie 1903.

Mitteilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 15, 1—6. Laibach 1902.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko Letnik 12. V Ljubljani 1902.

Chronik der ukrainischen (ruthenischen) Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften. H. 11—14. — Sammelschr. der mathem.-naturwiss.-ärztl. Sektion der Ševčenko-Gesellschaft. Bd. 9. Lemberg 1902. 03.

Lud, Organ towarzystwa ludoznawczego we Lwowie. T. 9, zesz. 1—3. We Lwowie 1903.

Almanach České Akademie Císaře Františka Josefa. Ročn. 13. 1903. V Praze d. J.

Bibliotéka klassiků řeckých a římských. Čisl. 5. 7. V Praze 1902.

Rozpravy České Akad. Cís. Františka Josefa. Tříd. I. Ročn. 10. Tříd. II. Ročn. 11. — Tříd. III. Ročn. 9. Čisl. 1. V Praze 1902. 03.

Věstnik České Akad. Cís. Františka Josefa. Ročn. 11. V Praze 1902.

Sbírka pramenů. Skup. 1. Rad. 1, čisl. 3. 4. Rad. 2, čisl. 4. 5. Skup. II, čisl. 5. V Praze 1902. 03.

Zíbrt, Čeněk, Bibliografie české historie. Díl 2. V Praze 1902.

Kolář, Mart., Českomoravská Heraldika. I. V Praze 1902.

Spisy Jana Amosa Komenského. Čisl. 5. 6. V Praze 1902.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften für das Jahr 1902. Prag 1903.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Klasse. Jahrg. 1902. — Philos.-histor.-philolog. Klasse Jahrg. 1902. Prag 1903.

Doppler, Ch., Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels. Zur Feier seines 100. Geburtstages neu herausgeg. von *F. J. Studnička.* Prag 1903.

Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Im Auftrage der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen geleitet von *A. Hauffen.* Bd. 1. H. 2. Bd. 4. H. 2. Bd. 5. H. 1. Prag 1902. 03.

Rechenschafts-Bericht über die Tätigkeit der Gesellschaft zur Förd. deutsch. Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. 1902. Prag 1903.

Vorläufiger Bericht über eine archäologische Expedition nach Kleinasien, unternommen im Auftrage der Ges. z. Förderung deutsch. Wissensch. etc. in Böhmen von *Jul. Jüthner, Fritz Knoll, Karl Patsch, H. Swoboda.* Mitteilung No. 15 der Ges. z. Förd. etc. Prag 1903.

Ball, Osc., Versuche über die Verwesung pflanzlicher Stoffe. S.-A. Jena 1902.

Kraus, R. und *Keissl, B.,* Über den Nachweis von Schutzstoffen gegen Hundswut beim Menschen. Ausgeführt mit Unterstützung der Ges. z. Förd. deutsch. Wiss. etc in Böhmen. S.-A. Jena 1902.

Kraus, R. und *Maresch, R.,* Über die Bildung von Immunsubstanzen gegen das Lyssavirus (desgl.). S.-A. Leipzig 1902.

Bail, Osc., Untersuchungen über natürliche und künstliche Milzbrandimmunität (desgl.) S.-A. Jena 1903.

Richter, Oswald, Untersuchungen über das Magnesium und seine Beziehungen zur Pflanze (desgl.). S.-A. Wien 1902.

Wiechowski, Wilh., Über den Einfluß der Analgetica auf die interkranielle Blutzirkulation (desgl.). S.-A. Leipzig 1902.

54. Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag über d. J. 1902. Prag 1903.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1902. Jahrg. 63. Prag 1903.

Definitive Resultate aus den Prager Polhöhen-Messungen von 1889 bis 1892 und von 1895 bis 1899. Auf öffentl. Kosten herausg. von *L. Weineck*. Prag 1903.

Ordnung der Vorlesungen an der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag. Somm.-S. 1903. — Personenstand 1902/03. 1903/04.

Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 41, No. 1—4. Prag 1903.

Sitzungsberichte des deutschen naturw.-medizin. Vereins für Böhmen „Lotos". N. F. Bd. 22. Prag 1902.

Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde zu Preßburg. N. F. H. 14. Preßburg 1903.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 25 (1902), No. 12. Anno 26 (1903), No. 1—11. Indice generale: Vol. 1—23 (1878—1900). Spalato 1903.

Atti del Museo civico di storia naturale di Trieste. 10 (N. S. Vol. 4). Trieste 1903. — *Marchesetti*, *Carlo*, Apunti sulla Flora Egiziana. ib. 1902.

Almanach der Kais. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 51. 52. Wien 1901. 02.

Anzeiger der Kais. Akademie der Wissenschaften. Math.-phys. Kl. 1902. No. 22—27. 1903. No. 1—17. 21—24.

Archiv für österreichische Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Kommission der Kais. Akademie d. Wissensch. Bd. 91, II. 92, I. Wien 1902.

Denkschriften der Kais. Akademie d. Wissensch. Mathem.-naturw. Kl. Bd. 72. Philol.-hist. Kl. Bd. 48. Wien 1902.

Fontes rerum Austriacarum. Österreichische Geschichtsquellen, hrsg. von d. histor. Kommission der Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 55. Wien 1902.

Mitteilungen der Erdbeben-Kommission der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. N. Folge. No. 9—13. Wien 1902.

Südarabische Expedition. Veröffentlicht von der Kais Akademie der Wissenschaften Bd. 5, Teil 1. — Schriften der Balkankommission. Linguistische Abteilung. 2. 3. Wien 1903.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Kl. Bd. 110 (1901) I, No. 8—10. II^b, No. 10. Bd. 111 (1901) I, No. 1—9. II^a, No. 1—10. II^b, No. 1—10. III, No. 1—10. — Register zu Bd. 106—110 (1902). — Philos.-histor. Kl. Bd. 144. 145 (1902. 03).

Abhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 2. H. 2. Wien 1903.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 52, H. 9. 10. Bd. 53, H. 1—6. Wien 1902. 03.

Publikationen für die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureaus. Bd. 12 Längenbestimmungen. Wien 1900. — Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des

k. u. k. militärgeographischen Institutes in Wien. Bd. 19. Astronomische Arbeiten. Wien 1902.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums Bd. 17, No. 3. 4. Bd. 18, No. 1—3. Wien 1902. 03.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 20, H. 1. Wien 1903.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 51 (1901), H. 3. 4. Jahrg. 52 (1902), H. 2—4. Jahrg. 53 (1903), H. 1. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1902, No. 11—18. Jahrg. 1903, No. 1—15. Wien d. J.

Mitteilungen der Sektion f. Naturkunde des Österreichischen Touristen-Club. Jahrg. 14. Wien 1902.

Belgien.

Académie d'archéologie de Belgique. Bulletin. V. Sér. des Annales. Part. II, 8 (1902). 1903, 1—3. Anvers d. J.

Paedologisch Jaarboek onder Redactie van *M. C. Schouyten*. Jaarg. 3. 4. Antwerpen 1902. 03.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1903. (Année 69). Bruxelles d. J.

Académie Roy. de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. 1902, No. 9—12. 1903, No. 1—10. — Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts. 1902, No. 9—12. 1903, No. 1—10. Bruxelles d. J.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. par l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 62, Fasc. 4. T. 63, Fasc. 1—7. Bruxelles 1903.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publ. par l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 60—62. Bruxelles 1902. 03.

Analecta Bollandiana. T. 22. Bruxelles 1903. — Propylaeum ad acta Sanctorum Novembris. ib. 1902.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 46. Bruxelles 1902.

Annales de la Société malarologique de Belgique. T. 36. 37 (1901. 02). — Bulletins des séances. Année 1901. 02. Bruxelles 1902. 03.

Bulletin du Jardin botanique de l'État à Bruxelles. Vol. 1, Fasc. 4. Bruxelles 1903.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 19, Fasc. 2. T. 20, Fasc. 1. 2. Louvain 1902. 03.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1902, No. 6. 1903, No. 1—5. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturv. og math. Afd. 6. Række. T. 11, No. 5. 6. T. 12, No. 3. Kjøbenhavn 1902. 03.

Christensen, William, Dansk Statsforvaltning: det 15. århundrede. Udg. med understøttelse at det Kong. Danske vidensk. Selskab. København 1903.

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer. Bulletin des resultats acquis pendant les courses périodiques, publ. par le Bureau du conseil. Année 1902/03. No. 1—7. — Publications de circonstance. No. 1—5. — Rapports et Procès-verbaux des réunions. Vol. 1. Copenhague 1903.

England.

Rectorial Adresses delivered in the University of Aberdeen 1835—1900. Edit. by *Peter John Andersen*. Aberdeen 1902.

Aberdeen University Studies. No. 7. vol. 1. 2. Aberdeen 1902.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 11, P. 7. Vol. 12, P. 1—3. Cambridge 1902. 03.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. III. Vol. 6, No. 4. — Vol. 24. Sect. A, P. 1. 2. Sect. B, P. 1—3. Sect. C, P. 3. Dublin 1902. 03.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 32, Sect. A, P. 3—6. Sect. B, P. 1. 2. Sect. C, P. 1. Dublin 1902. 03.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 9, P. 5. Dublin 1900. 01.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Vol. 7, No. 14—16. Vol. 8, No. 1. Dublin 1902.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 24, No. 4. 5. Edinburgh 1903.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 40, P 1. 2. Vol. 42. Edinburgh 1901. 02.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol. 15 [P. 1]. Session 131 (1901/02). Edinburgh 1903.

Transactions of the Edinburgh Geological Society. Vol. 8, P. 2 and Special Part. Edinburgh 1903.

Otia Merseiana. Vol. 3. Liverpool 1903.

Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 17. Liverpool 1903.

Proceedings of the R. Institution of Gr. Britain. Vol. 17, P. 1. London 1903.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 71. 72, No. 469—485. — Reports to the Malaria Committee. Ser. 8. — Reports of the sleeping sickness Commission. No. 1—4. London 1902. 03.

Transactions of the R. Society of London. Ser. A. Vol. 201. 202. Ser. B. Vol. 196, p. 1—294. London 1903.

Herdman, W. A., Report to the Government of Ceylon on the Pearl Oyster Fisheries of the Gulf of Manaar. Publ. by the Royal Society. London 1903.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 35. No. 790—819. Ser. II. Vol. 1, P. 1. 2. London 1903.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1903, No. 1—6. London d. J.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 47, P. 1—6. Manchester 1903.

Report of the Manchester Museum Owens College for 1902/03. — Notes from the Manchester Museum. No. 10—14. Manchester 1902. 03.

Trecentenary of the Bodleian Library. Oxford 1902.

Frankreich.

Mémoires des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. VI. Sér. T. 2. Cah. 1. Paris et Bordeaux 1903.

Procès-verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Année 1901/02. Paris et Bordeaux d. J.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le Département de la Gironde de Juin 1901 à Mai 1902. Note de *G. Rayet*. Bordeaux 1902.

Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. T. 33 (Sér. IV, T. 3). Fasc. 1. Cherbourg 1902.

Annales de l'Université de Lyon. N. S. Sciences. Médecine. Fasc. 10. 11. Paris et Lyon 1902. 03.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 13. Marseille 1903.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section de médecine. Sér. II. T. 1, No. 1. — Mémoires de la section des sciences. Sér. II. T. 3, No. 2. Montpellier 1902. 03.

Bulletin des séances de la société des sciences de Nancy. Sér. III. T. 3, Fasc. 2—4. T. 4, Fasc. 1. 2. Paris et Nancy 1902. 03.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances. Sér. II. T. 2. Sess. de 1903. Paris d. J.

Journal de l'École polytechnique. Ser. II. Cah. 8. Paris 1903.

Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1902, No. 5—8. 1903, No. 3. 4. Paris d. J.

Annales de l'École normale supérieure. III. Sér. T. 19, No. 12 et Suppl. T. 20, No. 1—10. Paris 1902. 03.

La Revue de Paris. Année 10, No. 1. Paris 1903.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 30, No. 4. T. 31, No. 1. 2. Paris 1902. 03.

Bulletin de la Société scientifique et médicale de l'ouest. Tom. 11, No. 3. 4. T. 12, No. 1. 2. Rennes 1902. 03.

Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Sér. X. T. 2. Toulouse 1902.

Bulletin de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. T. 2. No. 3. 4. Toulouse 1899.

Annales du midi. Revue de la France méridionale, fondée sous les auspices de l'Université de Toulouse. Ann. 14. 15 (No. 55—59). Toulouse 1902. 03.

Bibliothèque méridionale, publ. sous les auspices de la Faculté des lettres de Toulouse. Ser. I, T. 8. Ser. II, T. 8. Toulouse 1903.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Ser. II. T. 4, Fasc. 3. 4. T. 5, Fasc. 1. 2. Paris et Toulouse 1902. 03.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique [Athen]. Année 25 (1901), No. 7—12. Année 26 (1902), No. 1—6. Paris 1903.

Mitteilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts. Athenische Abteilung. Bd. 27, H. 3. 4. Bd. 28, H. 1. 2. Athen 1902. 03.

Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθήναις Ἐπιστημονικῆς Ἑταιρείας. T. 14. No. 4. Tom. 15. No. 1. Athen 1902. 03.

Τὸ ἐν Ἀθήναις ἐθνικὸν Πανεπιστήμιον. 3 Progr. 1902. 03.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigd te Amsterdam voor 1902. Amsterdam 1903.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks. Deel 4, No. 1. Deel 5, No. 1—3. Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 8, No. 3—5. Sect. II. Deel 9, No. 4—9. Amsterdam 1901. 02.

Verslagen en mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afd. Letterkunde. IV. Reeks. Deel 5. Amsterdam 1903.

Total Eclipse of the sun, Mai 18, 1901. Dutsch Observations. I. Publ. by the Eclipse Committee of the Kon. Academy, Amsterdam s. a.

Verslagen van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afdeeling der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Deel 11. Amsterdam 1903.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. discipl. Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1904. — *Damsté, Pet. Helb.*, Feriae aestivae. Carmen in certamine poetico Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Acced. 2 poemata laudata. Amstelodami 1903.

Revue semestrelle des publications mathématiques. T. 11, P. 1. 2. Amsterdam 1903. — Table des matières cont. dans les 5 Vol. 1898—1902.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Uitg. door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. 2. Reeks. Deel 6. St. 1 — Wiskundige Opgaven. N. R. Deel 8 (1899—1902). Amsterdam 1902. 03.

Programma van jaarlijksche prijsvragen voor het j. 1903, ter beantwoording uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam.

Verslag van de 124e Algem. Vergaadering van het Wisk. Genootschap gehouden te Amsterdam 25. April 1903.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. Ser. II. T. 8, Livr. 1—5. Harlem 1903.

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der wetenschappen te Haarlem. Derde Verzameling. Deel 5, 3. Haarlem 1903.

Programma van de Hollandsche Maatschappij de wetenschappen te Haarlem voor het jaar 1903.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 8, P. 2. 3. Harlem 1902. 03.

Handelingen en mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1901/02. 1902/03. Leiden 1902. 03.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1900/01. 1902/3 Leiden 1902. 03.

Tijdschrif voor Nederlandsche taal-en letterkunde. Uitgeg. vanwege de Maatschapp. d. Nederl. Letterkunde. Deel 20, Afd. 3. 4. Deel 21, Afd. 1—4. Deel 22, Afd. 1. 2. Leiden 1901—03.

Annalen der Sternwarte in Leiden. Bd. 8. Haag 1902. — Catalogus van de booken aanwezig in de Bibliotheek der Sterrenwacht te Leiden. Uitg. door *H. G. v. d. Sande Bakhuyzen*. 's Gravenhage 1902. — *Pannekoek, Ant.*, Untersuchungen über den Lichtwechsel Algols. Leiden 1902.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden. 1900—1902.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging [Leiden]. Ser. III. Deel 2, Stuk 4. Nijmegen 1903. — Prodromus Florae Batavae. Vol. 1, P. 3. Edit. altera. Nijmegen 1902.

Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de Rotterdam. 1902.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden den 9. Juni 1902 en 2. Juni 1903. Utrecht d. J.

Verslag van het verhandelnde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 10. Jun. 1902 en 3. Juni 1903. Utrecht d. J.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 23. 24. 's Gravenhage 1902. 03.

Verslag van de algemeene vergad. der leden van het Historisch Genootschap gehouden te Utrecht op 14. April 1903. Amsterdam d. J.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Ser. III. No. 15. 17. 19. Amsterdam 1902. 03.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. 5. Reeks. IV, Afl. 2. Utrecht 1903.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 24—30. 32—35. Firenze 1902. 03.

Atti e Rendiconti dell' Accademia di scienze, lettere ed arti di Acireale. N. S. Vol. 10 (1899/1900). [Rendiconti e] Memorie. Ser. III. Vol. 1. 1901/02. Classe di lettere e arti. Classe di scienze. Acireale 1902. 03.

Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. V. T. 8. — Rendiconto delle sessioni. N. S. Vol. 4. Bologna 1899—1900.

Le Opere di Galileo Galilei. Ediz. nazionale sotti gli auspici di S. M. il Re d' Italia. Vol. 12. 13. Firenze 1902. 03.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze storiche e morali. Vol. 19, Fasc. 9. Vol. 20, Fasc. 1. Vol. 21, Fasc 4. Milano 1902. 03.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 35. 36, Fasc. 1—16. — Indice generale dei lavori dal 1889 al 1900. Milano 1902. 03.

Atti della Fondazione scientifica Cagnola dalla sua instituzione in poi. Vol. 18. Milano 1903.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Ser. III. Vol. 4. Modena 1902.

Quaternus de excadenciis et revocatis capitanatae de mandato Imperialis majestatis Frederici II nunc primum ex cod. Casinensi cura et studio monachorum ordinis S. Benedicti in lucem profertur. Montecassino 1903.

Società Reale di Napoli. Atti della R. Accademia di archeologia, lettere e belle arti. Vol. 22 (1902). — Rendiconto delle tornate e dei lavori della R. Accad. di archeologia, lettere e belle arti. N. S. Anno 16 (1902) Genn.—Apr. 17 (1903) Genn.—Marz. E. R. Accademia Ercolanese. Indice generale dei lavori pubbl. dal 1757 al 1902. — Atti della R. Accad. delle scienze fisiche e matematiche. Ser. II. Vol. 11. Rendiconto. Ser. III. Vol. 8 (Anno 41), Fasc. 8—12. Vol. 9 (Anno 42), Fasc. 1—7. — Atti della R. Accad. delle scienze morali e politiche. Vol. 34. Rendiconto. Anno 40 (1901). 41 (1902). Napoli 1901—03.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 18. Padova 1902.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 16 (1902), Fasc. 6. T. 17 (1903), Fasc. 1—6. Palermo d. J.

Università di Perugia. Annali della Facoltà di Medicina. Vol. 2, Fasc. 1. Vol. 3, Fasc. 1. Perugia 1902. 03.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Filosofia e filologia. Vol. 16. 17. Pisa 1902. 03.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie. Vol. 19. — Processi verbali. Vol. 13. Magg. 1902. — Lugl. 1903. Vol. 13. Genn.—Marzo. Pisa 1902. 03.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V, P. II (Notizie degli scavi), Vol. 10, 10—12. Vol. 11, 1—8. — Rendiconti. Vol. 11 (1902), Fasc. 11. 12. Vol. 12 (1903), Fasc. 1—10. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Ser. V. Rendiconti. Vol. 11 (1902), II. Sem., Fasc. 12. Vol. 12 (1902) [I. Sem.], Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—11. Rendiconto dell' adunanza solenne del 7. Giugn. 1903. Roma 1902. 03.

Mitteilungen des Kais. Deutschen Archäologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bollettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 17, H. 3. Bd. 18, H. 1. 2. Roma 1902. 03.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 14, No. 1—10. Suppl. al Fasc. 1. 2. Vol. 15, No. 1—6. Siena 1902. 03.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 38, Disp. 1—15. Torino 1903.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II. T. 52. 53. Torino 1903.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1902 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1903.

Rumänien.

Buletinul Societății de sciințe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucaresci-România. Anul 11, No. 5. 6. Anul 12, No. 1—4. Bucuresci 1903.

Bulletin de l'herbier de l'Institut botanique de Bucarest. Année 1, No. 2. Bucarest 1902.

Rußland.

Meddelanden af Geografiska Föreningen i Finland. 6 (1901—03). Helsingfors 1903.

Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan. Ser. II. T. 11. 12. 13, No. 1. 2. Kasan 1902. 03.

Učenyja Zapiski Imp. Kazanskago Universiteta. 1901, T. 69, No. 11. 12. T. 70, No. 1—11. Kasan 1902—03.

Universitetskija Izvěstija. God 42, No. 11. 12. God 43, No. 3—10. Kiev 1902. 03.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1902, No. 3. 4. 1903, No. 1. Moscou d. J.

Učenyja zapiski Imp. Moskovskago Universiteta. Otděl estestvenno-istor. Vyp. 17. 18. Otd. jurid. Vyp. 19—21. Otd. medic. Vyp. 8. Moskva 1902. 03.

Observations faites à l'Observatoire météorologique de l'Université Impér. de Moscou. 1901, Mars—Décembre.

Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Ser. V. T. 16, No. 4. 5. T. 17, No. 1—3. St. Pétersbourg 1902.

Mémoires de l'Académie de sciences de St. Pétersbourg. Sér. VIII. Classe physico-mathématique. Vol. 11. 12. 13, No. 1—5. 7. — Classe historico-philologique. Tom. 4, No. 9. Tom. 5, No. 1—5. Tom. 6, No. 1—4. St. Pétersbourg 1900—02.

Annales de l'Observatoire physique central, publ. par *M. Rykatchew*. Année 1901, P. 1. 2. St. Pétersbourg 1903.

Académie Imp. des sciences. Comptes rendus des séances de la Commission de Seismique permanente. Livr. 1. 2. St. Pétersbourg 1902. 03

Compte rendu de la Commission Impér. archéologique pour l'année 1896—1900. — Materialy po Archeologii Rossii. No. 22—28. — Izvěstija Imp. archeol. kommissii. Vyp. 1—5. — Otčet Imp. arch. komm. za 1896—1900. — Ukazateli k otčetam Imp. arch. komm. za 1882—98. S. Petersbourg 1899—1903.

Acta Horti Petropolitani T. 21, Fasc. 1. 2. S. Peterburg 1903.

Trudy Peterburgskago Obščestva Estestvoispytatelej. Travaux de la Société des naturalistes de St. Pétersbourg. T. 31, 5. T 32, 3. — Protokoly zasědanij. Vol. 33, Liv. 1, No. 4—8. Vol. 34, Liv. 1, No. 1. S. Pétersbourg 1902. 03.

Obozrěnie prepodavanija nauk v Imp. S. Peterburgsk. Universitetě na 1901/02.

Otčet o sostojanij i dějatelnosti Imp. S. Petersburgsk. Universita za 1902. S. Petersburg 1903.

Žurnaly Zasědanij sověta Imp. S. Petersburgsk. Universiteta za 1902. No. 58. S. Petersburg 1903.

Zapiski istoriko-filologičeskago Fakulteta Imp. S. Peterburgskago Universiteta. Čast 67—70. — Tesserae plumbeae Urbis Romae et suburbii. Tab. 1—12. Petropoli 1903.

Vizantijskij Vremennik (*Βυζαντινά Χρονικά*), izdavaemyi pri Imp. Akad. nauk. T. 8. 9, Vyp. 1. 2. S. Petersburg 1901. 02.

Publications de l'Observatoire central Nicolas (Poulkova). Ser. II. Vol. 9, 1. 2. 10. 12. 13. 17, 1. 18, 1. S. Petersburg 1903.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 46. Riga 1903.

Monatsberichte der Horizontal-Pendel-Station im Physikalischen Observatorium zu Tiflis im J. 1901, No. 1—3. Tiflis 1901.

Schweden und Norwegen.

Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. 16. 1901 Stockholm 1902/03.

Bergens Museum. Aarbog for 1902, H. 3. 1903, H. 1. 2. — Aarsberetning for 1902. Bergen 1903.

Sars, G. O. An Account of the Crustacea of Norway. Vol. 4, P. 11—14. Bergen 1902.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. 23. 24. Kristiania 1901. 02.

Schröter, J. Fr., Untersuchung über die Eigenbewegung von Sternen in der Zone 65°—70° nördl. Declination. Publikation des Universitäts-Observatoriums in Christiania. Christiania 1903.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1902. Christiania 1902.

Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania. Math.-naturvid. Kl. 1902. Hist.-filos. Kl. 1902. Kristiania 1901. 02.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 37 (1901) I. II.

Acta mathematica. Hsg. v. *G. Mittag-Leffler*. 27. Stockholm 1903. 1902.

Arkiv för botanik, utg. af K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 1, H. 1—3. Stockholm 1903.

Arkiv för kemi, mineralogi och geologi, utg. af Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 1, H 1. Stockholm 1903.

Arkiv för mathematik, astronomi och fysik, utg. af Svenska Vetenskaps-Akademien Bd. 1, H. 1/2. Stockholm 1903.

Arkiv för zoologi, utg. af Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 1, H. 1/2. Stockholm 1903.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Årsbok för år 1903. Stockholm 1903.

Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 28. Stockholm 1902/03.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 36. 37, 1. 2. Stockholm 1902/03.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Årg. 59. (1901.) Stockholm 1902/03.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 40—42 (Ser. II, Bd. 26—28). Aarg. 1898—1900. Stockholm 1902. 03.

Lefnadsteckningar öfver Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens efter år 1854 aflidna Ledamöter. Bd. 4, H. 3. Stockholm 1903.

Jac. Berzelius, Reseanteckningar. Utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien genom *H. G. Söderbaum*. Stockholm 1903.

Antiqvarisk Tidskrift för Sverige, utg. af Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademien. D. 17, H. 1. 2. Stockholm s. a.

Medelanden från Nordiska Museet. 1901. Stockholm 1903. — Sommarbilder från Skansen. — Vinterbilder från Skansen. Utg. at *Art. Hazelius*. s. l. e. a.

Entomologisk Tidskrift utg. af Entomologiska Föreningen i Stockholm. Årg. 23 (1902). Stockholm d. J.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Bd. 6, No. 2. 4. 5. Bd. 7. Stockholm 1898. 1903.

Tromsø Museums Aarshefter. 21. 22. 24 (1898. 99. 1901). Tromsø 1902.

Det Kong. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. 1902. Trondhjem 1903.

Hildebrand Hildebrandsson, H., Rapport sur les observations internationales des nuages au comité intern. météorologique. Upsal 1903.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 34 (1902). Upsal 1902/03.

Skrifter utgifn af Kongl. Humanistiska Vetenskaps-samfundet. Bd. 7. Upsala, Leipzig 1901/02.

Eranos. Acta philologica Suecana. *Ed. Vil. Lundström*. Vol. 4, Fasc. suppl. (2—4). Vol. 5. Upsala 1902. 03.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsal. Vol. 5, P. 2 (No. 10). Upsala, Leipzig 2901/02.

Sveriges karta tiden till omkring 1850 af *Sven Lönborg*. Upsal 1903.

Ahlenius, Karl, Ångermanälfvens flodområde. Upsala 1903.

Schweiz.

Jahresverzeichnis der Schweizerischen Universitätsschriften 1902/03. Basel 1903.

Neue Denkschriften der Allgem. Schweiz. Gesellschaft für die ges. Naturwissenschaften. Bd. 38. Basel 1901.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft zu Zofingen (1901) und Genf (1902).

Compte rendu de la Société helvétique des sciences naturelles. Session 84 et 85. Genève 1901. 02.

Taschenbuch der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau. Aargau 1902.

Baseler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. Hrsg. von der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. Bd 2, H. 2. Bd 3, H. 1. Basel 1903.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 15, H. 1. Bd. 16. Basel 1903.

Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus den J. 1902 (No. 1519—1550). Bern 1903.

Collectanea Friburgensia. N. S. Fasc. 5. Friburgi 1902.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. 34, P. 3. Genève 1903.

Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde. Hrsg. vom Schweizerischen Landesmuseum. N. F. Bd. 4, No. 2—4. Bd. 5, No. 1. Zürich 1902. 03.

Schweizerisches Landesmuseum. 11. Jahresbericht (1902). Zürich 1903.

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Bd. 27. 28. Zürich 1902. 03.

Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft in Zürich. No. 5. Zürich 1903.

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 47, H. 3. 4. Jahrg. 48, H. 1. 2. — Neujahrsblatt a. d. J. 1903 (105. Stück). Zürich 1902. 03.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 65. 66. — Godišnjak. 15 (1901). 16 (1902). — Spomenik 39. 40. Beograd 1902. 03.

Srpske etnografske Sbornik. II. Beograd 1903.

Sbornik za istorii, jesik i knjichevnost spiskoga naroda. Zapisi i natpisi 2. Beograd 1903.

Cvijić, *J.*, Velika jezera Balkanskoga poluostrva. Jesera Makedonije, Stare Srbije i Epira. 10 karata. Beograd 1902.

Nordamerika.

Annual Report of the American Historical Association for the year 1901. Vol. 1. 2. Washington 1902.

Transactions and Proceedings of the American Philological Association. Vol. 33 (1902). Boston d. J.

The Astronomical and Astrophysical Society of America. Meeting 2—4. Reprinted from „Science". [New York] 1900—02.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 23, No. 2. Vol. 24, No. 1. New Haven 1902. 03.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 13. Rochester 1902.

Miscellaneous scientific Papers of the Allegheny Observatory. N. Ser. No. 10—14. Chicago, London etc. s. a.

Maryland Geological Survey. Garrett County. Cecil County (with maps). Baltimore 1903.

Johns Hopkins University Circulars. No. 161—164. Baltimore 1903.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 24, No. 2—4. Vol. 25, No. 1. Baltimore 1902. 03.

American Journal of Philology. Vol. 22, No. 4. Vol. 23. Baltimore 1901. 02.

American chemical Journal. Vol. 27, No. 4—6. Vol. 28, 29, No. 1. 2. Baltimore 1902. 03.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. 20, No. 2—10 und Extra-No. Baltimore 1902.

Johns Hopkins University Celebration of the 25. anniversary of the founding of the University and Inauguration of Ira Remsen. Baltimore 1902.

University of California Publications. Botany. Vol. 1, p. 141—418. Zoology. Vol. 1, p. 1—104. Berkeley 1903.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Vol. 38, 39, No. 1—4. Boston 1902. 03.

Memoirs of the Boston Society of natural history. Vol. 5, No. 8. 9. Boston 1902. 03.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 30, No. 3—7. Vol. 31, No. 1. Boston 1902. 03.

The Museum of the Brooklyn Institute of arts and sciences. Science. Bulletin. Vol. 1, No. 2. 3. — Cold Spring Harbor Monographs. Publ. by the Brooklyn Institute of arts and sciences I. II. New York 1902. 03.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 38, No. 1—3. Vol. 39, No. 5—8. Vol. 40, No. 4—7. Vol. 42. Geol. Ser. Vol. 5, No. 8. Vol. 6, No. 1—4. Cambridge, Mass. 1902.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 26, No. 4. Cambridge, Mass. 1903.

The Harvard Oriental Series. Vol. 4. Cambridge, Mass. 1901.

Bulletin of the Chicago Academy of Sciences. [Vol. 1,] No. 4. Vol. 2, No. 3. Chicago 1900.

The John Crerar Library. 8. Annual Report for 1902. Chicago 1903.

Field Columbian Museum. Publications. No. 66—74 76. Chicago 1902. 03.

The Astrophysical Journal. Vol. 18, No. 1—5. Chicago 1903.

Bulletin of the Lloyd Library of Botany, Pharmacy and Materia medica. Reproduction Series. No. 3. — Mycological Notes by *G. G. Lloyd*. No. 10—14. Cincinnati 1902. 03.

University of Cincinnati Bulletin. No. 1—5. 7. 12. 14. 17. Cincinnati 1900. 02.

Colorado College Studies. Vol. 10. Colorado Springs 1903.

The University of Missouri Studies. Vol. 1, No. 4. 5. Vol. 2, No. 1. Columbia, Miss. 1903.

Laws Observatory University of Missouri. Bulletin. No. 1. Columbia 1902.

Iowa Geological Survey. Vol. 10. Annual Report 1901. Des Moines 1902.

The Journal of comparative Neurology. Ed. by *C. L. Herrick*. Vol. 12, No. 4. Vol. 13, No. 1—3. Granville 1902. 03.

The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of science. Sess. 1900/01. 1901/02. Vol. 10, P. 3. 4. Halifax 1902. 03.

Bulletin of the American Mathematical Society. Ser. II. Vol. 9, No. 4—10. Vol. 10, No. 1—3. Lancaster 1903.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 4, No. 1—4. Lancaster and New York 1903.

The Kansas University Quarterly. Vol. 10, No. 3. — Science Bulletin. Vol. 1. No. 5—12. Lawrence 1902.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 11. Madison 1902.

Memorias de la Sociedad científica „Antonio Alzate". T. 13, Cuad. 5. 6. T. 17, Cuad. 4—6. T. 18, Cuad. 1—5. México 1902.

Bulletin of the Wisconsin Natural History Society. Vol. 2, No. 4. Milwaukee 1902.

Bulletin of the University of Montana. No. 10. Biolog. Series No. 3. No. 17. Geolog. Series No. 1. Missoula, Mont. 1903.

Lick Observatory, University of California. [Mount Hamilton.] Bulletin. No. 27—48. — Publications. Vol. 6. Sacramento 1902. 03.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. 6, P. 1. 2. Vol. 11, P. 1. 2. New Haven 1901/02.

Transactions of the Astronomical Observatory of Yale University. Vol. 5, P. 6. New Haven 1902.

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 15, P. 1. New York 1903.

American Museum of Natural History. Bulletin. Vol. 16. 18, P. 1. Annual Report for 1902. — List of papers publ. in the Bulletin and Memoirs of the America Museum, Vol. 1—16, 1881—1902. New York 1902. 03.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 34, No. 5. Vol. 35, No. 1—4. New York 1902. 03.

American Journal of Archaeology. N. S. Vol. 6, No. 4 and Suppl. Vol. 7, No. 1—3. Norwood Mass. 1903.

Oberlin College. The Wilson Bulletin. No. 41—44. Oberlin, Ohio 1902. 03.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada. Ser. II. Vol. 8. Ottawa 1902.

Geological Survey of Canada. Annual Report. N. S. Vol 12. Maps. — Catalogue of Canadian Birds. P. 2. Ottawa 1902. 03.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Vol 54, P. 2. 3. Vol. 55, P. 1. Philadelphia 1902. 03.

Transactions of the Wagner Free Institute of Science of Philadelphia. Vol. 3, P. 6. Philadelphia 1903.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. Vol. 41, No. 171. Vol. 42, No. 172. 173. Philadelphia 1902. 03.

Memoirs of the California Academy of sciences. Vol. 3. San Francisco 1903.

Proceedings of the California Academy of sciences. Ser. III. Botany. Vol. 2, No. 10. Geology. Vol. 2, No. 1. — Zoology. Vol. 2, Vol. 3, No. 5. 6. — Math.-phys. Vol. 1, No. 8. San Francisco 1903.

Transactions of the meetings of the Kansas Academie of science. Vol. 18 (1901/02). Topeka 1903.

Proceedings of the Canadian Institute. N. S. Vol. 2, P. 5 (No. 11). Toronto 1902.

Transactions of the Canadian Institute. Vol. 7, P. 2 (No. 14). Toronto 1902.

University of Toronto Studies. Biolog. Ser. No. 3. Geolog. Ser. No. 2. — Psycholog. Ser. Vol. 2, No. 1. — Physical Science Ser. No. 1. 2. — Review of Historical Publications relating to Canada 1902. Toronto 1902. 03.

Illinois State Laboratory [Urbana]. Bulletin. Vol. 5, Index. — Biennial Report of the Director for 1899—1900. Urbana 1901. 02.

Memoirs of the National Academy of sciences. Vol. 8. Mem. 7. Washington 1902.

Bureau of Education. Report of the Commissioner of education for the year 1900/1901. Vol. 1. 2. Washington 1902.

Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1372. 1376. Washington 1902. 03.

Smithsonian Contributions to knowledge. No. 1373 Washington 1903.

Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. Bulletin. No. 25. 27. Washington 1902. 03. Annual Report. 19 (1897/98) I. II. ibid. 1900. — U. S. National Museum. Contributions from the U. S. National Herbarium. Vol. 8, P. 1—3. ibid. 1903.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for 1900/01. 1901/02. Washington 1902. 03.

Publications of the U. S. Naval Observatory. 2. Ser. Vol. 3. — Report of the Superintendent for 1901/02. Washington 1902. 03.

U. S. Coast and Geodetic Survey. List and Catalogue of the Publications 1816—1902. Washington 1902. — A Bibliography of Geodesy. Edit. 2. By *J. H. Gore.* Appendix, No. 8. ibid. 1903.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work from July 1, 1901, to June 30, 1902. Washington 1903.

Department of the Interior. U. S. Geological Survey. Topographical Maps of Assiniboia, the Rocky Mountains [Banff Sheet — Lake Louise Sheet], Saskatchewan, Alberta. — Professional Papers. No. 1—8. — List of new Publications. No. 2. 3. Washington 1902. 03.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 191. 195—207. — Water Supply and Irrigation Papers. No. 65—79. Washington 1902. 03.

Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 22. 1900/1901. P. I—IV. 1901/02 Washington 1901. 02.

Monographs of the U. S. Geological Survey. 11—43. Washington 1902. 03.

Mineral Resources of the U. S. 1901. Washington 1902.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 54, Entr. 4—6. T. 55, Entr. 1—6. T. 56, Entr. 1. 3. Buenos Aires 1902. 03.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. T. 17, Entr 2. 3. Cordoba 1902. 03.

Boletim del Cuerpo de Ingenieros de minas del Perú. No. 1. 2. Lima 1902.

Anales del Museo nacional de Montevideo. Tom. 5. Flora Uruguaya, p. 1—160. Montevideo 1903.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1903. (Anno 19.) Rio de Janeiro 1903.

Boletim mensal do Observatorio do Rio de Janeiro de 1902, Ott.—Dec. 1903, Jan.—Março. Rio de Janeiro 1902. 03.

Actes de la Société scientifique du Chili. T. 12, Livr. 1. 2. Santiago 1903.

Asien.

Notulen van de algemeene en directie vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 40, Afl. 2—4. Deel 41, Afl. 1. Batavia 1902. 03.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 45, Afl. 2. 5. 6. Deel 46, Afl. 1—4. Batavia 1902. 03.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Ann. 1643/44. 1644/45. 1675. 1676. 's Gravenhage, Batavia 1902.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 52, St. 3. Deel 54, St. 2. Deel 55, St. 3. Batavia, 's Hage 1902. 03.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 62 (Ser. X, Deel 6). Weltetreden, Amsterdam 1903.

Observations made at the Magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 24. 1901. Batavia 1903. — Regenwaarnemingen in Nederl. Indie. Jaarg. 23. ib. 1902.

Indian Museum. Annual Report. 1901/02. Calcutta 1903.

Publications of the Earthquake Investigation Committee. No. 7. 12—14. Tōkyō 1902. '03.

The Journal of the College of science, Imp. University, Japan. Vol. 17, Art. 11. 12. Vol. 18, Art. 3. 4 Vol. 19, Art. 6—8. Tōkyō 1903.

Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät der Kais. Japan. Universität. Bd. 6, No. 1. Tokio 1903.

Annotationes Zoologiae japonensis. Vol. 4, P. 4. 5. Tokyo 1902. '03.

Australien.

Proceedings of the R. Society of Victoria. N. S. Vol. 15, P. 2. Vol. 16, P. 1. Melbourne 1903.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 36 (1902). Abstract of Proceedings. Sept. 1902—Jun. 1903. Sydney d. J.

---

2. Einzelne Schriften.

Abbe, Ernst, Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1. Jena 1902.

Bashforth, Francis, A historical sketch of the experimental determination of the resistance of the air to the motion of projectiles. Cambridge 1903.

Bourget, Henr., Éclipse total de soleil du 28. Mai. S.-A. Paris s. a.

Clemm, Walt. Nic., Die Gallensteinkrankheit. Berlin 1903.

Daeuble, Joann., Dissertationes tres (de pendulo, de ratione potentiali, de aequationum plena solutione). Stuttgardiae 1903.

Forster, Rich., Die dritte Bewegung unserer Erde. Wien 1903.

Fritsche, H., Atlas des Erdmagnetismus für die Epochen 1600, 1700, 1780, 1842 und 1915. Riga 1903.

Hugues, Lachiche, Un seul Champignon sur le globe! Port-Louis, Maurice 1902.

Jazykov, D. D., Recensija P. N. Rogožima, Ukazetel' k „Opytu rossijskoj P. S. Sopikova. S. Petersburg 1803.

Lebon, Ernest, Sur un manuscrit d'un cours de J. N. Delisle au Collège Royal. Paris 1902.

Pettinelli, Parisino, Una nuova forza biologica che agisse meccanicamente a distanza. Savona 1903.

Pichler, Fritz, Austria Romana. T. 1 (Quellen und Forschungen zur alten Geschichte und Geographie, Heft 2). Leipzig 1902.

Reynolds, Osborne, The sub-mechanics of the Universe. Cambridge 1903.

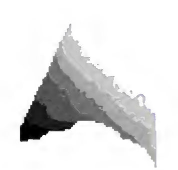
Schmidt, E., Referate in Schwalbes Jahresberichten der Anatomie, XII. Physische Anthropologie, 1899—1991.

Schuyten, M. C., Over de snelheid der uitstralingswarmte van het lichaam. S.-A. 1902.

Vogel, H. C., Der spektroskopische Doppelstern o Persei. — ε Aurigae, ein spektroskopischer Doppelstern. S.-A. Berlin.

INHALT.

Seite



Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

